

算學小叢書

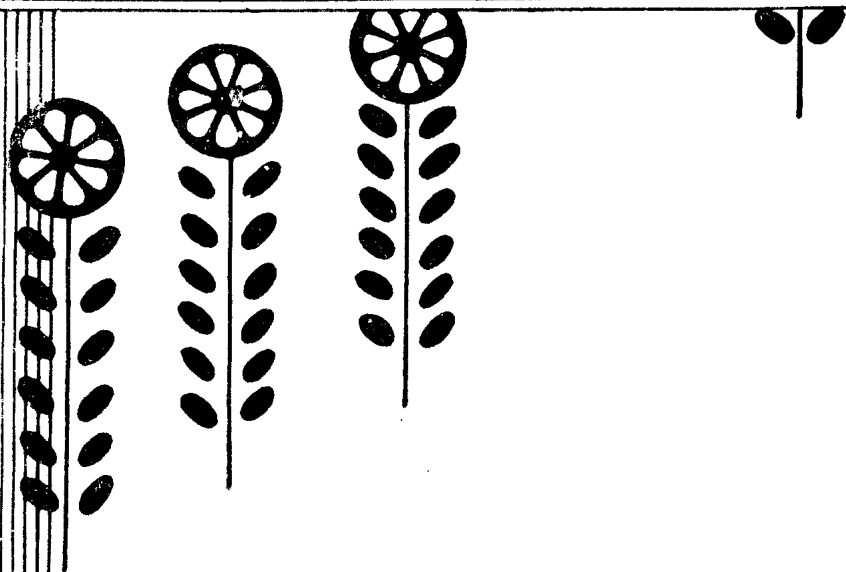


三角法

三角形之性質及其解法

森吉太郎著

崔朝慶譯



商務印書館發行

算學小叢書

三 角 法

三角形之性質及其解法

森吉太郎著

崔朝慶譯



商務印書館發行

中華民國二十三年六月初三版

(一〇五三九)

算學 三角法——三角形之性質及其解法 一册

每册定價大洋伍角

外埠酌加運費匯費

版 翻
權 印
所 必
有 究

原 著 者 森 吉 太 郎

譯 述 者 崔 朝 慶

發 行 人 王 雲 五
上海河南路

印 刷 所 商 務 印 書 館
上海河南路

發 行 所 商 務 印 書 館
上海及各埠

序

本篇所講述之三角法，爲三角形之性質及其解法，而特別注重測量。有他書所常忽略，獨詳於此書者，如測量塔之問題，各書每云旗竿直立於塔上，吾國之塔上從未見有旗竿，嘗諮詢藤澤直枝君，知所謂旗竿者，乃塔頂如螺旋形之相輪，或名之曰九輪，而九輪爲相輪之一部分，究以稱相輪爲宜。自奈良時代至德川時代，所造之塔，其全高與相輪之高之比，各有一定之值（有表在第五章第 91 節）；建塔之時期，可測相輪而判定也。又關於軍艦航海等之問題，乃請丸山（茂富）海軍中尉考按，皆切合於事實。凡註明中尉考按之題，閱者尤宜注意。余著是書，欲求便於自修，易於了解，幾經易稿，生平之經驗，全傾注於其中；但無藤澤丸山之襄助，恐不能有以異於他書。今編輯既成，不得不感謝二君之隆情焉。

大正二年二月二十日

森吉太郎識

目 次

第一章 直角三角形之解法	1
定義	1
知斜邊及一銳角求其餘之邊角	2
問題 1	3
問題 2	4
問題 3	5
知斜邊及直角旁之一邊求其餘之邊角	6
問題 4	6
問題 5	8
問題 6	9
知一銳角及其對邊求其餘之邊角	9
問題 7	10
問題 8	11
問題 9	12
知夾直角之一邊及其邊與斜邊所夾之一銳角求其餘之邊角	12
問題 10	13
問題 11	14
問題 12	15
知夾直角之二邊求其餘之邊角	15
問題 13	15
問題 14	16
問題 15	18
幾何學之應用	18
問題 16	20
雜例題	21

