新教材

XINJIAOCAI WANQUANJIEDU

完全解读

配人教版·第一次修订

与最新教材完全同步

重点难点详尽解读

高二数学「上」

主　　编：徐新斌　张克修

分册主编：彭家麒　侯修国

吉林人民出版社

新教材

XINJIAOCAI WANQUANJIEDU

完全解读

配人教版·第一次修订

高二数学「上」

主　　编：徐新斌　张克修

分册主编：彭家麒　侯修国

编　　者：王　亚　王兰秀　王国涛　代丽萍　左剑平
向　艳　朱伟强　朱光辉　朱志峰　齐如意
张红兵　张新平　李元明　李国宝　杨　田
陈长伟　周红日　胡和生　殷立新　黄　鹏
黄六生　彭西骏　彭修和　韩松桥　褚卫斌
黎　融　黎绍成

修　　订：高向东　刘亚会　金玉莲

吉林人民出版社

(吉)新登字 01 号

新教材完全解读·高二数学·上(人教版)

吉林人民出版社出版发行(中国·长春人民大街 4646 号 邮政编码:130021)
网址:www.jlpph.com 电话:0431－5678541

主　　编 徐新斌 张克修　　分册主编 彭家麒 侯修国
责任编辑 张长平 王胜利　　封面设计 魏 晋
责任校对 白艳艳　　版式设计 邢 程

印刷:北京市人民文学印刷厂
开本:880×1230 1/32
印张:14.125 字数:513 千字
标准书号:ISBN 7-206-02483-1/G·1447
2003 年 6 月第 1 版 2004 年 4 月第 1 次修订 2004 年 5 月第 1 次印刷
印数:1－15000 册 定价:17.80 元

出版说明

《新教材完全解读》系列丛书是一套与现行新教材同步的讲解类辅导书。自2003年出版以来，凭借其“导教、导学、导练、导考”的独特学习体系，得到广大读者的认可。2004年我们在原书的基础上，从内容的精、细、新、全等方面下了一些功夫，并做了重大改进和调整，届时它将以崭新、完美的面貌呈现于读者。

为什么要修订《新教材完全解读》系列丛书？

《新教材完全解读》系列丛书作为讲解类图书，它的特点鲜明，但现在教材改革不断推进，教学观念不断更新，原先较为超前的体例在新问题面前，就出现了许多不完善之处，要打造一个品牌书，我们就要精益求精，基于这一点，我们对《新教材完全解读》进行较大的修改和完善。

《新教材完全解读》在修订中，调整和新设置了哪些栏目？

《新教材完全解读》系列丛书在修订过程中，根据教学的实际需要，按不同年级段对原书栏目进行调整，保留并完善了原书中的本章（单元）视点、新课指南、教材解读、习题选解、章末总结等栏目，增加了课（节）与全章（单元）的练习题及期中（末）测试卷。语文学科，增加了类文赏析、综合性学习·写作·口语交际等栏目；英语学科，增加了重点新词详解、日常用语总结、语法总结、写作技巧、中（高）考与竞赛题分析等栏目；数理化学科，增加了探索与创新题、中（高）考链接等栏目。

《新教材完全解读》在内容上做了哪些修订？

语文学科　强化了类文赏析，旨在提高学生的自读能力、写作能力、审美能力和探究能力，增加了对新课标教材中“结合性学习·写作·口语交际”的解读。

英语学科　在教材解读中突出讲解语言的交际功能，注重句法或句子结构的分析，并增加重点新词详解、日常用语和语法总结、写作技巧及中（高）考与竞赛题分析等内容。

数学、物理、化学及其他学科 在知识讲解和典例剖析中，更加突出知识、规律、思想方法、解题思路与方法的总结，例题的选取更加侧重类型题的特点和全面，并强化了创新题的讲解力度，在课节内新增了中（高）考的内容，使学生在日常的学习中，熟悉、了解中（高）考，培养学生的中（高）考意识和应试能力。

