全等三角形

中國数学会上海分会
中学数学研究委員会编

新知識出版社

全等三角形

中國数学会上海分会
中学数学研究委員会編

新知識出版社
一九五六年·上海

全　等　三　角　形

中國数学会上海分会
中学数学研究委員会編

*

新知識出版社出版
（上海湖南路9号）
上海市書刊出版業营業許可証出 015 号

上海國光印刷厂印刷　新華書店上海發行所总經售

*

开本：787×1092　1/32　印張：2　1/8　字数：47,000
1956 年 9 月第 1 版　1956 年 9 月第 1 次印刷
印数：1—55,000

統一書号　13076·53
定　价：（7）0.20 元

序　言

本会为了学習苏联先進經驗，帮助教师積極提高教学質量，并根据当前中学教学实际需要，决定着手編寫有关高初中数学各科包括几何，三角，代数，算術教材內容的小册子，陸續分批出版，以提供中学数学教师作为進一步研究和了解教材的参考，从而更好地掌握教材的教学目的。同时也可供高初中学生作为課外鑽研的题材，以利更深刻地理解教材內容。我們希望通过这一套小册子的出版，能使数学界同志对中学数学教材的研究得到廣泛的交流。

这本“全等三角形”的小册子，是根据中学数学教学大綱修訂草案及初級中学課本平面几何“三角形的全等”一章教材內容編寫的，对多边形圖形的基本概念作了比較詳細的敍述，并指出研究三角形是研究多边形的基礎。它从軸对称反轉重合的移形性質導出全等三角形，通过例题說明如何运用全等三角形的三条基本定理，并着重在問題的分析。为了便於讀者認識圖形，本册使用了折圖方法，对添置輔助綫及运用全等三角形性質來解决測量問題均作了適当的說明。

本会在編寫本册前，曾拟就編寫計划，經編輯組兩次討論，然后确定初步提綱，分別由郭如仪、孙佩珍兩同志提供材料，而由黄松年同志执筆寫成，再經楊荣祥、范际平兩同志校訂，最后由楊荣祥、黄松年兩同志作了修正，虽然这样，但由于我們水平有限，缺点是难免的，希望数学界同志予以批評和指正。

中國数学会上海分会中学数学研究委員会

1956年6月

目　錄

一　关于三角形的基本概念

我們在日常生活中所見到的檯子、門窗等表面的边界，都是由四条衔接的綫段所圍成。如果我們將它抽象的画在紙上，顯然可看出以这四条綫段为界限在紙上組成了一个封閉的平面圖形，这个圖形我們称为多边形。

研究多边形之前我們須討論折綫的性質。

什么叫做折綫？**若干不在同一直綫上的綫段順次的銜接起來，这些綫段所組成的綫，称为折綫。**如圖1中綫段$AB, BC, CD,$ ……順次連接称为折綫$ABCDE$……。而$AB, BC, CD,$……均分别称为折綫$ABCDE$……的边，相鄰兩边的公共端点，如$B,$

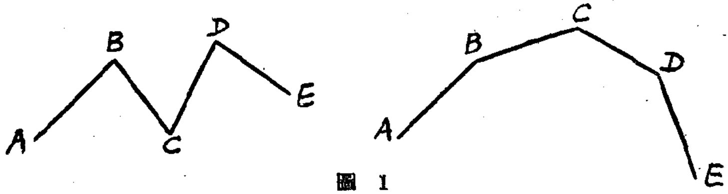

圖　1

$C, D,$……称为折綫$ABCDE$……的頂点。这正如我們見到檯子的表面的四条边一样，它就是由四条綫段所組成的折綫；每条边称为这折綫的边，每一个檯角称为这折綫的頂点。

把一条折綫的每一条边向兩方延長成直綫，如果这条折綫的其他各边都在这直綫的同旁，則这条折綫我們称为凸折綫。如圖2中任取綫段BC來看，$AB,\ CD,\ DE,$……

