高等学校经典教材配套辅导丛书

高等数学
辅导及习题精解

同济五版

同济大学 骆一舟 主编

◆ 知识归纳 ◆ 习题全解 ◆ 同步自测
◆ 综合解析 ◆ 名师执笔 ◆ 精准解答

陕西师范大学出版社

高等学校经典教材配套辅导丛书

高等数学
辅导及习题精解
（同济五版）

同济大学　骆一舟　主编

陕西师范大学出版社

前　言

高等数学课程是所有工科学生必修的基础理论课程。上海同济大学应用数学系主编的《高等数学》第五版以体系完整，层次清晰，深入浅出的特点成为高等数学这门课程的经典教材。

为了帮助学生能更好地学好这门课程，本书配合上述教材，对教材的主要内容、基本公式进行了知识点归纳，并对教材课后的习题以及总习题进行了全面解答，在解题过程中提供了相关的解题思路，有助于学生掌握解题技巧。此外，在每章中提供了同步自测题和综合题解析，为学生有针对性地巩固和提高自己的解题能力提供了更多的练习，其中部分题目出自历年考试中出现的全真题，并附有详细解答。

本书可供在各类高等学校中学习高等数学课程的学生以及自学成材的学生参考使用。

由于编者水平有限及编写时间仓促，不妥之处在所难免，希望广大读者给予批评指正。

骆一舟

2004 年 7 月于上海同济大学

目　　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第一章　函数与极限

在本章中，我们首先学习了函数及相关的概念，并介绍了函数的四个基本性质和几个常用的初等函数；其次研究了序列、函数的极限，这其中包括几种情况下的不同定义形式和几种不同函数形式求极限的方法；然后讨论了无穷小量和无穷大量；最后讨论了函数的连续性，以及利用连续函数的性质解题.

本章学习的重点是复合函数，特别是分段函数的复合；极限的概念，极限存在准则，求极限的方法（极限四则运算法则、夹逼准则、单调有界准则、两个重要极限和等价无穷小代换）；无穷小的阶；函数间断点的类型；有限区间上连续函数的介值定理和最大最小值定理.

第一节　函数

一、基本内容概述

表 1-1.1　集合及相关概念

<table>
<tr><th>名称</th><th colspan="2">定　义</th><th>说明</th></tr>
<tr><td>集合</td><td colspan="2">具有某种特定性质的事物的总体</td><td>简称集</td></tr>
<tr><td>元素</td><td colspan="2">组成集合的事物称为该集合的元素</td><td>简称元</td></tr>
<tr><td rowspan="5">集合的运算</td><td>并集</td><td>设 A、B 是两个集合，由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合</td><td>$A\cup B$ 即
$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$</td></tr>
<tr><td>交集</td><td>由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合</td><td>$A\cap B$ 即
$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$</td></tr>
<tr><td>差集</td><td>由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合</td><td>$A\backslash B$ 即
$A\backslash B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$</td></tr>
<tr><td>补集</td><td>集合 I 为全集，则 $I\backslash A$ 为 A 的补集</td><td>A^C</td></tr>
<tr><td>集合的并、交、补运算法则</td><td colspan="2">(1)交换律　$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$
(2)结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$
$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
(3)分配律　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$
$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$
(4)对偶律　$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$
$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$</td></tr>
</table>

（续）

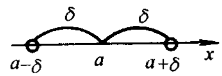
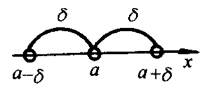
名称		定义	说明
集合的运算	直积	设 A、B 是任意两个集合，在集合 A 中任取一元素 x，在集合 B 中任意取一个元素 y，组成一个有序对 (x,y)，把这样的有序对作为新的元素，它们全体组成的集合	$A\times B$ 即 $A\times B=\{(x,y)\mid x\in A$ 且 $y\in B\}$
区间	开区间	设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$，数集 $\{x\mid a<x<b\}$	(a,b) 即 $(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$
	闭区间	数集 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$	$[a,b]$
邻域		以点 a 为中心的任何开区间，记作 $U(a)$；设 δ 是任一正数，则开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 就是点 a 的一个邻域，称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$ 点 a 称为邻域的中心，δ 称为这邻域的半径	
去心 δ 邻域		点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后 记作 $\mathring{U}(a,\delta)$　即 $\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<\lvert x-a\rvert<\delta\}$	

