教育部五十三年審定

高級中學

代數

（自然科組）

編著者　林致平

遵照　教育部五十一年七
月修正中學課程標準編著

xy=z

第二冊

正中書局印行

233

版權所有　翻印必究

中華民國五十三年十二月臺初版
中華民國五十八年十二月臺五版

新正中本教科書　高級中學代數（全四册）
自然科組　第二册　基本定價　九角三分
（外埠酌加運費匯費）

編著者　林致平
發行人　李潔
發行印刷　正中書局
（臺灣臺北市衡陽路二十號）
海外總經銷　集成圖書公司
（香港九龍亞皆老街一一一號）
海風書店
（日本東京都千代田區神田神保町一丁目五六番地）

內政部登記證　內版臺業字第〇六七八號(4702)裕

編 輯 大 意

一、本書遵照教育部民國五十一年七月修正公布之中學課程標準高中代數(自然科組)教材大綱編輯。適於以自然學科爲主之教學需要。

二、本書分編爲救一、二、三、四冊，供高中第二、三兩學年四個學期之用。

三、本書內容，凡部頒本科課程標準所訂綱目，均經列入。取材週到縝密，理論務求謹嚴，解說極爲詳晰，尤注意數學觀念之養成。

四、全書編述由淺入深，循序漸進，首對代數之基本法則，加以複習，俾收溫故知新之效；其屬初中代數所不述或述而未詳者，多增例題，藉使讀者對理論與應用，均能諳熟。

五、本書習題，數量豐富，均經審愼編擬，難易互見，具有觸類旁通，相互引證之效。讀者按步練習，對於原理、法則當能自然加深了解，運用自如。

六、本書編排，疏漏難免．尙望教學諸君，不吝賜教，俾臻完善，毋任感幸。

編 者 謹 誌

中華民國五十三年三月

第二册目錄

（自然科組）

第七章　二次方程式與二次函數

第八章　分式、分式方程式、部分分式

第九章 根式與虛數

第十章 等式級數、等比級數、調和級數

第十一章　不等式

第十二章　指數與對數

附　　錄

第　七　章

二次方程式與二次函數

7.1　一元二次方程式　僅含一未知數且其最高次項爲二次之整方程式稱爲一元二次方程式。含 x 之一元二次方程式皆可化簡成下列之標準形式：

$$ax^2+bx+c=0.$$

上式中 a、b、c 表實數且 a 須不爲 0。a、b、c 均不爲 0 者，稱爲完全一元二次方程式；b 爲 0 而 a、c 不爲 0 者，稱爲純一元二次方程式。例如　$x^2-3x+\frac{2}{3}=0$ 爲完全一元二次方程式；$3x^2-1=0$ 爲純一元二次方程式。

7.2　一元二次方程式之解法　解一元二次方程式之方法，有下述兩種：

(1)　分解因式法　先將已知之一元二次方程式化成標準形式 $ax^2+bx+c=0$，次應用前述之分解因式法分解一元二次式 ax^2+bx+c 成因式，然後令所得之兩個一次因式分別等於零，卽可求得方程式之二根。

例一　解方程式　$$4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=18-3x.$$

【解】　展開並化簡，$4x^2-9x-9=0$.

分解因式，　$(4x+3)(x-3)=0$.

令每一因式等於零，$4x+3=0$；$x-3=0$，

$$\therefore\quad x=-\frac{3}{4},\ 或\ 3.$$

例二　解　$$4m^2x^2-4m^2n^2+1=4mx.$$

【解】 移項並整理， $(2mx-1)^2-(2mn)^2=0$，

即 $$(2mx-1+2mn)(2mx-1-2mn)=0.$$

令每一因式等於零， $2mx-1+2mn=0$，$2mx-1-2mn=0$.

若 $m\neq 0$， 則 $x=\dfrac{1}{2m}-n$，或 $\dfrac{1}{2m}+n$.