修订后的《新教材完全解读》系列丛书更加突出讲练结合、学考同步的特点，在各章（单元）、每节（课）后全面补充了测试、训练题，强化对学生的学习质量的检测。

修订后的《新教材完全解读》增补了哪些版本？更适合哪些学生使用？

随着课程改革和新课标教材的推广，为了更加适应全国各地教学及广大师生的需求，新修订的《新教材完全解读》系列丛书增补了初中 7～9 年级各种新课标版本教材的用书，主要学科有人教版新课标语文、数学、英语、物理、化学、地理、生物、历史、江苏版语文、语文版语文、冀教版英语、华东师大版与北师大版数学等。

修订后的《新教材完全解读》系列丛书涵盖了初、高中教学的全部课程和教学内容，面向全国重点、普通中学的所有学生。通过使用本书，不仅能使中等基础的学生在较短时间内学习能力迅速突破，还可使优秀学生各学科成绩更为均衡，全面发展。

为区别和防止盗版，修订后《新教材完全解读》采取了哪些措施？

本书采用特殊的压纹工艺，将我社社名及梓耕书系标志，在封面、封底上压制而成，凡没有上述特征者均为盗版图书。

由于时间仓促，本书难免有一些不足，请广大师生提出意见与建议，使我们再版时对本书进一步完善。

吉林人民出版社综合室

目 录

第六章

不等式

本章视点

一、本章内容分析

1. 本章是在初中介绍了不等式的概念，学习了一元一次不等式、一元一次不等式组的解法，高一学习了一元二次不等式、简单的分式不等式和含绝对值不等式的解法的基础上，研究不等式的性质、不等式的证明和不等式的解法. 不等式与数、式、方程、函数、三角等内容有密切的联系. 讨论方程或方程组的解的情况，研究函数的定义域、值域、单调性、最大值、最小值，讨论线性规划问题等，都要经常用到不等式的知识，不等式在解决各类实际问题时也有广泛的应用. 可见，不等式在中学数学里占有重要的地位，是进一步学习数学的基础.

2. 本章内容分为五部分：

第一部分讲不等式的性质. 首先通过数轴表示数，给出了比较实数大小的方法，在此基础上，给出了不等式的性质. 这一部分是本章内容的基础，也是以后证明不等式，解不等式的出发点. 第二部分讲算术平均数与几何平均数. 首先证明了一个重要的不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$. 通过此式，得出了两个正数的算术平均数与几何平均数定理. 这一部分重在强调不等式的应用. 第三部分讲不等式的证明. 分别介绍了证明不等式的三种基本方法——比较法、综合法和分析法，并对每一种方法的逻辑依据和方法

要点简单地给予了说明.第四部分介绍了不等式的解法,总结了一元二次不等式、一元二次不等式组、含绝对值的不等式、简单的高次不等式和分式不等式的解法,强调了转化的思想方法.第五部分讲含绝对值的不等式.

3. 本章内容中,不等式的证明和不等式的解法是重点.不等式的性质及其证明,证明不等式是难点.掌握不等式的性质是学好本章的关键.

二、学法指导

不等式知识在解决实际问题中有着十分重要的用途,列不等关系式是解答范围问题的前提,构造函数关系,活用二、三元均值不等式是解答最值问题的主要工具.涉及不等式的应用问题是多种多样的,常常与函数、数列、立体几何相综合,诸如:汽车的最大限速、容器的最大容积、用料方式、购物方式、人员分组、经济效益等.解不等式的应用题要认真审题,明确题意,建立合理的不等式模型.

在学习本章的过程中,要加强等价转化思想的训练,解不等式的过程就是等价转化过程.加强化归思想的提高,证明不等式的过程就是一系列化归过程.加强分类讨论思想的学习与形成,会分析引起分类讨论的原因,做到合理分类,不重不漏.

