九章丛书

线性代数辅导

主编　苏志平

编写　九章系列课题组

- 内容框架
- 知识要点
- 基本要求和学习方法
- 例题详解、自测题及答案

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots a_{1n}x_n=b_1$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots a_{2n}x_n=b_2$$

$$\cdots\cdots$$

$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots a_{mn}x_n=b_m$$

中国建材工业出版社

线性代数辅导

主编　　苏志平
编写　　九章系列课题组

中国建材工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数辅导/苏志平主编. - 北京:中国建材工业出版社,2004.2

ISBN 7-80159-591-2

Ⅰ.线… Ⅱ.苏… Ⅲ.线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 010699 号

【内容简介】本书按照线性代数学科的要求分为:内容框架、知识要点、基本要求学习方法、例题详解、自测题及答案五个部分。

本书适合于在校大学生及考研同学作为参考书,也可供自学者和科技工作者使用。

线性代数辅导

主编 苏志平

出版发行: 中国建材工业出版社
地　　址: 北京市西城区车公庄大街 6 号院 3 号楼
邮　　编: 100044
经　　销: 全国各地新华书店
印　　刷: 北京理工大学印刷厂
开　　本: 850mm×1168mm 1/32
印　　张: 10
字　　数: 320 千字
版　　本: 2004 年 2 月第 1 版
印　　次: 2004 年 2 月第 1 次印刷
印　　数: 1~6000 册
书　　号: ISBN 7-80159-591-2/G·107
定　　价: 11.00 元

前 言

《线性代数》是大学教学课程的重要组成部分，是理工科学生学习其他课程的基础和工具，也是研究生入学考试的一门必考科目，为了帮助在校大学生以及考研同学掌握线性代数的知识精华和解题技巧，提高应试能力，我们根据国家教委审定的高等院校“高等数学”课程教学大纲，融学习指导和考研辅导为一体编写了此书。

本书共分为五个版块：

一、内容框架——目的是使学生对每章节形成一个由全面到细节的整体知识网络。能够提纲挈领地掌握和运用本章知识。

二、知识要点——使学生明确本章的重点、难点，对其知识进行了高度的归纳总结。

三、基本要求和学习方法——是解决本章问题的关键和精髓，给出了解题的方法和技巧。这样您可以举一反三，触类旁通。

四、例题详解、自测题及答案——本书着重对例题进行了详细分析，在例题及部分自测题中加了“思路点拨”，以便于学者能更好的理解和掌握。

由于编者水平有限及编写时间仓促，不妥之处在所难免，希望广大读者不吝批评，指正。

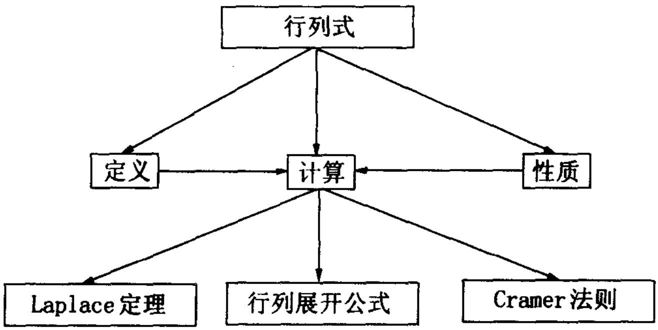
编者

2004 年 2 月

目　　录

第一章 行列式

内容框架



知识要点

1.(全)排列和逆序数

(1)(全)排列

由 n 个不同的元素排成一列,叫做这 n 个元素的全排列(简称排列)。n 个不同元素的所有排列的种类 $P_n = n!$。

(2)逆序和逆序数

在 n 个元素的任一排列$(i_1,i_2,\cdots,i_t,\cdots,i_s,\cdots,i_n)$中,若某两个元素的先后次序与标准次序不同,如若 $i_t>i_s$,则称这两个数组成一个逆序。

一个排列中所有逆序的总数称为此排列的逆序数,记作 $\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)$。若 τ 为奇数,则称$(i_1,i_2,\cdots,i_n)$为奇排列;若 τ 为偶数,则称此排列为偶排列。

(3)对换

排列$(i_1,i_2,\cdots,i_t,\cdots,i_s,\cdots i_n)$中,交换任意两数 i_t 和 i_s 的位置,称为

一次对换。对换改变排列的奇偶性。

任意一个 n 元排列$(i_1,i_2,\cdots,i_n)$经过若干次对换可变为$(1,2,\cdots,n)$样的标准排列,且所作的对换次数与排列$(i_1,i_2,\cdots,i_n)$有相同的奇偶性。即奇排列调成标准排列的对换次数为奇数,偶排列调成标准排列的对换次数为偶数。