(2) 公式解法 玆就一元二次方程式之標準形式

$$ax^2+bx+c=0$$

討論之。以 a 除上式，移 $\dfrac{c}{a}$ 至式之右邊；並將左邊配成完全平方：

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a},$$

即 $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

求兩邊之平方根， $$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$\therefore\quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

此爲一元二次方程式求解之公式。解任何一元二次方程式，均可將其所含係數 a、b、c 之值，代入此公式中求解。惟如已知之二次方程式易分解成因式，仍以用因式分解法較便。

例三 解 $3x^2+7x-10=0$.

【解】 將原式與一元二次方程式之標準形式比較，知 $a=3$，$b=7$，$c=-10$，將此諸值代入公式中，得

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{49-4\times 3(-10)}}{6}=\frac{-7\pm 13}{6},$$

$$\therefore\quad x=1，\text{或}-\frac{10}{3}.$$

【註】 另有所謂配方法，實即公式解法。

習題二十三

解下列之一元二次方程式：

1. $x^2-9x+20=0$.　　2. $x^2+2x-35=0$.

3. $x^2-2x-1=0$.　　4. $7x^2-5x+1=0$.

5. $x^2+\sqrt{5}\,x+3=0$.　　6. $x^2-3x-1+\sqrt{3}=0$.

7. $(x-2)^2(x-7)=(x+2)(x-3)(x-6)$.

8. $x^2-(6+i)x+8+2i=0$.　9. $(a^2-b^2)x^2+4abx-a^2+b^2=0$.

10. $x^2-6acx+a^2(9c^2-4b^2)=0$.　11. $(a+b)^2x^2-(a+b)cx-ac=0$.

12. $(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)+(x-a)(x-b)=0$.

13. 求三連續正整數，其各對乘積之和爲362。

14. 有二位數字之正數，二數字之積爲 48，若數字易位，則較原數減少 18。求此數。

15. 有三連續正整數，最大數立方與最小數立方之差爲中間一數之30倍加 2，求此三數。

16. 一直角三角形之周長爲30寸，一股長 5 寸，求其他二邊之長。

17. 有士兵一隊，其行軍之行列，側面較前列多 14 人；到達前線散開後，前列增828人；側面爲 5 人，求士兵人數。

18. 正方形各邊之長爲 2，今截去四角，使成一正八邊形。求八邊形各邊之長。

19. 一矩形花圃，周長400尺。花圃四面爲一等寬之走道。已知走道之面積爲 2100 平方尺，走道之寬爲花圃短邊之$\frac{1}{16}$，求花圃之大小及走道之寬度。

20. 酒精一滿桶，共30公升。先取出若干公升而以水補滿之，然後又取出其混合液，較前次取出者多 7 公升，再以水補滿之，於是桶中酒水各居其半。問最初取出酒精若干公升？

7.3 一元二次方程式之根　上節已講過一元二次方程式：

$ax^2+bx+c=0$　有二根，玆命之爲 r_1 與 r_2，並令

$$r_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad r_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

設 a、b、c 均爲有理數,觀察此二根,可得下列結論:

(1) 若 $b^2-4ac>0$,則 r_1 及 r_2 爲不相等之二實數;

(2) 若 $b^2-4ac=0$,則 r_1 及 r_2 爲相等之二實數;

(3) 若 $b^2-4ac<0$,則 r_1 及 r_2 爲不相等之二複數或二虛數。

又如 a、b、c 均爲有理數,可推知

若 $b^2-4ac>0$,且爲一完全平方數,則 r_1 及 r_2 爲不相等之二有理數。

以上所述之"b^2-4ac"一式,稱爲一元二次方程式之判别式,通常以 D 表示之。藉此判別方法,任何一元二次方程式之根之性質均可迅速決定,而不必解出方程式。

又就方程式 $ax^2+bx+c=0$ 而言,

若 $b=0$,則二根之數值相等;符號相反。

若 $c=0$,則二根中之一爲零。

若 $b=0$ 及 $c=0$,則二根均爲零。

例一 證明 x 爲任何實數均不適合方程式 $2x^2-6x+7=0$.