表 1-1.2　映射及相关概念

名称	定义	说明
映射	设 X、Y 是两个非空集合，如果存在一个法则 f，使得对 X 中每个元素 x，按法则 f，在 Y 中有惟一确定的元素 y 与之对应，则称 f 为从 X 到 Y 的映射 $f:X\to Y$ (1) 构成一个映射必须具备以下三个要素：集合 X，即定义域 $D_f=X$，集合 Y，即值域的范围：$R_f\subset Y$；对应法则 f，使对每个 $x\in X$ 有惟一确定的 $y=f(x)$ 与之对应； (2) 对每个 $x\in X$，元素 x 的象是惟一的；而对每个 $y\in R_f$，元素 y 的原象不一定是惟一的；映射 f 的值域 R_f 是 Y 的一个子集，即 $R_f\subset Y$，不一定 $R_f=Y$.	
满射	设 f 是从集合 X 到集合 Y 的映射，若 $R_f=Y$，即 Y 中任一元素 y 都是 X 中某元素的象，则称 f 为 X 到 Y 上的满射.	
单射	若对 X 中任意两个不同元素 $x_1\neq x_2$，它们的象 $f(x_1)\neq f(x_2)$，称 f 为 X 到 Y 的单射	
双射	若映射 f 既是单射，又是满射，称 f 为双射.	

（续）

名称	定　　义	说明
逆映射	设 f 是 X 到 Y 的单射，则由定义，对每个 $y\in R_f$，有惟一的 $x\in X$，适合 $f(x)=y$，于是，可以定义一个从 R_f 到 X 的新映射 g，即 $g:R_f\to X$ 对每个 $y\in R_f$，规定 $g(y)=x$，这 x 满足 $f(x)=y$	定义域 $D_{f^{-1}}=R_f$ 值域 $R_{f^{-1}}=X$
复合映射	设有两个映射 $g:X\to Y_1$，$f:Y_2\to Z$ 其中 $Y_1\subset Y_2$，则由映射 g 和 f 可以定出一个从 X 到 Z 的对应法则，将每个 $x\in X$ 映成 $f[g(x)]\in Z$ 记作 $f\circ g$，即 $f\circ g:X\to Z$ $(f\circ g)(x)=f[g(x)],x\in X$	映射 g 和 f 构成复合映射的条件：g 的值域必须包含在 f 的定义域中，$R_g\subset D_f$.
	映射复合是有顺序的，即 $f\circ g$ 与 $g\circ f$ 未必相同.	

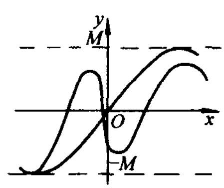
表 1-1.3　函数及相关概念

名称	定　　义	说明
函数	设数集 $D\subset R$，则称映射 $f:D\to R$ 为定义在 D 上的函数，通常简记为 $y=f(x)$，$x\in D$ 其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域，记作 D_f，即 $D_f=D$. 函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域，记作 R_f 或 $f(D)$，即 $R_f=f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$	(1) f 表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则，而 $f(x)$ 表示与自变量 x 对应的函数值； (2)表示函数的记号可以任意选取； (3)构成函数的要素是，定义域 D_f 及对应法则 f； (4)当且仅当两个函数的定义域及对应法则都相同时，两个函数相等.
分段函数	在自变量不同变化范围内，对应法则用不同式子来表示的函数	
复合函数	设函数 $y=f(u)$ 的定义域 D_1，函数 $u=g(x)$ 在 D 上有定义且 $g(D)\subset D_1$，则由下式确定的函数 $y=f[g(x)]$，$x\in D$ 称为由函数 $u=g(x)$ 和函数 $y=f(u)$ 构成的复合函数，它的定义域为 D，变量 u 称为中间变量.	(1) g 与 f 能构成复合函数 $f\circ g$ 的条件是：函数 g 在 D 上的值域 $g(D)$ 必须含在 $f(x)$ 的定义域 D_f 中，即 $g(D)\subset D_f$； (2)结合律成立，$(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$，但没有交换律，即 $f\circ g\neq g\circ f$