問題17.....	24
第二章 測量高與距離.....	26
測量之名辭及測量之器械.....	26
測在平地上之物體之高.....	29
問題18.....	32
測能望見之物體之距離.....	38
問題19.....	38
測能望見之物體之高.....	39
問題20.....	45
雜例題.....	46
問題21.....	48
第三章 斜角三角形角與邊之關係.....	51
角之關係.....	51
問題22.....	52
問題23.....	58
問題24.....	54
邊與角之關係.....	55
問題25.....	58
問題26.....	60
問題27.....	61
問題28.....	63
問題29.....	64
證 $a = b \cos C + c \cos B$	65
問題30.....	67
證 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$	68
問題31.....	70

$$\text{證 } \frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}C} \dots\dots\dots 71$$

問題32.....73

$$\text{證 } \frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}C} \dots\dots\dots 73$$

問題33.....74

$$\text{證 } \frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan \frac{1}{2}(A-B)}{\tan \frac{1}{2}(A+B)} \dots\dots\dots 74$$

問題34.....76

半角之正弦與三邊之關係.....76

問題35.....78

半角之餘弦與三邊之關係.....78

問題36.....79

半角之正切與三邊之關係.....79

問題37.....81

三角形之面積.....81

問題38.....83

三角形之內切圓半徑.....84

問題39.....86

傍切圓之半徑.....86

問題40.....87

雜例題.....88

問題41.....90

第四章 斜角三角形之解法.....92

知二角及二角間之邊求其餘之邊角.....	92
問題42.....	93
問題43.....	94
問題44.....	94
知二邊及其夾角求其餘之邊角.....	95
問題45.....	96
問題46.....	97
問題47.....	98
知二邊及其夾角先求夾角之對邊.....	98
問題48.....	99
知二邊及對此二邊中之一邊之角求其餘之邊角.....	100
問題49.....	102
問題50.....	102
問題51.....	103
知二邊及對此二邊中之一邊之角先求第三邊.....	104
問題52.....	104
知三邊求三角.....	105
問題53.....	106
問題54.....	107
問題55.....	108
知三邊求各角之餘弦.....	108
問題56.....	109
知三邊求外接圓之半徑.....	109
問題57.....	110
求圓內接四邊形之面積.....	110
知四邊形之四邊及相對二角之和求面積.....	112
求正多角形外接圓之半徑及內切圓之半徑.....	113
幾何學之應用.....	114

問題58	117
雜例題	118
問題59	119
第五章 測量應用	122
測能望見之點之距離	122
問題60	124
測二點之距離	125
問題61	127
測能望見之物體之高	127
問題62	131
物體之上有物體測兩物體之高	132
問題63	135
關於俯角之問題	135
問題64	137
公共一邊之兩三角形知一形之三邊及又一形之頂角爲對 角線所分之二角求又一形之二邊	137
測能望見之圓半徑	138
求視界半徑	139
三角測量	141
三角測量之等級	142
問題65	145
雜例題	146
問題66	148
問題之答及解法指南	151

三角法 三角形之性質及其解法

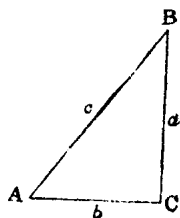
第一章

直角三角形之解法

1. 定義。凡平面三角形之三邊三角中，知其三，〔必須有一爲邊，若三者俱爲角，不能求得各邊之長，因互相似之三角形之三角互相等故也。〕則其餘之邊角皆可推求而得。由所知之邊角，求未知之邊角，稱爲解三角形。其計算之方法，稱爲三角形之解法。

2. 直角三角形之直角爲 90° ，即已知其一角，故三邊之中，祇須知其二邊，或僅知其一邊及一銳角，由次之公式，可求得其餘之邊角。

以代數之式，明三角形邊角之關係，恆用 A, B, C 表三角形之角，用 a, b, c 表對 A, B, C 各角之邊。右圖爲直角三角形， C 爲直角，〔本篇中，皆以 C 爲直角三角形之直角。〕 c 爲對直角之邊， A 與



B 皆為銳角， a 與 b 為對銳角之邊。

直角三角形邊角之關係式。

$$A + B = 90^\circ$$

$$\sin A = \cos B = \frac{a}{c}$$

$$\cos A = \sin B = \frac{b}{c}$$

$$\tan A = \cot B = \frac{a}{b}$$

$$3 = \frac{b}{2} \quad b = 2 \times 3 = 6$$

從上之公式，化得次之諸式。

$$a = c \sin A = c \cos B = b \tan A = b \cot B.$$

$$b = c \cos A = c \sin B = a \cot A = a \tan B.$$

$$c = \frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\cos B} = \frac{b}{\cos A} = \frac{b}{\sin B}.$$