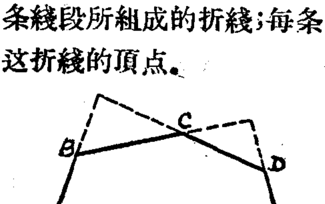

圖　2

諸綫段在 BC 的同側，如果取其他綫段來看，也是一样的，因此称 $ABCDE\cdots\cdots$ 为凸折綫。

在一条折綫中只要有一条边向兩方延長，如果其他綫段分別在这条直綫的異側，这样的折綫就不是凸折綫。 如圖3中折綫 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1\cdots\cdots$ 取綫段 C_1D_1 來看，A_1B_1，B_1C_1 在 C_1D_1 之一側，而 D_1E_1，E_1F_1 又在 C_1D_1 之另一側，因此 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1\cdots\cdots$ 就不是凸折綫。

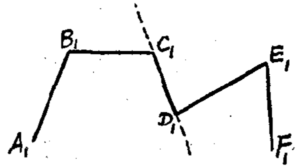

圖 3

当一条折綫的首尾兩端相重合时，这条折綫称为封閉折綫，如我們見到的檯子的边界就是封閉折綫。

由封閉折綫所圍成的平面圖形，与它所占有的平面部分称为多边形(如圖 4 及 5)。

当由封閉凸折綫所圍成的平面圖形，与它所占有的平面部分称为凸多边形或称凸多角形(如圖 4)。

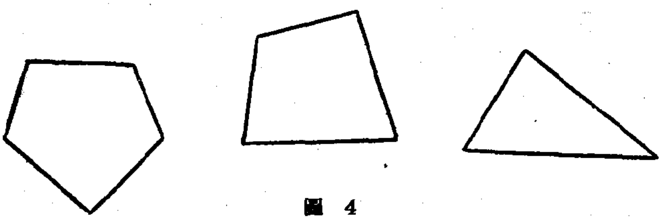

圖 4

当由非凸封閉折綫所圍成的平面圖形，与它所占有的平面部分称为凹多边形或称凹多角形(如圖 5)。

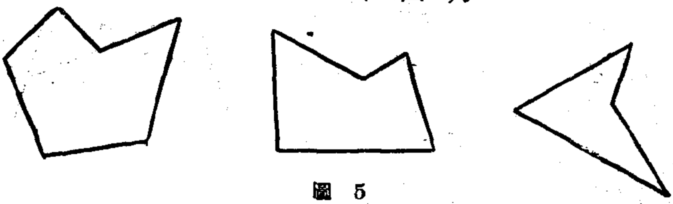

圖 5

我們在中学平面几何里研究的多边形，僅限于凸多边形，以后說到多边形的时候，就是指凸多边形而言。

凡由封閉折綫所組成的多边形的折綫的每一条边都称为多边形的边，它的頂点称为多边形的頂点。任何多边形都用它的頂点的字母按頂点的順序排列來表示的。如圖6中称为多边形 $ABCDE$，当然也可以称为多角形 $ABCDE$。同样也可以称为多边形 $BCDEA$，或多边形 $CDEAB$，……等，只要按頂点的順序排列的字母來表示它。如果我們不按頂点的順序排列所表示的多边形，就不是凸多边形，而这种复雜多边形如 $ACDBE$，就不屬于中学几何研究的范圍了。

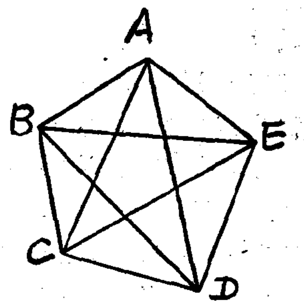

圖 6

多边形每相鄰兩边就組成一个角，我們称为多边形的角或称頂角。如圖6中 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, ……等都是多边形 $ABCDE$ 的頂角。

