

Prometheus Translation Library

圆的历史

数学推理与物理宇宙

A History of the Circle
Mathematical Reasoning and the Physical Universe

[美] 泽布罗夫斯基/著
李大强/译



3-49

19



北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

圆的历史

数学推理与物理宇宙

A History of the Circle

Mathematical Reasoning and the Physical Universe



北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

版权专有 侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

圆的历史:数学推理与物理宇宙/(美)泽布罗夫斯基著;李国强译. —北京:北京理工大学出版社,2003.8

(盗火者译丛)

ISBN 7-5640-0148-8

I. 圆… II. ①泽…②李… III. 圆-普及读物 IV. 0123.3-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 035337 号

北京市版权局著作权合同登记号 图字:01-2002-4920 号

A History of the Circle

Copyright(c) 1999 Ernest Zebrowski, Jr.

Chinese translation published by Beijing Institute of Technology Press

Published by arrangement with Rutgers University Press

All rights reserved

出版发行/北京理工大学出版社

社址/北京市海淀区中关村南大街5号

邮编/100081

电话/(010)68914775(办公室) 68912824(发行部)

网址/http://www.bitpress.com.cn

电子邮箱/chiefedit@bitpress.com.cn

经销/全国各地新华书店

印刷/北京圣瑞伦印刷厂

开本/850毫米×1168毫米 1/32

印张/7.25

插页/2

字数/178千字

版次/2003年8月第1版 2003年8月第1次印刷

印数/1~6000册

定价/16.00元

责任校对/陈玉梅

责任印制/母长新

图书出现印装质量问题,本社负责调换

中译本序

我很荣幸地收到为本书作序的邀请。中国文化以谦恭好礼闻名于世，并因此在世界范围内受到尊敬。我把这个邀请视为中国人重视礼仪的例证。

我本人在美国文化的熏陶中长大，因此，本书不可避免地反映了美国文化的特征。然而，数学是无国界的，本书呈现的数学观念超越文化的界限。在历史上，相隔遥远的民族经常各自独立地发现（或发明）相似的数学观念。当西方人发现毕达哥拉斯定理时，大致在同一时期，中国人做出了同样的发现。中国古代的刘徽和祖冲之致力于计算圆周率，在长达1 000多年的时间里，中国人在世界范围内居领先地位，直到阿尔—卡西在15世纪打破这个记录。

然而，本书的目的不是讨论这些历史细节。

本书是一次探索。探索的对象不是数学的知识细节，而是关于数学之意义的历史。人类是如何把数学中的观念与物理宇宙中的实在联系起来的？这个问题我考虑了很多年，我希望读者通过本书分享我的沉思。另外，我想提出一个问题：在把数学应用于实在的过程中，是否存在着一个内在的极限？

我们在很小的时候就知道圆是什么，同时我们每个人都发现，我们不可能画出一个完美的圆。因此，我选择圆作为分析的标本。我相信，关于这个问题中国人的感觉与美国人别无二致。基于这个信念，我把本书奉献给中国读者。



泽布罗夫斯基

2003年5月1日

原版序

IV

本书名为“圆的历史”，却不是一部通常意义上的历史著作。本书旨在揭示一些关于自然现象的奥妙事实。这不是一本关于“圆”的数学专著。我之所以选择“圆”作为讨论的主题，是为了展示数学推理和物理世界之间的广泛而深刻的联系。数学知识，作为一种人类理智的极端抽象的创造成果，为什么能有效地应用于外在的物理世界？这是一个迷人的困惑。本书的目的就在于表达这个困惑。

本书不是为数学和科学方面的专家准备的。许多没有经过严格的数学和科学训练的读者希望对那些通过数学手段达到的科学真理有所了解，这些读者是我服务的对象。本书不要求读者具备高深的数学知识。虽然书中包括一些数学符号和公式，但这并不妨碍普通读者阅读——即使你略过这些符号和公式，我相信你依然可以理解书中的讨论。本书是写给人看的，不是写给人算的。

我相信每个人都曾有彻底融入大自然的经历。这种经历可能发生在各种场合：当你在旷野中远足的时候，当你在城市里赏雨的时候，等等。我本人的这类经历总是发生在我独处于海滨的时候。就是在这样一个场合，在凝视波涛的时候，我产生了写作本书的灵感。

在 20 多年的教学生涯中，我曾多次讲授波动理论，七八千名不同档次的学生听过我的课。这些学生总是对一件事感兴趣——我的跑题。我讲课经常扯到与恶浪、海啸、风暴有关的历史事件上去。有时候我确实对如此跑题感到不安，毕竟这些历史事件与物理和数学无关，但是在课堂上讲这些事真的很有趣。就在那一天，当我独处于海滨，双足浸没于水中时，我突然明白了一 X