又 $C = 90^\circ$ ，依畢達哥拉 (Pythagoras) 之定理，

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

解直角三角形之問題，有次之四種。

- I. 知對直角之邊及一銳角。
- II. 知對直角之邊及直角旁之一邊。
- III. 知一銳角及對此角之邊。
(知一銳角及對他銳角之邊，可轉移歸於第 III 種。)
- IV. 知直角旁之二邊。

3. I 知 c 邊及 A 角，求其餘之邊角。

解 因 $A + B = 90^\circ$ ，則 $B = 90^\circ - A$ ，故易知 B 之值。

又從 $a = c \sin A$ 及 $b = c \cos A$ ，即得 a 與 b 之值。

4. 例一. 設 $c=100$ 尺, $A=30^\circ$, 求 B, a, b .

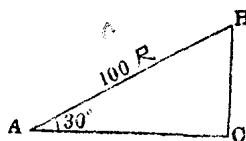
解 $B=90^\circ-30^\circ=60^\circ$.

$$a=c \sin A=100 \sin 30^\circ$$

$$=100 \times \frac{1}{2}=50 \text{ 尺.}$$

$$b=c \cos A=100 \cos 30^\circ$$

$$=100 \times \frac{\sqrt{3}}{2}=50\sqrt{3} \text{ 尺.}$$



問 題 1

求次之(1)至(5)各直角三角形之 a, b .

(1) $c=100 \quad A=60^\circ$

(2) $c=25 \quad A=45^\circ$

(3) $c=124 \quad A=18^\circ$

(4) $c=4p \quad A=36^\circ$

(5) $c=4 \quad A=15^\circ$

(6) 設直角三角形之 $c=250, \sin A=.6$ 求 b .

(7) 設直角三角形之 $c=120, A=30^\circ$, 問此三角形之面積如何。

(8) 設直角三角形之 $c=50, A=60^\circ$, 問其內切圓半徑如何。

(9) 設三角形之 A, B, C 各角之比為 $1:2:3$, 其最大角所對之邊為 1 尺, 求他二邊至分位止, 分位以下四捨五入。

(10) 有人以長 600 尺之線放紙鸞, 其線與地面成 36° 之角, 問紙鸞距地面之高幾何。

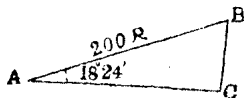
5. 例二. 設直角三角形之 $c=200$ 尺, $A=18^\circ 24'$, 檢三角函數真數表解之。

解 $B=90^\circ-18^\circ 24'=71^\circ 36'$.

$$a=c \sin A=200 \sin 18^\circ 24'$$

檢表得 $\sin 18^\circ 30'=.3178$

$$\sin 18^\circ 20'=.3145$$



從比例 $10' : 4' = .3178 - .3145 : x$ 得 $x = .0011$.

$\therefore \sin 18^\circ 24' = .3145 + .0011 = .3156$.

則 $a = 200 \times .3156 \approx 63.1$ 尺.

又 $b = 200 \cos 18^\circ 24'$.

檢表得 $\cos 18^\circ 24' = .9492$

$\cos 18^\circ 30' = .9488$

從比例 $10' : 4' = .9492 - .9488 : x$ 得 $x = .0004$.

$\therefore \cos 18^\circ 24' = .9492 - .0004 = .9488$.

則 $b = 200 \times .9488 \approx 189.8$ 尺.

問題 2

求次之(1)至(5)各直角三角形之 a, b , (用三角函數真數表)

(1) $c = 200$ $A = 81^\circ 20'$

(2) $c = 25.6$ $A = 45^\circ 30'$

(3) $c = 872.8$ $A = 28^\circ 30'$

(4) $c = 856.7$ $A = 42^\circ 18'.3$

(5) $c = 457.2$ $A = 60^\circ 12'.6$

(6) 設汽車路線與地平面成 $7^\circ 20'$ 之角, 問行 5400 尺之後, 其地比前高若干尺.