2. 行列式的定义

(1)n 阶行列式的归纳定义

对由 n^2 个数组成的 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

当 $n=1$ 时,$|a_{11}|=a_{11}$

当 $n\geqslant 2$ 时,

$$D=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{(1+j)}a_{1j}M_{1j}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}$$

其中 $M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 为a_{1j} 的余子式,

$A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$ 为a_{1j} 的代数余子式。

(2)n 阶行列式的“排列逆序”定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和,故 n 级行列式等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和,每一项的符号取决于组成该项的 n 个元素的列下标排列的逆序数(行下标按自然顺序排列),即当

$j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时取正号,当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇数排列时取负号。

应该指出的是,行列式采用上述两种方式的定义是等价的。通常如果用“排列逆序”定义行列式,则归纳定义就成为行列式按一行展开的性质。

3. **行列式的性质**

(1)行列式与它的转置行列式相等,即 $D = D^{T}$。

(2)互换两行(列)后的行列式是原行列式的相反数。

(3)行列式某一行(列)的各元素都乘以同一数 k,等于 k 乘此行列式。

推论 行列式某一行(列)各元素的公因子可以提到行列式符号的外面。

(4)两行(列)元素对应成比例的行列式为零。

推论 两行(列)元素完全相同的行列式为零。

(5)若行列式某一行(列)的各元素都是两数之和,则该行列式等于两个行列式之和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论 把行列式某一行(列)的各元素都乘以同一数,然后加到另一行(列)对应的元素上去,行列式的值不变。

(6)行列式按行(列)展开定理:行列式等于其任一行(列)的各元素与其代数余子式乘积之和。

推论 行列式中某行(列)的各元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和为零。

(7)拉普拉斯展开定理:行列式等于其中任意 k 行(列)的所有 k 阶子式与其代数余子式乘积之和(显见(6)是(7)的特例)。

4. 行列式按行(列)展开

(1)展开法则　行列式按任一行(列)展开

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

或 $D_n = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}(i,j = 1,2,\cdots n)$

其中，A_{ij}是a_{ij}的代数余子式。

(2)推论

行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零。即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j)$$

$$\text{或} \quad a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0 \quad (i \neq j)$$

(3)代数余子式的性质

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D & \text{当 } i = j \\ 0 & \text{当 } i \neq j \end{cases}$$

$$\text{或} \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D & \text{当 } i = j \\ 0 & \text{当 } i \neq j \end{cases}$$

其中，$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{当 } i = j \\ 0 & \text{当 } i \neq j \end{cases}$

(4)拉普拉斯定理　行列式按某 k 行(列)　($1 < k \leqslant n-1$)展开

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = N_1A_1 + N_2A_2 + \cdots + N_tA_t$$

其中 $t = C_n^k$，而 $N_i(i = 1,2,\cdots,t)$为取定的某 k 行(列)所得到的 k 阶子式；A_i 为N_i 的对应代数余子式。

5. 重要公式

(1)上(下)三角行列式及对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

(2)范德蒙行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \geqslant j > i \geqslant n} (x_i - x_j)$$

(3)克莱姆法则

n 元 n 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

当行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

时有惟一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, X_n = \frac{D_n}{D}$$

其中

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

基本要求及学习方法

1. 理解并熟记 n 阶行列式的概念，了解一些特殊行列式的值，如对角行列式、三角行列式等。

2. 熟练掌握运用行列式的性质将各类行列式化成特殊行列式的方法，以及行列式按行(列)展开的方法来计算行列式。

行列式的定义表达式是一个复杂的计算式，n 阶行列式共有 $n!$ 项求和，而每项又由 n 个不同元素的乘积构成，直接利用定义计算行列式是很困难的。通常有两种途径可简化行列式的计算。

(1)反复利用行列式的性质将任意行列式化成特殊的行列式，如三角行列式或对角行列式，而这些特殊行列式的值很容易计算。这种方法主要用到行列式的三条性质：行(列)交换，行(列)倍乘，行(列)倍加。行列式计算的这三条性质一定要熟练掌握。

(2)利用行列式按行(列)展开定理将 n 阶行列式化成低一阶的行列式来计算。显然低阶行列式比高阶行列式更容易计算。如果在用展开定理之前，能利用行列式的三条性质(交换、倍乘、倍加)首先将行列式的某行(列)的大多数元素化成零(最好只剩下一个非零元素)，则使用展开定理计算行列式将更加简便。