个道理：每一个教师在课堂上讲授的其实都是历史，无论其课程的题目是什么，无一例外。我们向学生讲授的是我们在过去得到的知识，而我们希望学生把这些知识应用于未来，为了使过去的知识在未来依然有效，我们只能假设这个世界配合我们。在这方面，数学和科学与音乐和艺术别无二致。我们必须相信这个世界的历史连续性，否则教与学都是不可能的。

当我们试图预测自然事件时，数学方法显然比占星术和手相学优越，然而，数学不是科学。科学不可能发现绝对真理，因为我们不可能在整个时间历程中观察宇宙整体，我们所能观察到的仅仅是一个微小的片段。当有限的观察积累了几个世纪以后，现代科学试图针对这个精妙的宇宙得出一些宏大的结论。显然，科学的结论立足于似是而非的推论，这与数学推论的清晰和严谨不可同日而语。当然，数学和科学之间的紧密而深刻的联系也是毋庸置疑的。

让我们研究一下岸边的海浪：远处的海浪是一片混沌，当它们接近海岸时则呈现为一系列起伏的峰和谷，而海浪拍岸以后又重归混沌。所有这些现象可以用数学方程式描述——至少可以近似地描述。归根结底，这些方程式立足于关于圆的几何知识。在凝视海浪的时候，我们能看到这些圆的存在吗？当然可以，只要足够用“心”。

岸边的海浪，古埃及战车的轮子，辽远星河中群星的轨迹，蘑菇的外形，我们机体内的原子的结构，所有这一切在数学语言的描述下是相互关联的。这种关联是真实存在并且持续有效的吗？或者相反，仅仅是理论上的虚构？请你随本书同行，来得出你自己的结论。

感谢阿兰·斯哥特（Ian Scott）的艺术设计和保罗·克莱格（Paul Craig）的精妙建议。

目 录

中译本序/1

原版序/1

第一章 探索圆周率/1

恒定的圆周率/2

计算圆周率/5

无理数 π /10

π 的含义/12

第二章 滚筒、轮子和轴承/14

建造金字塔/17

从滚筒到滑轮/21

轮子、轮轴与轴承/22

第三章 星空中的时钟/25

星空中的圆/26

关于六和六十/27

日晷/30
月和历法/33
第四章 数学与物理世界/37
计数/41
测量/42
形式几何的兴起/44
不确定性的放大/47
第五章 探索地球/49
地球的尺寸/51
赤道和回归线/52
纬度/54
经度/55
时区/57
海里/59
北极圈和南极圈/60
捆绑地球/62
第六章 平面与空间/65
平面测量/66
面积缩放/69
测量空间/74
体积缩放/75
强度和重量/77
表面积与体积之比/79
第七章 天球/84
托勒密的本轮/86
科学与权威/89
通往日心说/90
开普勒定律/92
伽利略和他的望远镜/100

第八章 从圆锥曲线到引力/102

解析几何的兴起/104

其他坐标系统/105

圆锥曲线与光学/108

引力场中的运动/112

多体问题/117

第九章 振动/121

钟摆/123

简谐振荡/126

振荡与傅里叶级数/129

傅里叶级数与圆/132

摆线/134

欧拉方程/137

第十章 波/141

波动/142

波的傅里叶分析/146

平面波、圆形波与球面波/149

空间、时间与光/151

相对论与现实/157

物质波与不确定性原理/159

第十一章 人造结构与天然结构/163

刚性/166

几何与生物世界/169

原子简史/174

从亚原子结构到宇宙结构/177

第十二章 真实的宇宙与猜想的宇宙/181

物理实在/186

中微子的发现/187

关于实在的限制/191

神秘的数学应用/193

附录 A 常用面积公式/197

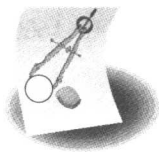
附录 B 常用体积公式/198

附录 C 圆锥曲线的方程/199

注释/200

索引/208

附表 本书常用英制单位与国际单位 (SI) 换算表/220



第一章 探索圆周率

本书讨论的对象在物理世界中并不存在。如果你试图在自然界或人造物中找到一个圆，你面对的是一个不可能的任务。汽车轮胎是圆吗？不，轮胎触地的那部分过于平了；硬币怎么样？不，在硬币的边缘上全是起伏的锯齿；面包圈？不，近点看，面包圈的“圆周”崎岖不平。满月也不是圆的，用望远镜可以发现，它的“圆周”上凹凸不平。