(7) 有避雷針長 72 尺, 其針與地面成 $75^\circ 30'$ 之角, 求針尖距地之高.

(8) 設直角三角形之二銳角之比為 5 : 7, 其對直角之邊為 3 尺, 求對銳角之邊之長至分位止, 分位以下四捨五入.

(9) 有直角三角形之地面, 斜邊長 60 尺, 其一銳角 20° , 問面積幾何.

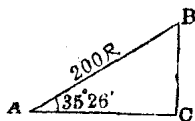
6. 例三. 直角三角形之 c 邊 200 尺, A 角 $35^\circ 26'$, 用對數表解之.

解 $B = 90^\circ - 35^\circ 26' = 54^\circ 34'$.

$$a = 200 \sin 35^\circ 26'.$$

$$\begin{aligned} \therefore \log a &= \log 200 + \log \sin 35^\circ 26' \\ &= 2.30103 + \bar{1}.76324 \\ &= 2.06427. \end{aligned}$$

$$a = 115.5 \text{ 尺.}$$



從表得 $\log \sin 35^\circ 30' = \bar{1}.76395.$

$$\log \sin 35^\circ 20' = \bar{1}.76218.$$

$$10' : 6' = .00177 : x.$$

$$x = .00106.$$

$$\begin{aligned} \therefore \log \sin 35^\circ 26' &= \bar{1}.76218. \\ &+ .00106. \\ &= \bar{1}.76324. \end{aligned}$$

又 $\log 116 = 2.06446.$

$$\log 115 = 2.06408.$$

$$\therefore 88 : 19 = 1 : x.$$

$$x = .5.$$

$$a = 115 + .5 = 115.5.$$

次求 b , $b = 200 \cos 35^\circ 26'.$

$$\begin{aligned} \therefore \log b &= \log 200 + \log \cos 35^\circ 26' \\ &= 2.30103 + \bar{1}.91105 = 2.21208. \quad b = 163 \text{ 尺.} \end{aligned}$$

從表得 $\log \cos 35^\circ 20' = \bar{1}.91158.$

$$\log \cos 35^\circ 30' = \bar{1}.91099.$$

$$10' : 6' = .00089 : x.$$

$$x = .00058$$

$$\begin{aligned} \therefore \log \cos 35^\circ 26' &= \bar{1}.91158 \\ &- .00058. \\ &= \bar{1}.91105. \end{aligned}$$

又 $\log 1630 = 3.21219.$

$$\log 1629 = 3.21192.$$

$$\therefore 27 : 16 = 1 : x.$$

$$x = .6$$

$$b = 162.96 \approx 163.$$

問題 3

解次之各直角三角形。(用對數表)

(1) $c = 200$ $A = 30^\circ 40'$ 求 a, b .

- (2) $c=100$ $A=18^{\circ}24'$ 求 a, b .
 (3) $c=141.4$ $A=48^{\circ}12'$ 求 a, b .
 (4) $c=965.7$ $A=36^{\circ}25'.4$ 求 a .
 (5) $c=567.8$ $A=57^{\circ}39'20''$ 求 b .
 (6) $c=50$ $A=82^{\circ}25'30''$ 求 b .
 (7) $c=10$ $\sin A=.16$ 求 b .
 (8) 有坂路長 1080 尺, 其傾斜為 25° , 問坂之絕頂比平地高幾何。
 (9) 以長 360 尺之繩, 繫於輕氣球, 一端縛於樁上, 其繩之傾斜為 62° 時, 問氣球離地之高幾何。
 (10) 以長 24 尺之梯, 斜倚於屋檐, 其傾斜與地面成 73° 之角, 問屋檐離地高幾何。

7. II. 知斜邊 c 及一邊 a , 求 A, B, b .

解 從 $\sin A = \frac{a}{c}$ 得 A .

又從 $B = 90^{\circ} - A$ 得 B .

又從 $b = a \cot A$ 得 b .

8. 例一. 設 $c=288, a=144$, 求 A, B, b .

解 $\sin A = \frac{a}{c} = \frac{144}{288} = \frac{1}{2}$

$\therefore A = 30^{\circ}$.

由此得 $B = 90^{\circ} - 30^{\circ} = 60^{\circ}$.