根据不在同一直綫上的三点决定一平面的性質，可知含有兩条綫段的折綫只能組成一个角，只有三条以上綫段的折綫才能圍成一个平面的多边形。

一个多边形由三条綫段所圍成的平面圖形称为三角形，如果由三条以上凸折綫所圍成的平面圖形，則可根据它的边数或角頂数称为四边形或四角形、五边形或五角形……等等。

我們連接多边形不相鄰的兩个頂点的綫段称为多边形的对角綫。如圖6中綫段 AC、BD、CE、AD 及 BE 等，都是五边形 $ABCDE$ 的对角綫。

一个多边形对角綫的条数，是由它的边数或角頂数(因为多

边形的边数与角頂数是相等的)來确定的。从圖6上來看，由于对角綫是不相鄰的兩个頂点的連接綫段，因此自五边形$ABCDE$的任一个頂点出發，可能連的对角綫只有兩条。如自頂点A可連結的对角綫是AC和AD兩条，这是因为除去A点和A点的相鄰兩点B, E以外，余下的只有C, D兩点了；这兩点各与A点連成一条对角綫。因此自五边形的一个頂点出發可連接的对角綫数应为$(5-3)=2$. 因为五边形有五个頂点，則自各个頂点出發所連成的对角綫数为$5(5-3)=10$条，但其中每一条对角綫都算过兩次，例如，自A起的AC与C起的CA，实际上是同一条对角綫，而上面把它算作兩条了；其他的对角綫都是这种情形，因此五边形$ABCDE$的对角綫应有$\frac{1}{2}\cdot 5(5-3)=5$条。如果我們要計算一个$n$边多边形的对角綫有多少条($n$指不小于3的自然数)，依照上面五边形計算对角綫数这样推算，就不难推得n边多边形的对角綫有$\frac{1}{2}\cdot n(n-3)$条。

如果$n=3$时，則这个多边形就是三角形，顯然它的对角綫因为$\frac{3(3-3)}{2}=0$而不存在。

凡多边形各边的和，称为多边形的周長。对于多边形的周長我們常用一个小寫的文字來表示，如圖6中五边形$ABCDE$之周長是$AB+BC+CD+DE+EA=p$，則p就表示它的周長。

至于凹多边形我們只要在它的形內連接一条或几条適当的对角綫，則將原形分为兩个或多个凸多边形。如圖7中凹多边形$ABCDEF$，如連接FC，則从全量等于部分量之和的公理可知多边形$ABCDEF$是由于多边形$ABCF$及多边形$FCDE$拚合而

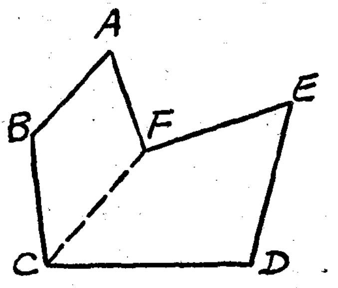

圖 7

成，而 $ABCF$ 及 $FCDE$ 均为凸多边形。

凡一个多边形，我們总可以將它分成为若干个三角形。如果所分的若干个三角形中有一个頂点是重合的話，則有一定的規律將它分割为有限个三角形的。这种分割的方法是：

1. 当所分割的三角形共有的这个頂点在已知多边形的形內时，这时就能分割成 n 个三角形。这里 n 是表示已知多边形的边数，如圖 8 中六边形 $ABCDEF$ 就分成了六个三角形 OAB, OBC, OCD, OED, OEF 及 OFA。这些三角形都共有一个頂点 O。

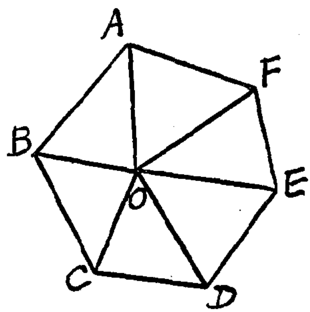

圖 8

2. 当所分割的三角形共有的这个頂点就是已知多边形的一个頂点时，这时就只能分割成 $(n-2)$ 个三角形。如圖 9 中五边形 $ABCDE$ 就分成了三个三角形 ABC, ACE 及 ECD。这些三角形都共有一个頂点 C，而这个頂点 C 就是原來多边形 $ABCDE$ 的一个頂点。

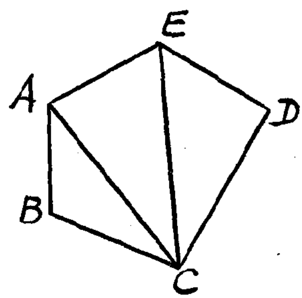

圖 9

由于任何多边形，总可以分割为有限个三角形，我們根据全量等于部分量的和的公理，可知这个多边形系由所分割的若干个三角形所拚成。因此我們認为三角形是多边形的基礎，同时三角形是多边形中最簡單的圖形。由于这样，我們研究多边形的性質，就需要从研究三角形的性質着手。

凡一个三角形，系由三条边及三个角所組成，我們称这三条边和三个角为組成这三角形的六个元素。如圖10中三角形ABC的三条边是AB，BC及AC，而三个角是$\angle A$，$\angle B$及$\angle C$.