（续）

名称	定　　义	说明
反函数	设函数 $f:D\to f(D)$ 是单射，则它存在逆映射 $f^{-1}:f(D)\to D$，称此时映射 f^{-1} 为函数 f 的反函数. 对每个 $y\in f(D)$，有惟一的 $x\in D$，使 $f(x)=y$，于是有 $f^{-1}(y)=x$. 一般地，$y=f(x),x\in D$ 的反函数记成 $y=f^{-1}(x)$，$x\in f(D)$	若 f 是定义在 D 上的单调函数，则 $f:D\to f(D)$ 是单射，于是 f 的反函数 f^{-1} 必定存在.
初等函数	由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数	

表 1-1.4　函数的几种特性

性质	定　　义	说明或图例
有界性	设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$. 如果存在数 K_1，使得 $f(x)\geqslant K_1$，对任一 $x\in X$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界，而 K_1 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个上界. 如果存在数 K_2 使得 $f(x)\leqslant K_2$，对任一 $x\in X$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有下界，而 K_2 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个下界. 如果存在正数 M，使得 $\lvert f(x)\rvert\leqslant M$，对任一 $x\in X$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界.	(1)函数 $f(x)$ 有界则 $f(x)$ 必有下界 $-M$ 和上界 M；反之若 $f(x)$ 有上界 K_1，且有下界 K_2，则 $f(x)$ 必有界 $M=\max\{\lvert K_1\rvert,\lvert K_2\rvert\}$； (2)函数的有界性是相对于某个区间而言的.
无界性	如果这样的 M 不存在，就称函数 $f(x)$ 在 X 上无界. 函数无界的严格定义：对于任给正数 M，总存在 $x_M\in X$，使得 $\lvert f(x_M)\rvert\geqslant M$. 即任何一个正数 M 都不可能是 $f(x)$ 的界.	无界函数与无穷大的区别：在一定变化趋势下 $f(x)$ 为无穷大，则 $f(x)$ 一定无界；若 $f(x)$ 在某个区间上无界，则 $f(x)$ 不一定是无穷大. 如 $f(x)=x\sin x$ 

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

（续）

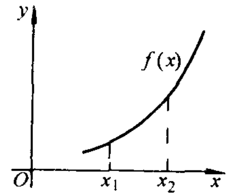
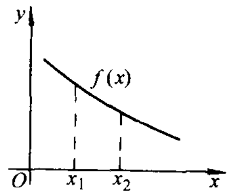
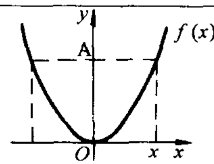
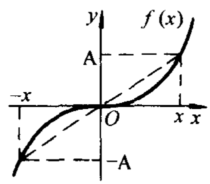
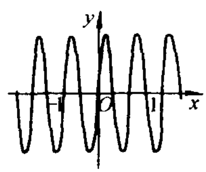
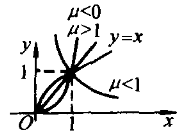
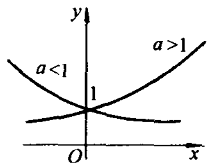
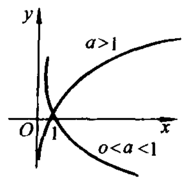
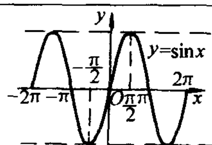
<table>
<tr><th>性质</th><th colspan="2">定　　义</th><th colspan="2">说明或图例</th></tr>
<tr><td rowspan="2">单调性</td><td>单调增加</td><td>设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间上 I 是单调增加的.</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>单调减少</td><td>设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间上 I 是单调减少的.</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">奇偶性</td><td>偶函数</td><td>设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称．如果对于任一 $x\in D$，$f(-x)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为偶函数.</td><td>(2)图形关于 y 轴对称</td><td rowspan="2">(1)函数的奇偶性是相对于区间而言的，若定义域关于原点不对称，则该函数就不是奇或偶函数.</td></tr>
<tr><td>奇函数</td><td>设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称．如果对于任一 $x\in D$，$f(-x)=-f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为奇函数.</td><td>(3)图形关于原点对称</td></tr>
<tr><td>周期性</td><td colspan="2">设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个正数 l，使得对于任一 $x\in D$ 有 $(x\pm l)\in D$，且 $f(x+l)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，l 称为 $f(x)$ 的周期.</td><td colspan="2">(1)通常说周期函数的周期指的是最小正周期；
(2)周期函数不一定存在最小正周期，如常数函数；
(3)若 T 是 $f(x)$ 的周期，则(a). $f(x+kT)=f(x)$（k 为整数）；(b). $f(ax+b)$（$a\neq0,b\in R$）其周期为 $\left|\frac{T}{a}\right|$.</td></tr>
</table>