6.1　不等式的性质

新课指南

1. 掌握比较实数大小的方法，会比较两个实数的大小.
2. 理解不等式的性质及其证明，能说出每一步推理的理由和关键步骤，这是本节的重点，也是难点.
3. 能依据不等式的性质证明简单的不等式.

教材解读　精华要义

相关链接

1. 实数与数轴上的点是一一对应的.
2. 在数轴上不同的两点中，右边的点表示的实数比左边的点表示的实数大.

知识详解

知识点1　实数的运算性质与大小顺序间的关系

对于任意两个实数 a,b，如果 $a>b$，那么 $a-b$ 是正数；如果 $a<b$，那么 $a-b$ 是负数；如果 $a=b$，那么 $a-b$ 等于0. 它们的逆命题也正确. 这就是说：

$$\boxed{\begin{aligned}&a>b\Leftrightarrow a-b>0;\\&a=b\Leftrightarrow a-b=0;\\&a<b\Leftrightarrow a-b<0.\end{aligned}}$$

上面等价符号的左式反映的是实数的大小顺序，右式反映的则是实数的运算性质，合起来就成为实数的运算性质与大小顺序之间的关系. 它是不等式这一章的理论基础，是不等式性质的证明、证明不等式和解不等式的主要依据.

利用实数的运算性质与大小顺序间的关系，可以比较两个实数 a 与 b 的大小. 事实上，只需判断它们的差 $a-b$ 的符号.

例如： 若 $x\in\mathbf{R}$，试比较 $2x^4+1$ 与 $2x^3+x^2$ 的大小.

解： $\because(2x^4+1)-(2x^3+x^2)$

$=2x^3(x-1)+(1-x^2)$

$=(x-1)(2x^3-x-1)$

$=(x-1)[2(x^3-x)+(x-1)]$

$=(x-1)^2[2x(x+1)+1]$

$=(x-1)^2\left[2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right]\geqslant 0$,

$\therefore 2x^4+1\geqslant 2x^3+x^2$,当且仅当 $x=1$ 时取等号.

【注意】 我们要判断的只是差的符号,至于差本身究竟是多少,在这时就无关紧要了.

思想方法小结 比较两个代数式的大小的一般步骤是:作差⟶变形⟶判断差的符号,变形的目的是判断差的符号,为了便于判断符号,进行因式分解、配方、凑成几个平方和的形式是变形的常用方法,如果符号不确定时,要注意分类讨论,符号判定的理论依据是符号的运算法则,作差法比较大小体现化归思想.

知识点2 不等式的性质

利用比较实数大小的方法,可以推出下列不等式的性质:

定理1(反对称性) 如果 $a>b$,那么 $b<a$;如果 $b<a$,那么 $a>b$.

定理2(传递性) 如果 $a>b,b>c$,那么 $a>c$.

定理3(可加性) 如果 $a>b$,那么 $a+c>b+c$.

由定理3,可以得到不等式的移项法则:

如果 $a+b>c$,那么 $a>c-b$,即不等式中任何一项改变符号后,可以把它从一边移到另一边.

还可以推得不等式的加法法则:

如果 $a>b$,且 $c>d$,那么 $a+c>b+d$,即两个同向不等式两边分别相加,所得不等式与原不等式同向.

思维拓展 (1)定理3的逆命题成立吗?

(2)两个同向不等式的两边分别相减,所得不等式与原不等式是否同向?

点拨 (1)逆命题成立.

(2)不一定.例如,$5>2,1>0$,则 $5-1>2-0$;而 $5>2,1>-3$,则 $5-1<2-(-3)$.

定理4(可乘性) 如果 $a>b$,且 $c>0$,那么 $ac>bc$;如果 $a>b$,且 $c<0$,那么 $ac<bc$.

由定理4,可以得到不等式的乘法法则:

如果 $a>b>0$,且 $c>d>0$,那么 $ac>bd$,这就是说,两个两边都是正数的同向不等式两边分别相乘,所得不等式与原不等式同向.