【解】 此處,$a=2$,$b=-6$,$c=7$, 其判別式

$$D=b^2-4ac=(-6)^2-4\times2\times7=-20<0.$$

由此知二根均爲虛根,故 x 爲任何實數值均不適合此方程式。

例二 試定 k 之值,使方程式 $kx^2-(2k-1)x+k-3=0$ 有:(1)不等實根;(2)相等實根;(3)不等之複數根;(4)一根爲0。

【解】 原方程式之判別式爲:

$$D=[-(2k-1)]^2-4k(k-3)=8k+1.$$

故 (1) 如 $8k+1>0$,即當 $k>-\frac{1}{8}$ 時,原方程式有不等實根。;

(2) 如 $8k+1=0$，卽當 $k=-\frac{1}{8}$ 時，原方程式有相等實根。

(3) 如 $8k+1<0$，卽當 $k<-\frac{1}{8}$ 時，原方程式有不等之複數根。

(4) 如 $k-3=0$，卽當 $k=3$ 時，原方程式有一根爲 0。

例三 設 a、b、c 均爲實數，求證

$$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$$

之根必爲實數；並求原方程式有等根之條件。

【解】 化簡原方程式，得

$$3x^2-2(a+b+c)x+(ab+bc+ca)=0.$$

由此得

$$\begin{aligned} D&=[-2(a+b+c)]^2-4\times3(ab+bc+ca)\\ &=4(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\\ &=2[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]>0 \end{aligned}$$

故原方程式之根必爲實數，又當

$a=b=c$ 時，$D=0$，原方程式有等根。

例四 設 p、q 均爲實數，若 $x^2+px+q=0$ 有等根，

則 $$\left(1-q+\frac{p^2}{2}\right)x^2+p(1+q)x+q(q-1)+\frac{p^2}{2}=0$$

亦有等根，試證之。

【證】 由假設，$x^2+px+q=0$ 有等根，得

$$p^2-4q=0,\ 卽\ p^2=4q.$$

方程式 $(1-q+\frac{p^2}{2})x^2+p(1+q)x+q(q-1)+\frac{p^2}{2}=0$

之判別式爲：

$$\begin{aligned} D&=p^2(1+q)^2-4(1-q+\frac{p^2}{2})\{q(q-1)+\frac{p^2}{2}\}\\ &=4q(1+q)^2-4(1-q+2q)\{q(q-1)+2q\} \end{aligned}$$

$$=4q(1+q)^2-4q(1+q)^2=0$$

故此方程式亦有等根。

7.4 一元二次方程式之根與係數之關係 一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 或 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ 之根已於上節中導得，共有兩個，分別爲

$$r_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad r^2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

