希望杯 数学竞赛系列丛书

"希望杯"全国数学邀请赛组委会 编
"希望杯"数学竞赛系列丛书主编 周国镇

希望杯

数学竞赛培训教程 高二年级

书中的一个个问题
就是一级级台阶
只要自信、努力、勤奋、坚持……
一步步攀登
就会走出一条自己的成功之路

为千千万万的青少年播种希望

中国大百科全书出版社

"希望杯"数学竞赛系列丛书

"希望杯"数学竞赛培训教程

高二年级

周国镇　主编

中国大百科全书出版社
·北　京·

总编辑:徐惟诚　　　　社　长:田胜立

图书在版编目(CIP)数据

“希望杯”数学竞赛培训教程·高二年级/周国镇主编.
—北京:中国大百科全书出版社,2004.1
(“希望杯”数学竞赛系列丛书)
ISBN 7-5000-7004-7

Ⅰ.希…　Ⅱ.周…　Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 116926 号

策 划 人:简菊玲
责任编辑:简菊玲
责任印制:徐继康
版式设计:童行侃
封面设计:贾衍凤

“希望杯”数学竞赛培训教程·高二年级
中国大百科全书出版社出版发行
(北京阜成门北大街 17 号　邮政编码:100037　电话 010-68318302)
http://www.ecph.com.cn
北京彩艺印刷厂印刷　新华书店经销
开本:850 毫米×1168 毫米　1/32　印张:11.125　字数:276 千字
2004 年 1 月第 1 版　2004 年 1 月第 1 次印刷
印数:1-20000
ISBN 7-5000-7004-7/G·658
定价:15.00 元

序　言

“希望杯”全国数学邀请赛从1990年起，至今已成功举办了14届。在2003年以前，为了不影响中考和高考，组委会限定只有初一、初二、高一、高二这四个年级的学生参加。2003年，增加了小学四年级和五年级，使“希望杯”涵盖了小学、初中、高中整个基础教育阶段。截至2003年，累计参赛的中小学生已超过1000万人。这个赛事之所以吸引如此多的中小学生，根本原因是赛题出得好。这些题目均出自“希望杯”命题委员会的专家们，他们中有名牌大学数学教授，有中国科学院的研究员，有数学特级教师，有数学奥林匹克高级教练，代表了我国数学竞赛领域的高层次水平。在每届比赛之前，他们都为各个年级精心编拟供系统培训参赛选手用的培训题和正式测试用的一试、二试试题。经过14年的积累，“希望杯”题库拥有近2000道独具特色的优秀试题，这是“希望杯”全国数学邀请赛的宝贵财富。

随着“希望杯”赛事日益扩大和深入，各地参赛师生和对“希望杯”试题深感兴趣的师生都要求“希望杯”组委会能编写一套面向全国参赛师生的权威性培训教材，他们对此一直翘首以待……这使我们深受感动和鼓舞。经过长期酝酿、精心策划，我们终于在第15届“希望杯”即将举办之前完成了本套教程的编写出版工作。

这套教程以新颁布的中学数学教学大纲为指导，力求充分体现“希望杯”的特色，为广大师生提供系统、全面、实用的数学内容、思想和方法。以“鼓励学好课本知识，适当拓宽知识面，激发学习数学的兴趣和热情，培养科学的思维能力、创新能力和实践能力”。我们相信，读者在认真学习全书内容后，并且还能在“希望杯”以及

其他数学竞赛中取得好成绩,一定能使数学水平切实得到提高。

本教程包含初一年级、初二年级、高一年级、高二年级四个分册(随着小学"希望杯"数学竞赛的蓬勃开展,以后还将出版小学四、五年级分册)。其中绝大部分题目精选自历届"希望杯"培训题和第1试、第2试试题。我们希望读者通过学习和研究本套教程,能够用尽可能短的时间掌握最有价值的内容。

由于这套教程的基本素材是"希望杯"全国数学邀请赛的历届试题和培训题,所以这里有必要介绍一下"希望杯"全国数学邀请赛的命题原则:

(1)竞赛题目贴近现行的中学生数学课本

第1试的题目不超过数学大纲和教学进度,第2试的题目中只有不超过五分之一的内容,要用到现行中学数学课本里所不包括的竞赛数学中的一些重要知识,这样做,是为了引导中学生努力学好现行的中学数学课本,在这个基础上,适当地扩大知识面。

(2)题目活而不难,巧而不偏、不怪,富于启发性。寓科学于趣味之中,寓知识、能力的考查于数学的美育之中

青少年在求学、求知的成长过程中,兴趣是极重要的,它可以激发出旺盛的求知欲,可以培育出专注于某一事物的研究精神,可以产生坚持不懈、锲而不舍的毅力。兴趣是青少年成才的重要动力,"希望杯"全国数学邀请赛每届的命题都力求能启迪青少年的思维,激发他们学习、钻研的兴趣。

(3)题目既大众化,又富于思考性

要体现鼓励性,力求做到使数学程度不太好的学生也能做出一些题目,从中受到鼓励而树立信心;而数学程度很好的学生也并不容易得到高分。

(4)要体现时代性

题目的编拟,力求与其他学科及现代实际生活建立联系,培养青少年的创造思维能力、解决实际问题的能力。

本教程不仅对参赛的学生适用，对不参赛的学生，在提高科学思维素质、应试能力方面也都有实实在在的好处。同时还可作为中学数学教师日常教学和指导竞赛的参考资料或数学培训班、数学兴趣小组的教材。

“希望杯”以往十几年的历史，很好地反映了“希望杯”试题的特色，充分体现了“希望杯”活动的优势。很多学生，正是通过对“希望杯”试题的研究、学习，提高了水平，增强了学习数学的兴趣和能力。值得一提的是，北大、清华等著名高校的很多学子在中学时代，都有参加“希望杯”竞赛并获奖的经历。

随着“希望杯”试题的不断更新，本套教程将逐年修订，持续优化，力求将教学、学习和应试三者融为一体。衷心希望本套教程能引导更多的读者走向热爱数学、热爱科学的道路。

本教程的编写，是在“希望杯”命题委员会的具体指导下进行的。执笔者是《数理天地》杂志编辑，“希望杯”命题委员会委员张海英（初一分册，高二分册）、杨金龙（初二分册，高一分册）。

由于涉及题目和知识点众多，难免出现疏漏，恳请读者指正。

“希望杯”全国数学邀请赛命题委员会主任

周国镇

2003 年 12 月 30 日

“希望杯”——捧起了希望，照耀着明天

马维民

离飞往德国只有短短的5天了，当一切准备妥当，只等动身的那一刻时，心情也由当初的激动、兴奋渐趋平静。任由思绪穿梭于对未来的憧憬和过去的回忆中……成长中不间断的挫折，伴随着点滴的荣耀，在我脑海中一幕一幕的闪过。让我不禁地想起了曾在我人生道路上数次给我希望，催我上进的铺路石——“希望杯”。

我是上初二时接触“希望杯”全国数学邀请赛的，那是一个很偶然的机会。一天自习课上，教几何的王禄合老师手里拿着一张《中国青年报》，兴冲冲地走进教室。从他激动而又寄予深切希望的热情话语中，我第一次知道了“希望杯”，并被她那“面向广大同学，激发每个同学的学习兴趣”的宗旨所感染。就这样，我参加了中学生涯中第一次竞赛——第二届“希望杯”全国数学邀请赛。

从赛场出来后，我没有再去想“希望杯”的事，更没有企盼着自己能够获奖，我又像往常一样平静地生活、学习……我从小生活在远离城市的一个普普通通的矿工家庭，父亲由于工伤不得不早早地离开工作岗位，退休在家。一直以来，矿上的子弟都是初中毕业后，进入矿务局技校，然后就回矿下井当工人。因此家里对我也没有寄予太高的期望，能考个中专，回来以后

不再下井就行了。而我当时最大的梦想，就是走出煤矿，投入日新月异的大都市，融入一个更广博的世界。没想到“希望杯”正帮助我悄然改变着我的思想和生活，给我一双腾飞的翅膀。