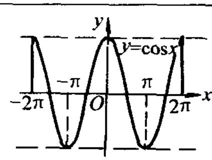
表 1-1.5　基本初等函数

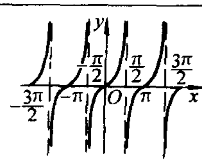
<table>
<tr><th colspan="2">名称</th><th>定　义</th><th colspan="2">说明或图例</th></tr>
<tr><td rowspan="3">基本初等函数</td><td>幂函数</td><td>$y=x^{\mu}$（$\mu\in R$ 是常数）</td><td>(1)当 $\mu=\frac{1}{2}$ 时 $x\in[0,+\infty)$
当 $\mu=3$ 时 $x\in(-\infty,+\infty)$
不论 μ 取什么值，幂函数在 $(0,+\infty)$ 内总有定义.
(2)当 $\mu>0$ 时，单调递增；
当 $\mu<0$ 时，单调递减.</td><td>


</td></tr>
<tr><td>指数函数</td><td>$y=a^{x}$（$a>0$ 且 $a\neq1$）</td><td>(1)定义域：$x\in(-\infty,+\infty)$
(2)若 $a>1$，单调递增.
当 $a<1$ 时，单调递减.</td><td>


</td></tr>
<tr><td>对数函数</td><td>$y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）</td><td>(1)定义域：$x\in(0,+\infty)$
(2)若 $a>1$，单调递增.
当 $a<1$ 时，单调递减.
(3)$y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 互为反函数
(4)$a=\mathrm{e}$ 时，记为 $y=\ln x$</td><td>


</td></tr>
<tr><td></td><td rowspan="3">三角函数</td><td>正弦函数
$y=\sin x$</td><td>(1)定义域：$x\in(-\infty,+\infty)$；
值域为$[-1,1]$；
(2)奇函数，周期 $T=2\pi$ 的周期函数，有界函数 $|\sin x|\leqslant1$</td><td>


</td></tr>
<tr><td></td><td>余弦函数
$y=\cos x$</td><td>(1)定义域：$x\in(-\infty,+\infty)$
值域为$[-1,1]$
(2)偶函数，周期 $T=2\pi$ 的周期函数，有界函数 $|\cos x|\leqslant1$</td><td>


</td></tr>
<tr><td></td><td>正切函数
$y=\tan x$</td><td>(1)定义域：$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$
(2)奇函数，周期 $T=\pi$ 周期函数，单调递增.</td><td>