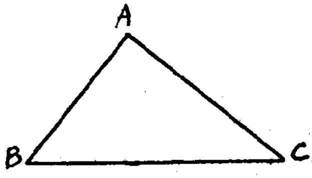

圖 10

对于一个三角形的圖形，我們是用"$\triangle$"的符号來表示的。如圖10中的三角形ABC可寫为$\triangle ABC$，顯然用"$\triangle$"的符号表示比用"三角形"三个文字表示要簡便。

在一个三角形中的任意一个角，对于組成这一个角的兩边來說，称为兩边的夾角；对于其他一边來說，称为这边的对角。如圖10中$\triangle ABC$的$\angle B$称为AB和BC兩边的夾角和另一边AC的对角。同样，$\angle C$称为AC，BC兩边的夾角和AB边的对角。

在一个三角形中任意一条边，对于这条边兩端的兩个角來說，称为这兩角的夾边；对于另外一个角來說，称为这角的对边。如圖10中$\triangle ABC$的BC边称为$\angle B$和$\angle C$的夾边和$\angle A$的对边。

关于三角形的兩角夾边、兩边夾角的概念，是一个重要的概念，是研究三角形問題常用到的几何語言。我們須善于用圖形來表达这种几何語言，同时也須熟練的認識这种几何語言所表示的圖形。为了使学生熟練这个关系，我們不妨引導学生在紙上画出各种形狀和位置不同的三角形進行反复練習和識別，这种活动可以帮助学生熟悉这个概念。

由于組成一个三角形的边的元素有長短的不同、角的元素有大小的不同，因此我們可以按三角形的边或角進行分类。

1. **按三角形边的長短來分类**，在这里我們又分为三种情況：

甲：当三角形的三边都不相等时，我們称为不等边三角形，如圖 11.