现在让我们用圆规在纸上画一个圆。这回我们总算找到一个真正的圆了吧？不。铅笔线条的宽度是不均匀的，诸如此类的原因使得我们得到的并非真正的圆。如果你不同意，可以用放大镜仔细观察你画的圆，你会发现它的边缘是不规则的。真正的圆仅仅是人类理智的虚构，利用计算机也画不出来。

不过这个结论听起来有点像哲学家的玄谈：正确而空洞。在物理世界中我们可以作出近似的圆，虽然不是真正的圆，其精度却足以满足具体的需求。从瓶盖到汽车传动轴，这些近似圆可以很好地满足我们的各种需求。既然如此，我们何必关心真正的圆是否存在呢？

这个问题正是本书反复讨论的主题之一。实际上，近似圆并不是总能满足我们的需求，用数学上的圆的理论描述这些近似圆²也不是毫无问题。一个近似圆需要多圆才算足够圆呢？这个问题不可能有简单的答案。在什么情况下我们可以把关于真正的圆的数学理论应用于物理世界中的近似圆呢？考虑这个问题需要过人的智力。当我们说“地球的运行轨道是圆形”时，我们是不是自

欺欺人？[开普勒（Johannes Kepler）反对这个说法，并在 1609 年作出了革命性的修正。]当建筑师设计半球形拱顶时，需要近似到什么程度？（在 9 世纪阿拉伯和欧洲的建筑师在宗教建筑中大量使用半球形拱顶，造就了建筑史上的一个黄金时代。）当我们试图理解大自然的奥妙时，什么样的近似圆可以看做一个圆？这可不是一个无关紧要的问题。

本书试图勾连起两个世界：一个是由近似圆构成的物理世界，另一个是由真正的圆支撑的数学世界。在两个世界的交汇处，我们可以感受到二者之间深刻而微妙的联系。在本书即将展开的探险历程中，我们将欣赏古代文明的奇观和现代工程学的成就；将检验建筑学和艺术上的基本原理；将讨论几何学和宇宙学中的基本问题；将仰望宇宙的恢宏设计；将探讨古代思想家的天才创想和现代大师的失误。一个近似圆需要多圆才算足够圆？这个主题将贯穿全书。

恒定的圆周率

“比率”是一个非常古老的概念，可以追溯到人类文明最古老的文献。假定一英亩牧场可以饲养两只羊，那么牧场面积和羊的数目的比率是 1 比 2（记为 $1:2$ 或 $1/2$ ）。这只是一个简单的定义。如果保持比率不变而增加牧场面积和羊的数目，250 英亩的牧场可以饲养多少只羊呢？答案是 500。如果一个古代牧羊人掌握了关于比率的知识，他就可以对经营作出准确的预测，这对于他是很有好处的。

随着城市文明在古埃及、苏美尔和美索不达米亚兴起，预测居民对供给品的需求变得非常重要。利用比率的知识可以预测市民对食物的需求和城市的税收状况。考古学家发现了大量的美索不达米亚碑文，这些碑文的内容大多是交易记录、货物清单和比率计算。

在自然界中，没有任何法则规定比率必须是固定的。事实上，大多数比率是不固定的。比方说，一艘船用 24 名船工可以达到每小时 15 英里的速度，那么用 48 名船工是否可以达到每小时 30 英里的速度？用 144 名船工是否可以达到每小时 90 英里的速度？

（如果这个类推可以行得通，古代人就可以通过增加人手达到超音速。）换一个例子，如果 1 000 块石头可以垒 20 米高的金字塔，那么 2 000 块石头是否可以垒 40 米高的金字塔？（在第六章你会发现，石头数增加一倍金字塔的高度只能增加 26%。）当然会计师和数学家可以随便引入一个固定的比率，但是自然律可不吃这一套。显然，在我们应用一个固定的比率进行预测之前，必须先检验一下这个比率是否与实际情况相符。

对于古代人来说，轮子及其前身（滚筒、滑轮等）是重要的发明。由于轮子的普遍应用，人们很容易想到一个问题：把一个轮子在平面上滚一整圈，可以滚多远？显然，轮子越大，滚得越远，但是滚的距离与轮子的直径之间的比率是不是恒定的？这个比率是像牧场面积与羊的数目之比一样固定呢，还是像船工人数与船速之比一样不定？