由此,还可以得到不等式的乘方法则:

如果 $a>b>0$,那么 $a^n>b^n$($n\in\mathbf{N}$,且 $n>1$).

思维拓展 (1)能否由 $a>b,c>d$,推出 $ac>bd$?

(2)如果 $a>b>0$,那么对任意整数 n,不等式 $a^n>b^n$ 还成立吗?

(3)如果 $a>b$,$\frac{1}{a}$ 与 $\frac{1}{b}$ 谁大?

点拨 (1)不能.例如,$5>2,-3>-4$,则 $5\times(-3)<2\times(-4)$.

(2)不成立.例如,当 $n=-1$ 时,有 $a^{-1}<b^{-1}$.

(3)当 $a>0,b<0$ 时，显然 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$；当 $a>b>0$，或 $b<a<0$ 时，将不等式 $a>b$ 的两边同除以正数 ab 得 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

定理 5(可开方性)　如果 $a>b>0$，那么 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$($n\in\mathbf{N}$，且 $n>1$).

思维误区　在用反证法证明定理 5 时，因为 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ 的反面有两种情形，即 $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$ 和 $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$，所以不能仅仅否定了 $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$，就"归谬"了事，而必须进行"穷举"，把这两种情形都否定了才能得出 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ 的结论.

【注意】　不等式的乘方法则与开方法则可统一推广为 $a>0,b>0,s\in\mathbf{Q}^{+}$，则 $a>b\Leftrightarrow a^{s}>b^{s}$. 若令 $s=\frac{m}{n}$($m,n\in\mathbf{N}_{+}$)，则可推广为 $a>0,b>0,m,n\in\mathbf{N}_{+}$，则 $a>b\Leftrightarrow a^{\frac{m}{n}}>b^{\frac{m}{n}}$.

思维拓展　不等式的性质与等式的性质有什么区别？

点拨　主要区别是在与数相乘(除)时，不等式两边所乘(除)的数的符号不同，结论是不同的.

典例剖析　经典例题

基础知识应用题

本节的基础知识应用包括(1)掌握实数的运算性质与大小顺序之间的关系，学会比较两个代数式的大小；(2)能应用不等式的性质证明简单的不等式.

例 1　若 $x<y<0$，试比较 $(x^2+y^2)(x-y)$ 与 $(x^2-y^2)(x+y)$ 的大小.

解： $(x^2+y^2)(x-y)-(x^2-y^2)(x+y)$

$=(x-y)[(x^2+y^2)-(x+y)^2]=-2xy(x-y)$.

$\because x<y<0$，$\therefore -xy<0$，$x-y<0$.

$\therefore -2xy(x-y)>0$.

$\therefore (x^2+y^2)(x-y)>(x^2-y^2)(x+y)$.

小结　判断两个实数差的符号，变形一定要到位. 本例用因式分解的方法将差化成数或式的积的形式，然后分别判断每个数或式的符号，确定差的符号.

例 2　设 $m\in\mathbf{R}$，$x\in\mathbf{R}$，比较 x^2-x+1 与 $-2m^2-2mx$ 的大小.

解： $\because (x^2-x+1)-(-2m^2-2mx)$

$=x^2+(2m-1)x+(2m^2+1)$

$=\left(x+\frac{2m-1}{2}\right)^2+m^2+m+\frac{3}{4}$

$=\left(x+\frac{2m-1}{2}\right)^2+\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}>0$,

$\therefore x^2-x+1>-2m^2-2mx$.