顯見此二根之和 $\quad r_1+r_2=-\frac{b}{a},\qquad (1)$

而二根之積 $\quad r_1r_2=\frac{c}{a}.\qquad (2)$

此卽一元二次方程式之根與係數之關係，亦可述之如次：

(1) 一元二次方程式二根之和等於以方程式中 x^2 項之係數除 x 項係數所得商變號之值。

若 x^2 項之係數爲 1，則二根之和等於 x 項係數變號之值。

(2) 一元二次方程式二根之積，等於以方程式中 x^2 項之係數除常數項所得之商。

若 x^2 項之係數爲 1，則二根之積等於方程式之常數項。

7.5 已知一元二次方程式之根求作此方程式 令 r_1 及 r_2 爲一元二次方程式之二已知根，根據上節所述，

$$r_1+r_2=-\frac{b}{a},\quad r_1r_2=\frac{c}{a},$$

可將方程式 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ 寫成另一形式，

$$x^2-(r_1+r_2)x+r_1r_2=0.\qquad (1)$$

分解因式，得 $\quad (x-r_1)(x-r_2)=0.\qquad (2)$

因此，一元二次方程式之根如爲已知，則應用 (1) 式或 (2) 式，即可寫出該方程式。

例一　已知某一元二次方程式之二根爲 3 及 -2，求作此方程式。

【解】　由本節 (2) 式，得　$(x-3)(x+2)=0$．

故所求之方程式爲　$x^2-x-6=0$．

例二　求作二根爲 $2+\sqrt{3}$ 及 $2-\sqrt{3}$ 之一元二次方程式。

【解】　因　$r_1+r_2=4$，$r_1r_2=1$．

故由本節 (1) 式，得所求之方程式爲　$x^2-4x+1=0$．

7.6 根之對稱式及其應用　一元二次方程式之根的對稱式之值，可藉前節所述根與係數之關係導得，而無需解此方程式。茲舉例說明如下：

例　設 r_1 與 r_2 爲方程式 $x^2+px+q=0$ 之二根，求下列各式之值：(1) $r_1^2+r_2^2$，(2) $r_1^{-3}+r_2^{-3}$，(3) $r_1^2r_2-r_2^2r_1$．

【解】　由根與係數之關係，得　$r_1+r_2=-p$；　$r_1r_2=q$

故 (1)
$$r_1^2+r_2^2=(r_1+r_2)^2-2r_1r_2$$
$$=(-p)^2-2q=p^2-2q$$

(2)
$$r_1^{-3}+r_2^{-3}=\frac{1}{r_1^3}+\frac{1}{r_2^3}=\frac{r_1^3+r_2^3}{r_1^3r_2^3}$$
$$=\frac{(r_1+r_2)^3-3r_1r_2(r_1+r_2)}{r_1^3r_2^3}=\frac{-p^3+3pq}{q^3}$$

(3)
$$r_1^2r_2-r_2^2r_1=r_1r_2(r_1^2-r_2^2)=r_1r_2(r_1+r_2)(r_1-r_2)$$
$$=r_1r_2(r_1+r_2)\sqrt{(r_1+r_2)^2-4r_1r_2}$$
$$=\pm pq\sqrt{p^2-4q}.$$

7.7 已知一個一元二次方程式之根求作另一個一元二次方程式

遇此類問題,有時候可藉根與係數之關係,導得欲求之方程式,而無需解已知之方程式。茲舉例說明之:

例一 設 r_1 與 r_2 爲方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根,求作二根爲 $\frac{r_1}{r_2}$ 與 $\frac{r_2}{r_1}$ 之一元二次方程式。

【解】 由已知條件,得 $r_1+r_2=-\frac{b}{a}$; $r_1r_2=\frac{c}{a}$.

設 α 及 β 爲所求方程式之二根,則

$$\alpha+\beta=\frac{r_1}{r_2}+\frac{r_2}{r_1}=\frac{r_1^2+r_2^2}{r_1r_2}=\frac{(r_1+r_2)^2-2r_1r_2}{r_1r_2}$$

$$=\frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\left(\frac{c}{a}\right)}{\frac{c}{a}}=\frac{b^2-2ac}{ac}.$$

$$\alpha\beta=\frac{r_1}{r_2}\times\frac{r_2}{r_1}=1.$$

故所求之方程式爲 $x^2-\left(\frac{b^2-2ac}{ac}\right)x+1=0$,

即 $acx^2-(b^2-2ac)x+ac=0$

例二 求作一元二次方程式,使其根爲

$2x^2-3x+1=0$ 之根之 m 倍。

【解】 設 r_1, r_2 爲原方程式之二根,則

$$r_1+r_2=\frac{3}{2},\qquad r_1r_2=\frac{1}{2}.$$

因 $mr_1+mr_2=m(r_1+r_2)=\frac{3}{2}m$, $mr_1\times mr_2=m^2r_1r_2=\frac{1}{2}m^2$,

故所求之方程式爲 $x^2-\frac{3}{2}mx+\frac{1}{2}m^2=0$,

即 $$2x^2-3mx+m^2=0.$$

習題二十四

已知含x之一元二次方程式之二根如次，求各方程式：

1. $8, -2$.