</td></tr>
</table>

（续）

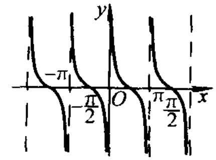
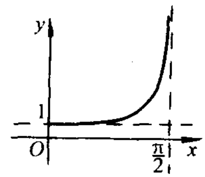
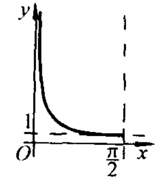
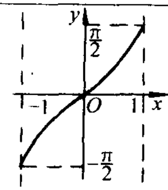
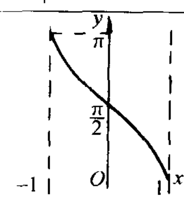
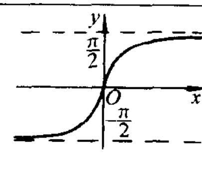
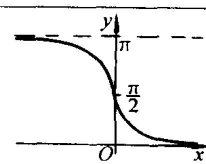
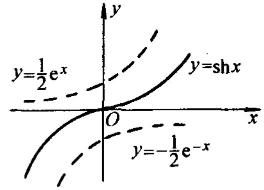
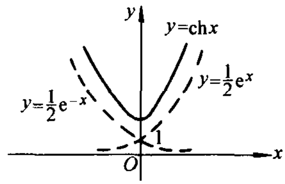
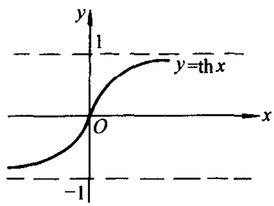
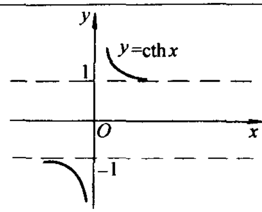
名称		定　　义	说明或图例	
基本初等函数	三角函数	余切函数 $y=\cot x$	(1)定义域：$x\neq k\pi$，$(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ (2)周期 $T=\pi$，周期函数，单调递减.	
		正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$	周期 $T=2\pi$ 周期函数，在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上无界.	
		余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$	周期 $T=2\pi$ 周期函数在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上无界.	
	反三角函数	反正弦函数 $y=\arcsin x$	(1)定义域为：$[-1,1]$， 值域为 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ (2)奇函数，单调递增	
		反余弦函数 $y=\arccos x$	(1)定义域为：$[-1,1]$， 值域为 $[0,\pi]$ (2)单调递减	
		反正切函数 $y=\arctan x$	(1)定义域：$(-\infty,+\infty)$， 值域为 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ (2)奇函数，有界 $\lvert\arctan x\rvert<\dfrac{\pi}{2}$，单调增函数	
		反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$	(1)定义域：$(-\infty,+\infty)$， 值域为 $(0,\pi)$ (2)有界函数 $0<\operatorname{arccot} x<\pi$，单调递减	

表 1-1.6　双曲函数

名称	定　义	说明或图例
双曲正弦	$y=\mathrm{sh}x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$	
双曲余弦	$y=\mathrm{ch}x=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$	
双曲正切	$y=\mathrm{th}x=\dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$	
双曲正切	$y=\mathrm{cth}x=\dfrac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x}=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$	

二、常考知识点与典型题解析

Ⅰ. 集合与映射

1. 求下列集合 A 与 B 的交与并：

$A=\{$全体有理数$\}$，$B=\{$全体无理数$\}$；

解：$A\cap B=\phi$；$A\cup B=\{$实数$\}$

2. 证明：若对于三个集合 A,B,C 且有 $A\cup B=A\cup C$，$A\cap B=A\cap C$，则必有 $B=C$

证：任取 $b\in B$，有 $b\in A\cup B=A\cup C$，从而 b 至少属于 A,C 中一个.

若 $b\in A$，则 $b\in A\cap B=A\cap C$，从而 $b\in C$，所以 $B\subseteq C$

同理所得 $C\subseteq B$，因此，得证 $B=C$

3. 设 $A=\{$全体实数$\}$，$B=\{$全体非负实数$\}$，且

(1) $f_1(a)=2a-1$；(2) $f_2(a)=\ln a$；(3) $f_3(a)=\tan a$；

问 f_1,f_2,f_3 是否为 B 到 A 的映射？是否为单射或满射？

解：(1) f_1 是 B 到 A 的单射，因 $a\neq b$ 时，有 $2a-1\neq 2b-1$，但不是 B 到 A 的满射，因 $2a-1\leqslant -1$ 时，$a\leqslant 0$，即 $a\notin B$ 所以 $2a-1<-1$ 时无原象.

(2) f_2 不是 B 到 A 的映射，因 $O\in B$，但 O 没有对数.

(3) f_3 是 B 到 A 的满射，但不是单射. 因 $b=k\pi+a$，且 k 为整数时，$b\neq a$，但 $f_3(b)=\tan b=\tan a=f_3(a)$.