思想方法小结 作差之后，有许多同学感到无从下手，有的用特殊值法，还有的这样思考：$x^2-x+1>0$，而$-2m^2-2mx$有正有负，需分类讨论．这些方法都是片面的．事实上，二次三项式符号的确定，可以用配方法，还可以用判别式法（如果变量有多个，以其中一个变量为主元）．

二次三项式 $x^2+(2m-1)x+(2m^2+1)$ 的判别式为

$\Delta=(2m-1)^2-4(2m^2+1)=-4m^2-4m-3$，

二次三项式 $-4m^2-4m-3$ 的判别式为

$\Delta=(-4)^2-4\times(-4)\times(-3)=-32<0$，

$\therefore x^2+(2m-1)x+(2m^2+1)>0$ 恒成立，

即 $x^2-x+1>-2m^2-2mx$．

例 3 已知 a,b 为正实数，试比较$\dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}$与$\sqrt{a}+\sqrt{b}$的大小．

解法 1：

$$\left(\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\right)-(\sqrt{a}+\sqrt{b})$$

$$=\left(\frac{a}{\sqrt{b}}-\sqrt{b}\right)+\left(\frac{b}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)$$

$$=\frac{a-b}{\sqrt{b}}+\frac{b-a}{\sqrt{a}}=\frac{(a-b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{ab}}$$

$$=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}}.$$

$\because a,b$ 为正实数，$\therefore\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$，$\sqrt{ab}>0$，$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2>0$，

$\therefore\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}}\geqslant 0$，当且仅当 $a=b$ 时等号成立．

$\therefore\dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$（当且仅当 $a=b$ 时取等号）．

【注意】 (1)变形一步最为关键，不管用什么方法变形，一定要变到能够判断差的符号为止．

(2)含有字母的须分类讨论．

解法 2： $\left(\dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}\right)^2=\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{a}+2\sqrt{ab}$，

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}$，

$$\therefore\quad\left(\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$$

$$=\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}+2\sqrt{ab}-(a+b+2\sqrt{ab})$$

$$=\frac{a^3+b^3-ab(a+b)}{ab}=\frac{(a+b)(a-b)^2}{ab}.$$

$\because a,b$ 为正实数，$\therefore \dfrac{(a+b)(a-b)^2}{ab}\geqslant 0$，

于是 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}\right)^2\geqslant(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$.

又 $\because \dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}>0,\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$，

$\therefore \dfrac{a}{\sqrt{b}}+\dfrac{b}{\sqrt{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$（当且仅当 $a=b$ 时取等号）.

【注意】 如果直接比较两个代数式或数（均大于零）的大小，不如比较这两个数或式的平方容易，可变通改为比较两个平方的大小，平方的大小比较出来了，原来两个数或式的大小也就定了，本题解法 2 就是这样做的.

例 4　已知 $a>b>0,c<d<0,e<0$，求证 $\dfrac{e}{a-c}>\dfrac{e}{b-d}$.

〔分析〕 要证明 $\dfrac{e}{a-c}>\dfrac{e}{b-d}$，由于 $e<0$，所以只需证明 $\dfrac{1}{a-c}<\dfrac{1}{b-d}$. 如果 $a-c$ 与 $b-d$ 同号，只需证明 $a-c>b-d$. 从已知条件可以得到这个不等式，因此本题可证.

解：$\because a>b>0,c<d<0,\therefore -c>-d>0$.

$\therefore a-c>b-d>0$，

即 $0<\dfrac{1}{a-c}<\dfrac{1}{b-d}$.

又 $\because e<0$，

$\therefore \dfrac{e}{a-c}>\dfrac{e}{b-d}$.

小结　在证明本例时，连续用到不等式的三个性质，一是不等式的乘法性质，$c<d<0$，则 $-c>-d>0$，即不等式两边同乘一个负数，改变不等号的方向；二是不等式的加法性质，当 $a>b,-c>-d>0,a-c>b-d$，即同向不等式可以相加；三是倒数性质，由 $a-c>0,b-d>0$，及 $a-c>b-d$，得 $\dfrac{1}{a-c}<\dfrac{1}{b-d}$；最后再次用到不等式的乘法性质，不等式的两边同乘负数 e，改变不等号的方向，即 $\dfrac{e}{a-c}>\dfrac{e}{b-d}$. 所以，灵活地运用不等式的基本性质，是对不等式进行变换的关键.