显然，最早的解决方案是测量。设想一个古代的轮子，当然这个轮子不可能很标准，而且路面也不会非常平。让轮子在路面上滚一整圈，测量一下滚动的距离和直径，可以发现比值略大于 3（图 1.1）。这个过程不需要复杂的测量仪器，一根绳子就足够了。用绳子量一下轮子的直径（可以打个结做标记），然后再用绳子去量滚动的距离，可以得到一个粗略的结果：

$$\frac{\text{滚动的距离}}{\text{直径}} = 3 (\text{近似值})$$

只做一次试验不能说明问题。用不同尺寸的轮子做几十次试验之后，我们发现这是一个稳定的结论。最终，当许多人各自独立地测量之后，所有证据累积起来证明：滚动的距离与直径之比率是一个略大于 3 的固定值，这个值与轮子的大小无关。当然

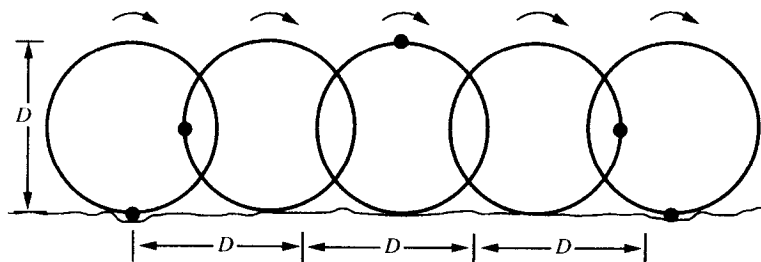


图 1.1 轮子的直径为 D 。滚动一整圈，滚动的距离略大于三倍直径

我们可以换一个测量方法：把轮子平放在地上，用绳子在轮子上绕一圈，同样可以得到周长与直径的比率，答案是一样的。^[1]

以上检验粗略地证明了圆周率是一个常量，在此基础上我们可以考虑更精确的检验：在沙地上画一个大轮子（或在大理石上用炭画一个），根据这个虚拟的轮子测量圆周率。在公元前2000年左右，巴比伦人用这种方法测得圆周率为 $3\frac{1}{8}$ ，换算成小数为

3.125。古埃及人的结论略微不同： $3\frac{1}{7}$ 约等于 3.143。（根据文献

记载，有一段时间古埃及官方认定的圆周率比这个值略大。）对于古代人来说这些值中的任何一个都已经足够精确了，因为圆周率主要应用于轮子，而古代的轮子并不是很圆。

- 5 发现圆周率为常量是一个了不起的成就。假定有一个直径 2 库比特（cubit，亦作腕尺^①）的轮子，滚动 1 000 圈，我们可以预测出滚动的距离： $2 \times 3\frac{1}{7} \times 1\,000 \approx 6\,286$ 腕尺。如果轮子的直径增加一倍，滚出的距离也增加一倍；相反，如果直径减小一半，滚出的距离也减小一半，等等。

① 古代计量单位，相当于从中指指尖到肘的前臂长度。——译者注

计算圆周率

公元1000年左右，阿拉伯数学家开始采用十进制计数法，在此后的几个世纪中这种计数法传到西方。^①1557年等号出现，1700年代 π 成为表示圆周率的标准符号：

$$\pi = \text{周长/直径}$$

据史料记载，许多伟大的思想家曾致力于发现 π 的精确值。表 1.1^[2] 记录了一些主要的历史成就^②。目前，人类对圆周率的计算已达到小数点以后 10 亿位，而且根据现代计算机的能力我们很容易获得更高的精度。不过，无论我们已经达到了 π 的多少位数字，我们永远不可能达到最后一位。 π 是个无限不循环小数。现在看来，推进 π 的位数是件轻易的工作，却没有什么实际用处，除了检验计算机的运算能力以外。

显然，利用测量的办法无法达到表 1.1 所示 π 的精度。利用测量的方法计算圆周率，圆周率的精度取决于测量精度。假定我们的测量技术可以精确到 1 毫米（对于古代人来说这是了不起的成就），而我们希望圆周率精确到小数点以后第三位（即 3.142），为了达到这个精度，我们需要画一个多大的圆呢？这个圆的直径需要达到 10 米！^[3] 如果我们想达到更高的精度，就需要更大的圆。此时有许多实际困难限制我们的测量工作：用来画圆的平面是否足够平，测量工具本身是否规则，我们画的圆是否足够圆，等等。

叙拉古的阿基米德深知用测量法计算圆周率的局限性，发明 6 了更精致的计算方法。他发现，当正多边形的边数增加时，这个

① 原著此处有误。十进制的发明权已不可考，但印度人使用十进制的历史比阿拉伯人早几千年。此外，十进制是否经过阿拉伯传到西方也是一个在科学史上有争议的问题。——译者注