2. $\dfrac{a+b}{a-b}$, 1.

3. $\dfrac{a}{2a-2b}$, $\dfrac{b}{2b-2a}$.

4. $5\sqrt{7}$, $-5\sqrt{7}$

5. $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\sqrt{11}$, $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\sqrt{11}$.

6. 設 $x^2-2x(1+3m)+7(3+2m)=0$ 之二根相等，求m之值。

7. 設 $\dfrac{x^2-bx}{ax-c}=\dfrac{m-1}{m+1}$之二根數值相等，符號相反，求$m$之值。

8. 試定p之值，令方程式 $4x^2-(p-1)x+(p-5)=0$ 有(1)二等根；(2)二同值而異號之根；(3)一根爲0；(4)二根之和爲1。

9. 設a、b、c俱爲實數，且 $2b=3a+2c$，試證方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根必爲實數。

10. 若 $x^2+px+q=0$ 之一根等於他一根之平方，試證 $p^3-q(3p-1)+q^2=0$。

11. 設 $a<c<b$，試證方程式 $(x-a)(x-b)+(x-c)^2=0$ 有不等實根。

12. 設方程式 $2x^2+(k+1)x+3k-1=0$ 之一根爲2，試定k之值，並解此方程式。

13. 設r_1及r_2爲 $ax^2+bx+c=0$ 之二根，試用a、b、c表下列各式：

(1) $\dfrac{1}{r_1^2}+\dfrac{1}{r_2^2}$;　(2) $r_1^2r_2^5+r_1^5r_2^2$;　(3) $\dfrac{r_1}{r_2}-\dfrac{r_2}{r_1}$;

(4) $(ar_1+b)^{-2}+(ar_2+b)^{-2}$.

14. 設 $x^2-3x+1=0$ 之二根爲α、β，試求下列三式之值：

(1) $\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3$;　(2) $\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4$:

(3)　$\left(\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}\right)-\left(\beta^2+\frac{1}{\beta^2}\right)$.

15. 設方程式 $x^2-px+q=0$ 之二根爲連續整數，試證 $p^2=4q+1$。

16. 若 $x^2+px+q=0$ 之二根爲 r_1 及 r_2，求作以 $(r_1-r_2)^2$ 及 $(r_1+r_2)^2$ 爲根之一元二次方程式。

17. 若 $ax^2+bx+c=0$ 之二根爲 r_1 及 r_2，求作以 $r_1^2+r_2^2$ 及 $\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}$ 爲根之一元二次方程式。

設 a、b、c 爲有理數，求證下列二方程式之根爲有理數：

18. $(a+c-b)x^2+2cx+(b+c-a)=0$.

19. $abc^2x^2+3a^2cx+b^2cx-6a^2-ab+2b^2=0$.

20. 問在何種條件下，$ax^2+bx+c=0$ 之一根爲另一根之 n 倍？

7.8 能由二次方程式求解之一元高次方程式　一元一次及二次方程式之一般解法已於 §4·3 及 §7·2 中述之。一元三次與四次方程式之一般解法以後將於高次方程式一章中講述。五次及五次以上之方程式，代數學上無一般解法，僅具有特殊形式者始可求解。以下各節將論述三次及三次以上之一元方程式可變化成一次及二次方程式以求解之特殊情形及其解法。

7.9 可分解因式之高次方程式　高次方程式之可分解成一次或二次之因式者，可分別令各因式等於零，用一次及二次方程式之解法解之。

例一　解 $x^4-5x^3+x^2+11x+4=0$.

【解】　分解因式，得 $(x+1)(x-4)(x^2-2x-1)=0$，

即　　$x+1=0$，$x-4=0$，或 $x^2-2x-1=0$.

分別解之，得　$x=-1, 4$，或 $1\pm\sqrt{2}$.