3. 理解并熟记重要结论。

(1)了解范德蒙行列式及其结果。

范德蒙行列式是一类很特殊的行列式，其结果今后可不加证明地直接运用(除非要求证明此结果)。从结构来看，n 阶范德蒙行列式的第 j 列从上到下依次为变元 x_j 的零次幂、一次幂、……$n-1$ 次幂 $(j=1,2,\cdots,n)$。第 i 行各元素则是变元 $x_1,x_2,\cdots x_n$ 的 $i-1$ 次幂$(i=1,2,\cdots,n)$。从行列式结果看，范德蒙行列式中总共有 n 个变元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，它是关于这些变元的 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 次齐次函数，而此齐次函数可分解成 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 个形如 (x_i-x_j) 的因子的乘积，其中 $1\leqslant j<i\leqslant n$，即足标大的变元与足标小的变元

之差。另一方面可看到，n 个变元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 之间形如 (x_i-x_j)，$(1\leqslant j<i\leqslant n)$ 的所有不同因子共 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 个。于是，n 阶范德蒙行列式等于所有足标大的变元与足标小的变元之差作为其乘积因子的 n 元函数。

(2)掌握用行列式为工具求解线性方程组的克莱姆法则。理解该法则在实用上的不便与理论上的重要价值。

克莱姆法则给出了 n 元 n 个方程的线性方程组有惟一解的判定条件，并且在此条件下给出了方程组惟一解的具体表达式。首先应注意到，解的表达式要计算 $n+1$ 个 n 阶行列式 $D,D_1,D_2,\cdots,D_n$。当 n 比较大时，这些行列式的计算都比较困难。因此，当方程组的变量较多时(n 超过 3)，一般不适宜用克莱姆法则求解线性方程组。本书第三、四章将介绍求解线性方程组的一般方法。

克莱姆法则给出了 n 元 n 个方程的线性方程组惟一解或有非零解与只有零解(齐次)的判定条件，这些判定条件是本书第三、四章讨论一般线性方程组理论的基础，可以说是一般线性方程组求解的基础。读者在学习过程中千万不能因为该法则对求解线性方程组不方便而忽略了该法则的价值，而应意识到该法则对于建立方程组的一般理论是必不可少的。

例题详解

1. 计算排列的逆序数

例 1　如果排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 的逆序数为 I，问排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_1$ 的逆序数为多少？

【思路点拨】　排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 中 x_n 前比它本身大的数设为 a_1，则比它本身小的数就是 $n-1-a_1$，所以在排列 $x_nx_1\cdots x_{n-1}$ 后 $n-1$ 个数字中比 x_n 小的数的逆序数都要增加 1，比 x_n 大的数的逆序数都要减小 1，于是排列 $x_nx_1\cdots x_{n-1}$ 的逆序数应为 $I+(n-1-a_1)-a_1$，同理，设排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 中 x_{n-1} 前比它本身大的数设为 a_2，则排列 $x_nx_{n-1}x_1\cdots x_{n-2}$ 的逆序数应比排列 $x_nx_1\cdots x_{n-1}$ 的逆序数多 $(n-2-a_2)-a_2$，故排列 $x_nx_{n-1}x_1\cdots x_{n-2}$ 的逆序数为 $I+(n-1-a_1)-a_1+(n-2-a_2)-a_2$，依此类推，$x_nx_{n-1}\cdots x_1$ 的逆序数为 $I+(n-1-a_1)-a_1+(n-2-a_2)-a_2+\cdots+1-a_n-a_n$，又知 $a_1+a_2+\cdots+a_n=I$，可求解此题。

解　$x_nx_{n-1}\cdots x_1$ 的逆序数为

$$I+(n-1-a_1)-a_1+(n-2-a_2)-a_2+\cdots+1-a_n-a_n$$

$$=\frac{n(n-1)}{2}-I$$

例 2　(1)　在 6 阶行列式中，项 $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$应带什么符号？

(2)　写出 4 阶行列式中，带负号且包含因子 a_{23}和 a_{31}的项。

解　(1)　适当调整该项元素位置，使 6 个元素的行下标(即第一个下标)按自然顺序排列，则列下标排列为 431265，其逆序数 $\tau(431265)=6$，故取正号。