综合应用题

本节知识的综合应用包括(1)用作差法解其他有关问题；(2)运用不等式的性质解决不等式的有关问题.

例 5　设 $a>b>0$，比较 $\sqrt[3]{a^3+b^3}$ 与 $\sqrt{a^2+b^2}$ 的大小.

〔分析〕 由于两数都含有根式，先将两数乘方去掉根式后，再比较大小.

解：$\because (\sqrt[3]{a^3+b^3})^6-(\sqrt{a^2+b^2})^6$

$=(a^3+b^3)^2-(a^2+b^2)^3$

$=2a^3b^3-3(a^4b^2+a^2b^4)$

$=-a^2b^2(3a^2+3b^2-2ab)$

$=-a^2b^2[2a^2+2b^2+(a-b)^2]$，

而 $a>b>0$，

$\therefore (\sqrt[3]{a^3+b^3})^6-(\sqrt{a^2+b^2})^6<0.$

$\therefore (\sqrt[3]{a^3+b^3})^6<(\sqrt{a^2+b^2})^6.$

即 $\sqrt[3]{a^3+b^3}<\sqrt{a^2+b^2}$.

小结　这里的变形作差，拓展了不等式性质的应用空间，常用的变形作差有：倍数作差、倒数作差、乘方作差、对数作差等．其实质是不等式性质与函数单调性的结合．

例 6　实数 a,b,c,d 满足下列三个条件：

①$d>c$；

②$a+b=c+d$；

③$a+d<b+c$.

请将 a,b,c,d 按照从大到小的顺序排列，并证明你的结论．

〔**分析**〕　本题条件较多，从何入手？如果两两比较，需要多次进行．但如果能找到一个合理的程序，则可以减少解题的步骤．

解：③$\Rightarrow d-b<c-a$，②$\Rightarrow c-a=b-d$，

$\therefore d-b<b-d, a-c<c-a$.

$\therefore d-b<0, a-c<0$，即 $d<b, a<c$.

再由①得，$b>d>c>a$.

同类变式　若 $a>0, bc>a^2$，且满足 $a^2-2ab+c^2=0$，判断 a,b,c 的大小．

解：$\because 2ab=a^2+c^2, a>0, \therefore b>0$.

又 $bc>a^2$，$\therefore c>0$.

$\because a^2-2ab+b^2=b^2-c^2$，

$\therefore b^2-c^2=(a-b)^2\geqslant 0$，即 $b^2\geqslant c^2, b\geqslant c$.

若 $b=c$，则 $a=b$.

于是 $a=b=c, bc=a^2$，这与 $bc>a^2$ 矛盾，因此 $b>c$.

由 $b^2>bc>a^2$，得 $b>a$.

由 $a^2+c^2=2ab>2a^2$，得 $c^2>a^2, c>a$.

所以 a,b,c 的大小关系为 $b>c>a$.

例 7　设 $60<a<84, 28<b<33$，求 $a+b, a-b, \frac{a}{b}$ 的范围．

〔分析〕 本题的关键是求出$-b$与$\frac{1}{b}$的范围.

解：∵$60<a<84$,①

$28<b<33$,②

①+②得,$88<a+b<117$.

又②×(−1)得,$-33<-b<-28$,③

①+③得,$27<a-b<56$.

由②得,$0<\frac{1}{33}<\frac{1}{b}<\frac{1}{28}$,④

①×④得,$\frac{20}{11}<\frac{a}{b}<3$.

【注意】 使用定理3、定理4时,应注意前提条件,只有两个同向不等式才能相加.只有两个不等式同向,而且不等号两边都是正数时,才能相乘.

探索与创新题

例8 比较两数16^{18}与18^{16}的大小.

〔分析〕 本题给出的两个指数式,可采用作比法.

解：$\frac{16^{18}}{18^{16}}=\frac{2^{72}}{2^{16}\cdot 3^{32}}=\frac{2^{56}}{3^{32}}=\left(\frac{2^7}{3^4}\right)^8=\left(\frac{128}{81}\right)^8>1$,

∴$16^{18}>18^{16}$.