② 表中第二位数学家“后汉书”，其实是书名而非人名，原文如此。

——译者注

正多边形的形状越来越接近圆（如图 1.2）。根据这个思路，圆相当于一个由许多条极短的边构成的正多边形——这个想法提供了计算圆周率的新途径。

表 1.1 计算圆周率的历史进程

数学家	年代	圆周率的值
阿基米德（叙拉古）	公元前 250 年	$3.140\ 8 < \pi < 3.142\ 9$ $\pi \approx 211\ 875/67\ 441 \approx 3.141\ 63$
后汉书（中国）	约 130 年	3.162 2
托勒密（亚历山大里亚）	约 150 年	$377/120 \approx 3.141\ 67$
刘徽（中国）	264 年	$3.141\ 024 < \pi < 3.142\ 704$ 3.141 59
祖冲之（中国）	约 400 年	$3.141\ 592\ 6 < \pi < 3.141\ 592\ 7$
阿里亚哈塔（印度）	499 年	$62\ 832/20\ 000 = 3.141\ 6$
斐波纳契（意大利）	1202 年	$864/275 \approx 3.141\ 818$
阿尔-喀什（印度）	约 1436 年	3.141 592 653 589 79
维耶特（法国）	1593 年	3.141 592 653 6
冯·瑟伦（荷兰）	1596 年	小数点后第 32 位
德·拉格尼（法国）	1717 年	小数点后第 127 位
维加（西班牙）	1794 年	小数点后第 140 位
德斯（德国）	1844 年	小数点后第 200 位
里奇特（德国）	1855 年	小数点后第 500 位
弗格森（英国）	1947 年	小数点后第 808 位
山克斯、兰奇（美国）	1961 年	小数点后第 100 265 位
当代计算机	1998 年	超过 500 亿位

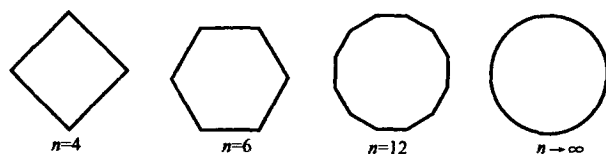
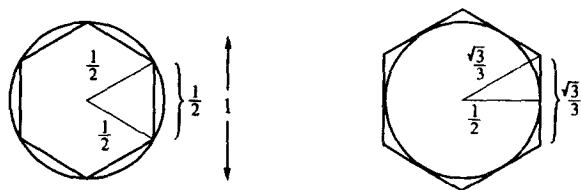


图 1.2 随着边数增加，正多边形趋近于圆

相对而言，正多边形的边长容易计算，这是阿基米德方法的优越之处。然而，计算过程是相当冗长繁琐的。阿基米德既没有计算器，也没有十进制计数法，条件相当有限。如果正多边形的边非常多，比方说达到百万或千的数量级时，实际计算能力的限制已使得阿基米德无法完成计算；相反，如果正多边形的边很少，比方说仅仅是正四边形或正六边形，计算的误差又太大了。阿基米德面临一个具体的选择：正多边形有多少条边才合适？这就是前文提到的问题：一个近似圆需要有多圆才算足够圆？他的结论是：正九十六边形就足够了。事实上，如果你做一个正九十六边形的轮子在街上滚一滚，你会发现这个轮子确实相当平滑。

利用这个办法，阿基米德算出了 π 的近似值 3.141 6。此外，他还确定了 π 的精确值的上界和下界。为了求得上界和下界，他计算了两个正九十六边形的周长：其中一个正九十六边形恰好被包围在圆内（“内接于圆”），另一个正九十六边形恰好把圆包围在内（“外切于圆”）。图 1.3 表示阿基米德的计算原理，为简单起见图中采用了正六边形。^①利用正九十六边形，阿基米德的结论是圆周率的精确值在 3.142 9 和 3.140 8 之间。



正六边形的边长等于圆的半径，

$$\text{即 } \frac{1}{2}, \text{ 周长为 } 6\left(\frac{1}{2}\right) = 3$$

正六边形的边长为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

$$\text{周长为 } 6\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 3.46$$

图 1.3 阿基米德计算圆周率上界和下界的方法。内接正六边形和外切正六边形显示 $3 < \pi < 3.46$ ，利用正九十六边形得到 $3.1408 < \pi < 3.1429$

① 原著图中公式有印刷错误。——译者注