(2)　由行列式的定义可知，包含因子 a_{23} 和 a_{31} 的项必为 $a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$ 和 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$，其列下标排列的逆序数分别为 $\tau(2314)=2$ 和 $\tau(4312)=5$。已知所求项带负号，故取列下标为奇排列的 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$

例 3　已知 $f(x)=\begin{vmatrix}5x & 1 & 2 & 3\\ x & x & 1 & 2\\ 1 & 2 & x & 3\\ x & 1 & 2 & 2x\end{vmatrix}$，试求 $f(x)$ 中 x^3,x^4 的系数。

解　因为行列式各项是既不同行又不同列的 4 个元素之积并按符号法则冠以"+"或"-"号，所以

含 x^3 的项只能有

$$(-1)^{\tau(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}=-1\cdot x\cdot x\cdot 2x=-2x^3$$

及　$$(-1)^{\tau(4231)}a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}=-3\cdot x\cdot x\cdot x=-3x^3$$

于是 $f(x)$ 中含 x^3 的项为 $-2x^3-3x^3=-5x^3$，故 x^3 的系数为 -5

含 x^4 的项只能是

$$(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=5x\cdot x\cdot x\cdot 2x=10x^4$$

故 x^4 的系数为 10

2. 用行列式的定义直接计算

例 4　计算行列式：

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & 0 & 0\\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0\\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0\\ 0 & 0 & 0 & a_{44}\end{vmatrix}$$

【思路分析】　按行列式定义，每一项都是取自不行不同列的 4 个元素

的乘积,共有 4! 项,但此行列式中有很多零元素,因此有的项为零,故只需找出不含零元素的项。不妨设各个字母表示的都是非零元素。于是在第 1 行中只有两个非零元素 a_{11} 和 a_{12}。当第 1 行取 a_{11} 时,第 2 行只能取 a_{23}(a_{21} 与 a_{11} 同列,故不能取),第 3 行只能取 a_{32},第 4 行只有 a_{44},即 $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 是其中的一项。另外,当第 1 行取 a_{12} 时,第 2 行可以取 a_{21} 或 a_{23},但当第 2 行取 a_{23},第 3 行只能取零元素,故第 2 行只可以取 a_{21},第 3 行取 a_{33},第 4 行取 a_{44},即另一非零项为 $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$。

解 $D = (-1)^{\tau(1324)}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} + (-1)^{\tau(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$

$= -a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$

例 5 已知四阶行列式

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 3 & 1 & 8 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

求 $A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}$ 的值,其中 A_{ij} 为行列式 D_4 中元素 a_{ij} 的代数余子式。

解 直接计算 $A_{14},A_{24},A_{34},A_{44}$ 的值,然后加起来即得所求的结果,但这个方法的计算较繁且易出错,因此是不可取的,由于

$$A_{14} + A_{24} + A_{34} + A_{44} = 1\cdot A_{14} + 1\cdot A_{24} + 1\cdot A_{34} + 1\cdot A_{44}$$

它是行列式 D_4 中第 2 列元素与第 4 列对应元素代数余子式的乘积之和,故由行列式按一列展开定理知

$$A_{14} + A_{24} + A_{34} + A_{44} = 0$$

例 6 证明:

上、下三角形式行列等于主对角线(从左上角到右下角这条对角线)上的元素的乘积。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

证明: 先考察上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

根据行列式的定义,展开项的一般形式为

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

在行列式中第 n 行的元素除去 a_{nn} 以外全为零,因此,只要考虑 $j_n = n$ 的那些项。在第 $n-1$ 行中,除去 $a_{n-1,n-1}, a_{n-1,n}$ 外,其余的项全为零,因此 j_{n-1} 只有 $n-1, n$ 这两个可能。由于 $j_n = n$,所以 j_{n-1} 就不能等于 n 了,从而 $j_{n-1} = n-1$。这样逐步推上去,不难看出,除去

$$a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

这一项外,其余的项全是零。而这一项的列下标所成的排列是一个偶排列,所以这一项带正号,于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

对下三角形行列式,完全类似地有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

例 7 对角行列式也等于主对角线上的元素的乘积,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

证明: 作为上题的特殊情形,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

例 8

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$$

证明:先考察行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

根据行列式的定义,项的一般形式为

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

注意到行列式的第 1 行除 a_{1n} 外全为零,第 2 行除 $a_{2,n-1}$ 和 a_{2n} 外全为零,……,除去

$$a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$$

这一项外,其余的项全是零,而这一项的列下标所成的排列的逆序数为

$$\tau(n, n-1, \cdots 2, 1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

于是

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$$

完全类似地可得