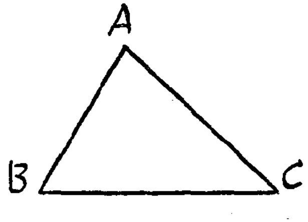

圖 11

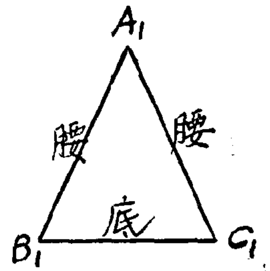

圖 12

乙：当一个三角形有兩边相等时，我們称为二等边三角形，又称为等腰三角形.（如圖 12）

丙：当一个三角形的三边都相等时，我們称为等边三角形.（如圖 13）

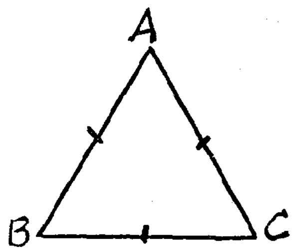

圖 13

当三角形为二等边三角形时，習慣上总是將相等的兩边作腰，而其他一边作底边；兩腰的夹角为頂角，其他兩角为底角。因此，二等边三角形又可以称为等腰三角形。

2. 按三角形的角的大小來分类：

甲：当三角形的三个角都是銳角时，則称为銳角三角形.（如圖 14）

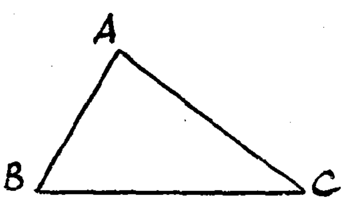

圖 14

乙：当三角形的三个角中有一个角是直角时，則称为直角三角形.（如圖 15）

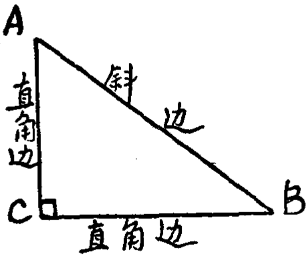

圖 15

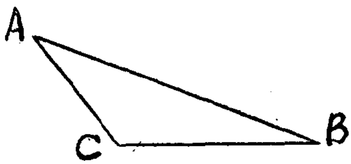

圖 16

丙：**当三角形的三个角中有一个角是鈍角时，則称为鈍角三角形。**（如圖 16）

直角三角形中夾直角的兩条边称为直角边，直角的对边称为斜边或称为弦。**当兩条直角边相等时称为等腰直角三角形。**（如圖 17）

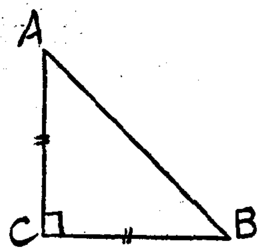

圖 17

从上面这几种分类的各种三角形的圖形中，我們应該注意的就是一般圖形与特殊圖形的問題。由于二等边三角形有兩条边相等，等边三角形的三条边都相等，直角三角形有一个角是直角，因此我們称这一些圖形为特殊三角形。通常所称的三角形一般就是指任意三角形而言，如果要指特殊圖形的話，一般須將圖形的称呼完全表达出來，如称直角三角形 ABC 或等腰直角三角形 ABC 等。不然須將它的条件陈述，如称“三角形 ABC, AB 等于 AC”时，也表示它是等腰三角形。这点应向学生說明，因为学生在初学几何时常会把一些特殊圖形來代替一般圖形，而引起不正确的結論。

由于多边形以它的周为界將这多边形分为兩个部分，我們簡称在这多边形所占有的平面部分为形內，而称这多边形所有

平面的其他部分为形外。

凡一个三角形某一頂点与它对边上任意一点均可連接成一綫段，如果所取的这一点是在这頂点的对边本身段綫上，那末所連成的一条綫段是在这三角形的形内；如果所取的这一点是在这頂点的对边的延長綫上，那么所連成的一条綫段是在这三角形的形外；如果所取的这一点是在这頂点的对边的兩个端点上，那么所連成的一条綫段也就是这三角形的边。根据兩点之間可以决定一条直綫的公理，我們过三角形的一个頂点与它对边或延長綫上任何一点均可連接一条綫段，像这样的綫段是有無数条的，然而这無数条綫段中有三条是特殊綫段，这就是：三角形角的平分綫、边上的中綫和高。

当三角形内一条綫段將其中一个角二等分，而这条綫段之長从这个角的頂点而止于这角的对边(如圖 18 中的 AD)，**我們称它为这角**($\angle A$)**的平分綫**。顯然这条角平分綫必在三角形的内部。