暑假的一个下午，我们正在补习英语课，王老师兴奋地走进教室，激动地对我们说：“现在向你们宣布一个好消息，我们班的马维民同学获得了‘希望杯’全国数学邀请赛的铜牌！我们矿上出了一个探花！”全班沸腾了，而我静静地坐在那里不知所措，这对我来说是太大的惊喜了，我一时承受不了……

就是这块小小的铜牌成了我人生的一个转折点。它使我尝到了学习的乐趣；给了我遨游知识殿堂的勇气和信心；激起了我少年时的豪情和梦想！它仿佛给我叩开了一扇门，一扇通往更高目标和迈向成功的大门。从此，我便顺风而上，又获得了“河北省煤炭厅数学英语竞赛”二等奖；中考时以邢台市并列第十三名的成绩考入省重点中点——邢台市一中；在高中阶段我的成绩始终在年级前十名之内，并先后获得“全国化学奥林匹克竞赛”河北赛区二等奖、“全国英语奥林匹克竞赛”河北赛区三等奖；高中毕业时，我被保送到北京航空航天大学，大二时入了党，曾担任系学生会主席，多次获得各种奖学金；1999 年又被保送上研究生。

这时的我，在我家乡所在的矿务局已经是“大名鼎鼎”了。面对自己骄人的成绩，再加上周围不断的称赞，我有些飘飘然了。就在这时，1999 年 7 月，“希望杯”全国数学邀请赛组委会邀请我到浙江绍兴参加第十届“希望杯”颁奖仪式，并请我作为往届获奖者代表之一发言。在这次会议上我终于见到了仰慕已久的周国镇老师，他以其博学谦虚而又平易近人的独特人格魅力感染着我。跟周老师的交谈中，我得知我在初二的时候所得到的那铜牌，并不是因为我在全国考生中有足够的实力，而

是因为我在我们地区比较优秀。这次会上我还见到了全国各地获得金牌、银牌的同学。和他们交谈时，他们那优秀的综合能力和朝气蓬勃的精神在让我为长江后浪推前浪喝彩时，也感受到无形的压力，更为自己的骄傲情绪无地自容。在戒骄戒躁中更上一层楼——"希望杯"又一次修正了我的人生观，鞭策着我不断前进。

在研究生阶段，我认真刻苦地学习基础知识，踏踏实实地做相关的课题。科研能力也得到了导师郇极(早年留学德国获博士学位)的赞许。就在我攻读博士一年后，他推荐我到德国Braunschweig工业大学公费留学。再过5天我就要启程前往，去迎接一轮新的挑战了。

临别这片这眷恋热爱的土地之前，我想对满溢着关怀和爱意的"希望杯"表达我最深的敬意。感谢她给平凡的我带来了希望，给迷茫的我指明了方向。衷心祝愿"希望杯"数学竞赛越办越好，给更多的孩子带来希望！

2003年11月26日

目　录

第一讲　不等式的性质

一、知识提要

1. 符号法则：

$$a-b>0\Leftrightarrow a>b;$$

$$a-b=0\Leftrightarrow a=b;$$

$$a-b<0\Leftrightarrow a<b.$$

从上可知，比较两个实数的大小，只要比较它们的差与 0 的大小关系即可.

2. 不等式的性质

(1)对称性：$a>b\Leftrightarrow b<a$;

(2)传递性：$a>b, b>c\Rightarrow a>c$;

(3)可加性：$a>b\Leftrightarrow a+c>b+c$;

(4)可乘性：$a>b, c>0\Rightarrow ac>bc$; $a>b, c<0\Rightarrow ac<bc$;

(5)加法法则：$a>b, c>d\Rightarrow a+c>b+d$;

(6)乘法法则：$a>b>0, c>d>0\Rightarrow ac>bd$;

(7)乘方法则：$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n$($n\in \mathbf{Z}$，且 $n>1$);

(8)开方法则：$a>b>0\Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$($n\in \mathbf{Z}$，且 $n>1$).

3. 若 $a>0, b>0$，且$\dfrac{a}{b}>1$，则 $a>b$;

若 $a>0, b>0$，且$\dfrac{a}{b}<1$，则 $a<b$;

若 $a<0, b<0$，且$\dfrac{a}{b}>1$，则 $a<b$;

若 $a<0, b<0$，且$\dfrac{a}{b}<1$，则 $a>b$.