小结 一般比较两个指数式的大小,用作比法,其原因有两个：

(1)指数式都大于零；

(2)指数式作比后便于运算变形到最简式.

例9 比较$1+\log_x 3$与$2\log_x 2(x>0$且$x\neq 1)$的大小.

〔分析〕 由于要比较的两个数都是对数,我们想到对数的性质,以及对数函数的单调性.

解：$(1+\log_x 3)-2\log_x 2=\log_x \frac{3x}{4}$,

当$\begin{cases}0<x<1,\\ 0<\frac{3x}{4}<1\end{cases}\Rightarrow 0<x<1$,或当$\begin{cases}x>1,\\ \frac{3x}{4}>1\end{cases}\Rightarrow x>\frac{4}{3}$时,

有$\log_x \frac{3x}{4}>0$,即$1+\log_x 3>2\log_x 2$.

当$\begin{cases}0<x<1,\\ \frac{3x}{4}>1.\end{cases}$ 或$\begin{cases}x>1,\\ 0<\frac{3}{4}x<1\end{cases}\Rightarrow 1<x<\frac{4}{3}$时,

有$\log_x \frac{3x}{4}<0$,即$1+\log_x 3<2\log_x 2$.

当$\frac{3}{4}x=1\Rightarrow x=\frac{4}{3}$时，有$\log_x\frac{3}{4}x=0$，即$1+\log_x 3=2\log_x 2$.

综上所述，当$0<x<1$，或$x>\frac{4}{3}$时，$1+\log_x 3>2\log_x 2$.

当$1<x<\frac{4}{3}$时，$1+\log_x 3<2\log_x 2$.

当$x=\frac{4}{3}$时，$1+\log_x 3=2\log_x 2$.

例 10 $a>0, a\neq 1, x>0, y>0$，比较$\log_a\frac{1}{x}\cdot\log_a\frac{1}{y}$与$\log_a\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot\log_a\sqrt{\frac{y}{x}}$的大小.

解：$\because a>0, a\neq 1, x>0, y>0$，

$$\therefore\ \log_a\frac{1}{x}\cdot\log_a\frac{1}{y}-\log_a\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot\log_a\sqrt{\frac{y}{x}}$$

$$=\log_a x\log_a y-\frac{1}{4}(\log_a x-\log_a y)(\log_a y-\log_a x)$$

$$=\log_a x\cdot\log_a y+\frac{1}{4}(\log_a x-\log_a y)^2$$

$$=\frac{1}{4}[4\log_a x\log_a y+(\log_a x-\log_a y)^2]$$

$$=\frac{1}{4}(\log_a x+\log_a y)^2\geqslant 0.$$

$$\therefore\log_a\frac{1}{x}\cdot\log_a\frac{1}{y}\geqslant\log_a\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot\log_a\sqrt{\frac{y}{x}}.$$

小结 这里的对数底数a，要不要分类讨论，则要看能否定号，或者说a的取值范围对定号有无决定性影响，若无，则不必讨论，若有，则必须讨论.

易错与疑难题

本节知识的理解与运用应注意分类合理、恰当，做到不重不漏；同向不等式多次相加时要慎用.

例 11 已知$a>0, a\neq 1, m>n>0$，比较$A=a^m+\frac{1}{a^m}$与$B=a^n+\frac{1}{a^n}$的大小.

错解：$A-B=\left(a^m+\frac{1}{a^m}\right)-\left(a^n+\frac{1}{a^n}\right)$

$$=(a^m-a^n)+\frac{a^n-a^m}{a^{m+n}}$$

$$=\frac{(a^m-a^n)(a^{m+n}-1)}{a^{m+n}}.$$

$\because m>n>0, a>0, a\neq 1$，

$\therefore a^m>a^n, a^{m+n}>1$.