由于三角形有三个頂角，因此有三条角平分綫，而这三条角平分綫都在三角形的内部。

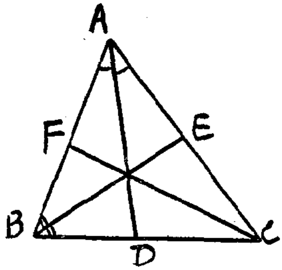

圖 18

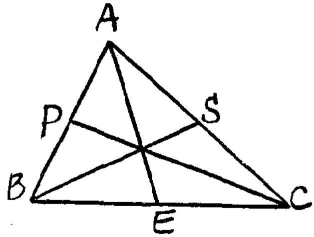

圖 19

連接三角形的頂点与它对边中点的綫段称为这三角形的中綫，同时这中綫也必在这三角形的形内。如圖 19 中 E 点为 BC

之中点，则 AE 为 $\triangle ABC$ 边 BC 上的中綫。

同样，由于三角形有三条边三个頂点，因此它有三条中綫，并都在这三角形的形內。

从三角形的一个頂点向它的对边引垂綫，**从頂点到对边垂足間的綫段称为三角形的高**，由于三角形有三个頂点及三条边，因此凡三角形都有三条高可作。

当三角形为銳角三角形时，则它的三条高都在形內。

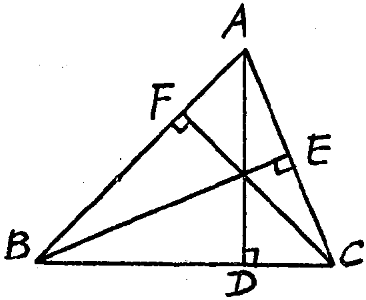

圖 20

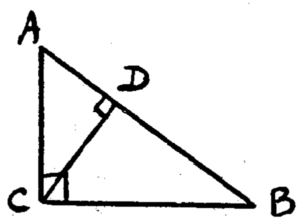

圖 21

当三角形为直角三角形时，由于直角三角形的两条直角边互相垂直，因此过直角三角形斜边上的两个端点引它对边的垂綫，即为直角三角形的兩直角边。所以直角三角形三边上的高只有斜边上的高在形內，其余兩直角边上的高，分别为这兩条直角边。

当三角形为鈍角三角形时，则鈍角对边上的高在形內，鈍角的两条夾边上的高在此鈍角三角形的形外。

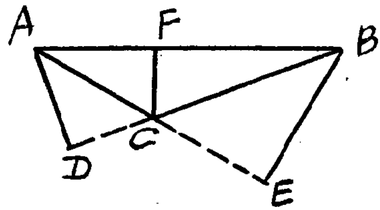

圖 22

关于三角形每一个角的平分綫及每边上的高和中綫又称为三角形的主要綫段。

对于三角形中的主要綫段

的作圖很为重要，因为它是研究三角形問題的主要基礎之一。以往初讀几何的人，很容易把直角三角形及鈍角三角形三边上的高的作圖搞錯，原因是总將它当作銳角三角形一样画在形內，这是由于对三角形高的定义沒有理解。为了克服学生造成这样的錯覚，一方面可画出各种形狀和位置不同的直角三角形和鈍角三角形并作出它們各边上的高，并強調的指出**凡鈍角三角形鈍角的兩条夾边上的高的垂足，是在这兩条夾边的延長綫上，而不在它的本身上**；另一方面可用鉛絲和木板做一个活动三角形的模型，这个模型的制作方法如下：

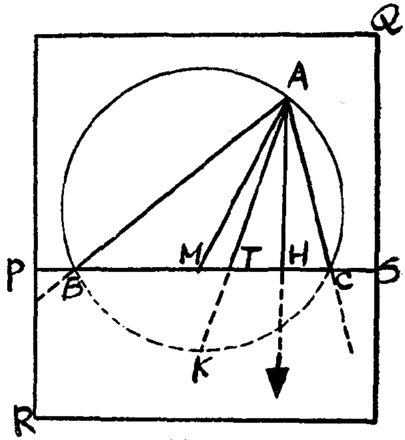

圖 23

圖 23 中 ABC 表示一个嵌槽的圓弧，PQ 及 RS 都用木板表示的平面，PQ 木板与 RS 木板中間有一些空隙，AB、AC 用鉛絲可以伸縮，BC 为画在 RS 木板的上边緣，AM 是中綫用橡皮帶固定。AH 是 BC 边上的高用綫懸一重物，而重物吊在兩板之隔層；AT 是角平分綫引長交 $\overset{\frown}{BKC}$ 之中点 K，并用橡皮帶固定在 AK；A 点后面用一顆鉚釘裝置于木板后，可以沿 $\overset{\frown}{BAC}$ 移动，也可以固定。又木板 RS 可以上下移动，$\angle A$ 也可以随着这木板的移动而改变大小。当 A 点移动时則 $\triangle ABC$ 的形狀变化，其中綫角平分綫和高地随着三角形的变化而改变其位置，但始終可以看出角平分綫在中綫和高之間。当三角形是等腰三角形时可看到这三綫合一；当三**角形是直角形时可看到高与一直角边重合或者是垂直于斜边**；

当三角形是鈍角三角形时($\angle B$或$\angle C$为鈍角时)可以看到这高在形外。

我們通过这个模型的使用，不僅对学生深刻了解三角形主要綫段在形内形外的情況(指高在形外)及以后講授等腰三角形时可看到等腰三角形的性質;这同时也培养了学生动的观念。