二、例　　题

1. 作差法

例 1　设 $x=\arcsin(\cos 1)$，$y=\arccos(\sin 2)$，$z=\arctan(\cot 3)$，$u=\operatorname{arccot}(\tan 4)$，则 x、y、z、u 从小至大按顺序排列应为(　　).

(A) x、y、z、u　　　　(B) z、y、x、u

(C) x、y、u、z　　　　(D) u、x、z、y

第 12 届(2001 年)高二培训

解　因为　$0<1<\frac{\pi}{2}<2<3<\pi<4<\frac{3\pi}{2}$，

故 $x=\arcsin(\cos 1)=\arcsin\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\right]=\frac{\pi}{2}-1$，

$y=\arccos(\sin 2)=\arccos\left[\cos\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\right]=2-\frac{\pi}{2}$，

$z=\arctan(\cot 3)=\arctan\left[-\tan\left(3-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{\pi}{2}-3$，

$u=\operatorname{arccot}(\tan 4)=\operatorname{arccot}\left[\cot\left(\frac{3\pi}{2}-4\right)\right]=\frac{3\pi}{2}-4$.

作差，得　$x-y>0$，$y-z=2>0$，$u-x>0$.

所以　$x>y$，$u>x$，$y>z$.

故　$z<y<x<u$，选(B).

例 2　设 a，b，c 依次是方程 $\log_{\frac{1}{2}}x+2=x$，$\log_2(x+2)=\sqrt{-x}$，$2^x+x-2=0$ 的根，则 a，b，c 的大小关系是(　　).

(A) $b<c<a$　　　　(B) $a<c<b$

(C) $b<a<c$　　　　(D) $c<b<a$

第 5 届(1994 年)高二第 2 试

解　如图 1-1，函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 与 $y=x-2$ 的图像交点的坐标 $a>1$；

如图 1－2，函数 $y=\log_2(x+2)$ 与 $y=\sqrt{-x}$ 的图像交点的横坐标 $b<0$；

如图 1－3，函数 $y=2^x$ 与 $y=-x+2$ 的图像交点的横坐标 $0<c<1$.

显然　$b<c<a$，

故选(A).