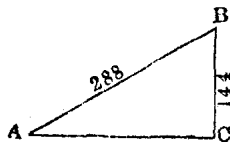
又 $b = a \cot A = 144 \cot 30^{\circ}$

$= 144\sqrt{3}$

或 $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{288^2 - 144^2}$

$= \sqrt{(288+144)(288-144)} = \sqrt{144 \times 8 \times 144}$

$= \sqrt{144^2 \times 8} = 144\sqrt{8}$.



問題 4

求次之(1)至(5)各直角三角形之 A, b .

本
理
見
前
節
第
5
題

- (1) $a=24$ $c=48$
 (2) $a=p$ $c=2p$
 (3) $a=40\sqrt{3}$ $c=80$
 (4) $a=p\sqrt{3}$ $c=2p$
 (5) $a=\sqrt{2}$ $c=2(\sqrt{3}-1)$
 (6) 設 ABC 三角形之 C 爲直角, $AB=2\sqrt{3}$, $AC=3$, 求 B 角之二等分線之長。
 (7) 設 ABC 三角形之 C 爲直角, $AB=4$, $AC=2\sqrt{3}$, 求從 B 至內切圓心之距離。
 (8) 直角三角形之 a, c 二邊之和爲 $5+\sqrt{5}$, a, c 二邊之差爲 $3-\sqrt{5}$, 求二銳角中之大者之度數。
 (9) 設直角三角形之斜邊爲 4, 內切圓半徑爲 $\sqrt{6}-2$, 問二銳角之度數各幾何。
 (10) ABC 直角三角形之 $AB=17$, $BC=8.5$, O 爲內切圓之中心, D, E 爲圓周與 AB, AC 之切點, 求 $\angle DOE$ 之度數。

9. 例二. 設 $c=400$, $a=356$, 檢三角函數真數表解之。

$$\text{解 } \sin A = \frac{a}{c} = \frac{356}{400} = .89.$$

$$\text{檢表 } \sin 63^\circ = .8910.$$

$$\sin 62^\circ 50' = .8897.$$

$$\text{從 } 13 : 3 = 10' : x.$$

$$\text{得 } x = 2'.$$

$$\therefore A = 62^\circ 50' + 2' = 62^\circ 52'.$$

$$\text{又 } B = 90^\circ - 62^\circ 52' = 27^\circ 8'.$$

$$\text{又 } b = a \cot A = 356 \times \cot 62^\circ 52'.$$

$$\text{檢表 } \cot 62^\circ 50' = .5182.$$

$$\cot 63^\circ = .5095.$$



從 $10' : 2' = .0037 : x$ 得 $x = .0007$.

$\therefore \cot 62^\circ 52' = .5132 - .0007 = .5125$.

$b = 356 \times .5125 = 182.45 \approx 182.5$.

問題 5

解次之各直角三角形, (用三角函數真數表)

(1) $c=5$ $a=4$ 求 A, b .

(2) $c=58$ $a=45$ 求 A, b .

(3) $c=3p$ $a=2p$ 求 A, b .

(4) $c=257$ $a=123$ 求 A .

(5) $c=567.8$ $a=256.7$ 求 A .

(6) 設直角三角形之最大邊為 20, 內切圓半徑為 4, 問最小之角幾何。

(7) 設 ABC 三角形之 C 為直角,

其三邊之關係為 $\frac{a+c}{18} = \frac{b-a}{7}$, $\frac{c-b}{c-a} = \frac{1}{8}$ 求 A 角。

10. 例三. 設 $c=234.7$, $a=115.6$, 用對數表解之。

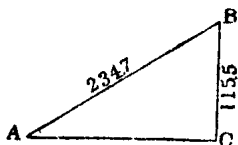
解 $\sin A = \frac{a}{c} = \frac{115.6}{234.7}$.

因 $\log \sin A = \log 115.6 - \log 234.7$

$= 2.06296 - 2.37051$

$= \bar{1}.79245$.

$\therefore A = 38^\circ 19'.3$.



檢表 $\log \sin 38^\circ 10' = \bar{1}.79095$.

$\log \sin 38^\circ 20' = \bar{1}.79256$.

從 $161 : 150 = 10' : x'$, 得 $x' = 9'.3$.

$\therefore A = 38^\circ 19'.3$.