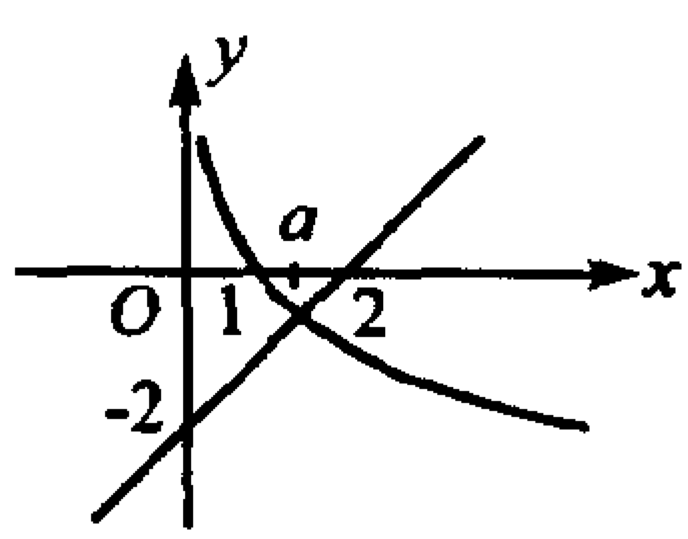

图 1－1

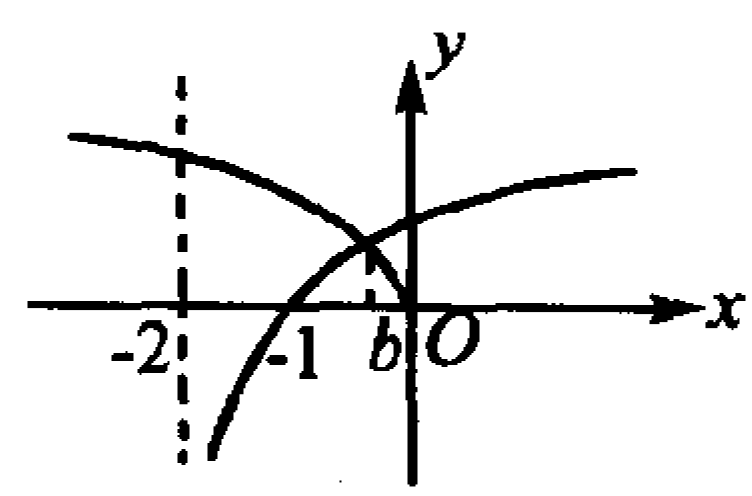

图 1－2

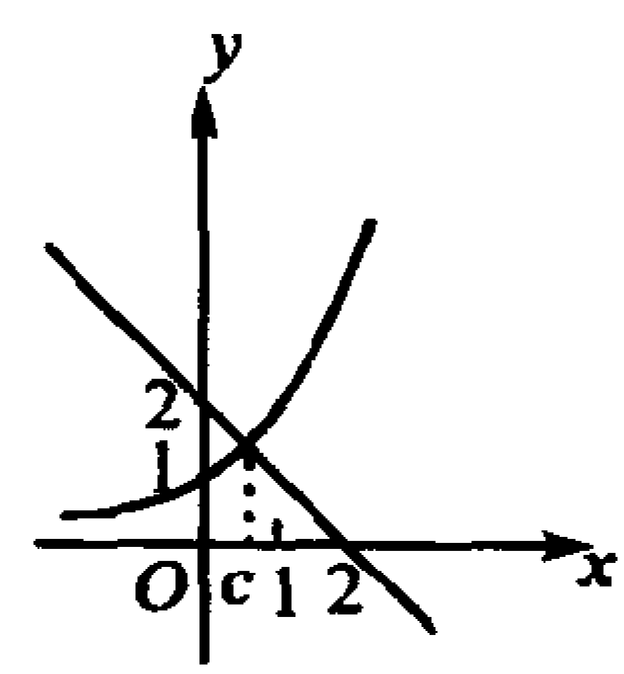

图 1－3

2. 作商法

例 3　设 $a>0$，$b>0$，且 $a\neq b$，$m=a^ab^b$，$n=a^bb^a$，则有(　　).

(A) $m>n$　　(B) $m=n$　　(C) $m<n$　　(D) $m\geqslant n$

解　由 $a>0$，$b>0$，得　$m>0$，且 $n>0$.

因为　$\dfrac{m}{n}=\dfrac{a^ab^b}{a^bb^a}=a^{a-b}\cdot b^{b-a}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b}$.

当 $a>b>0$ 时，$\dfrac{a}{b}>1$，$a-b>0$，则有

$$\frac{m}{n}=\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>1,$$

所以　$m>n$；

当 $b>a>0$ 时，$0<\dfrac{a}{b}<1$，$a-b<0$，则有

$$\frac{m}{n}=\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}>1,$$

所以 $m > n$.

综上,知 $m > n$,选(A).

3. 判别式法

例 4 已知 $0 \leqslant x \leqslant 1$, $a = \arcsin(\cos x)$, $b = \cos(\arcsin x)$,则( ).

(A)$a > b$ (B)$b > a$ (C)$a = b$

(D)当 $0 \leqslant x < \frac{\pi}{4}$ 时,取(A);当 $\frac{\pi}{4} < x \leqslant 1$ 时,取(B);当 $x = \frac{\pi}{4}$ 时,取(C).

第 11 届(2000 年)高二培训

解 由 $0 \leqslant x \leqslant 1$,知 $\frac{1}{2} < \cos 1 \leqslant \cos x \leqslant 1$,

$$0 \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

所以 $\frac{\pi}{6} < \arcsin(\cos x) \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant \cos(\arcsin x) \leqslant 1$.

猜想:$\arcsin(\cos x) > \cos(\arcsin x)$, (*)

即 $a > b$,得

$\cos x > \sin\sqrt{1-x^2}, \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) > \sin\sqrt{1-x^2}$,

所以 $\frac{\pi}{2} - x > \sqrt{1-x^2}$,

即 $2x^2 - \pi x + \frac{\pi}{4} - 1 > 0$.

又 $\Delta = 8 - \pi^2 < 0$,而此式显然成立,且步步可逆,

故选(A).

4. 不等式性质的应用

例 5 已知 $0 < a < b$, $x = \sqrt{a+b} - \sqrt{b}$, $y = \sqrt{b} - \sqrt{b-a}$,则 x, y 的大小关系是________.

第 11 届(2000 年)高二第 1 试

解　因为$x=\sqrt{a+b}-\sqrt{b}=\dfrac{a}{\sqrt{a+b}+\sqrt{b}}$,

$$y=\sqrt{b}-\sqrt{b-a}=\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{b-a}}.$$

由$0<a<b$,得$\sqrt{a+b}>\sqrt{b-a}>0$.

由不等式性质,得　$\sqrt{a+b}+\sqrt{b}>\sqrt{b-a}+\sqrt{b}>0$.

因此,$\dfrac{a}{\sqrt{a+b}+\sqrt{b}}<\dfrac{a}{\sqrt{b-a}+\sqrt{b}}$,即　$x<y$.

5. 利用函数单调性

例 6　已知 $x=\left(\sin\dfrac{1}{2}\right)^{\left(\log_{\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{2}\right)}$, $y=\left(\cos\dfrac{1}{2}\right)^{\left(\log_{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}\right)}$, $z=\left(\sin\dfrac{1}{2}\right)^{\left(\log_{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}\right)}$,则 x、y、z 的大小顺序为(　　).

(A)$x<z<y$　　　　(B)$x<y<z$

(C)$z<y<x$　　　　(D)$y<z<x$

第 12 届(2001 年)高二培训

解　因为　$\dfrac{\pi}{6}>\dfrac{1}{2}>0$,

所以　$0<\sin\dfrac{1}{2}<\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}<\cos\dfrac{1}{2}<1$,

所以　$\log_{\frac{1}{2}}\sin\dfrac{1}{2}>1>\log_{\frac{1}{2}}\cos\dfrac{1}{2}>0$,

即　$x<z<y$,选(A).

6. 求参数

例 7　设 $a>b>c$,$n\in N$,且$\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{b-c}\geqslant\dfrac{n}{a-c}$恒成立,则 n 的最大值为(　　).

(A)2　　(B)3　　(C)4　　(D)5

第 11 届(2000 年)高二第 1 试

解　原式$\Leftrightarrow\dfrac{a-c}{a-b}+\dfrac{a-c}{b-c}\geqslant n$.

所以 $n \leqslant \left[\frac{a-c}{a-b}+\frac{a-c}{b-c}\right]_{\min}$

而 $\frac{a-c}{a-b}+\frac{a-c}{b-c}=2+\frac{b-c}{a-b}+\frac{a-b}{b-c} \geqslant 4$,

且当 $2b=a+c$ 时,不等式左边的值等于 4.

所以 $\left[\frac{a-c}{a-b}+\frac{a-c}{b-c}\right]_{\min}=4$.

因此,n 的最大值是 4,选(C).

例 8 使不等式$\sqrt{3}+\sqrt{8}>1+\sqrt{a}$成立的正整数 a 的最大值是( ).

(A)13 (B)12

(C)11 (D)10

第 9 届(1998 年)高二第 1 试

解 将不等式两边平方,整理即得

$10+4\sqrt{6}>a+2\sqrt{a}$,

以 $a=13$、12 依次代入验算后,可知 12 合适,选(B).

三、习 题

1.设 $a=\arcsin\left(\sin\frac{1}{7}\right)$, $b=\arccos\left(-\frac{1}{7}\right)$, $c=\arcsin\left(-\frac{1}{7}\right)$,则 a, b, c 的大小关系是( ).

(A)$a>b>c$ (B)$b>a>c$

(C)$c>a>b$ (D)$b>c>a$

第 1 届(1990 年)高二第 1 试

2.设 α 是三角形的一个内角,且$(\lg 19+\lg 99)^{\sin 5\alpha}<1$,则实数 α 的取值范围是( ).

(A)$(0,5\pi)$ (B)$\left(\frac{\pi}{5},\frac{2\pi}{5}\right)$