4. 设 A 为全体整数的集合，且 $\begin{cases} f(a)=\dfrac{a}{2}，\text{当 } a \text{ 为偶数} \\ f(a)=\dfrac{a+1}{2}，\text{当 } a \text{ 为奇数} \end{cases}$

问：f 是否是 A 的变换？是否为单射或满射？

解：f 是 A 的变换，且是满射，但不是单射.

可设 n 为任一整数，有 $f(2n)=\dfrac{2n}{2}=n$，即 f 是满射，且 $f(2n-1)=\dfrac{2n}{2}=n$，即 $f(2n)=f(2n-1)$，因此 f 不是单射.

Ⅱ. 函数的定义域

1. 求下列函数的定义域

(1) $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$；(2) $f(x)=\arccos\sqrt{x/(2x-1)}$

解：(1) 要使 $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 有意义，必须 $\begin{cases} \dfrac{1+x}{1-x}>0 \\ 1-x\neq 0 \end{cases}$

解出，$-1<x<1$

即所求函数的定义域为 $(-1,1)$

(2) 设 $g(x)=\sqrt{x/(2x-1)}$，则 $f(x)=\arccos g(x)$

由 $\begin{cases} x/(2x-1)\geqslant 0 \\ x\neq\dfrac{1}{2} \end{cases}$，解出 $x>\dfrac{1}{2}$ 或 $x\leqslant 0$

则 $D_g=(-\infty,0]\cup(\dfrac{1}{2},+\infty)$

且 $\{x\mid g(x)=\sqrt{x/(2x-1)}\in D_f\}$

解得 $\{x\mid 0\leqslant\sqrt{x/(2x-1)}\leqslant 1\}$

易得 $x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 1$

则 $\{x\mid g(x)\in D_f\}=(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$

且 $D_g\cap\{x\mid g(x)\in D_f\}=\{(-\infty,0]\cup(\dfrac{1}{2},+\infty)\}\cap\{(-\infty,0]\cup[1,+\infty)\}$

$=(-\infty,0]\cup[1+\infty)$

即所求函数的定义域为$(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$

2. 求 $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{\log\cos x}$的定义域

分析:求复杂函数的定义域,就是求由简单函数定义域构成的不等式组

解:由分析和题设知

$$\begin{cases}4-x^2\geqslant 0\\ \cos x>0\\ \cos x\neq 1\end{cases}\quad 解出\quad \begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2\\ 2n\pi-\dfrac{\pi}{2}<x<2n\pi+\dfrac{\pi}{2},(n=0,\pm1,\pm2\cdots)\\ x\neq 2n\pi\end{cases}$$

上述不等式组的解为$(-\dfrac{\pi}{2},0)\cup(0,\dfrac{\pi}{2})$

即所求函数 $f(x)$的定义域为$(-\dfrac{\pi}{2},0)\cup(0,\dfrac{\pi}{2})$

Ⅲ. 函数表达式

1. 设 $f(x+\dfrac{1}{x})=x^2+\dfrac{1}{x^2}$,求 $f(x)$

解法一:用变量代换,令 $u=x+\dfrac{1}{x}$,解出 $x=(u\pm\sqrt{u^2-4})/2$

代入原式,得

$$f(u)=\frac{(u\pm\sqrt{u^2-4})^2}{4}+\frac{4}{(u\pm\sqrt{u^2-4})^2}=u^2-2$$

即 $f(x)=x^2-2$

解法二:用拼凑法

可令 $g(x)=x+\dfrac{1}{x}$,$h(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$

将 $h(x)$拼凑成以 $g(x)$表示的代数式

$f(x+\dfrac{1}{x})=x^2+\dfrac{1}{x^2}=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2-2=(x+\dfrac{1}{x})^2-2$

令 $t=g(x)=x+\dfrac{1}{x}$,则 $f(t)=t^2-2$

即 $f(x)=x^2-2$

2. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2},|x|<1\\ x^2+1,|x|\geqslant1\end{cases}$,求 $f[f(x)]$

解:因当 $0<|x|<1$ 时,$|f(x)|=\sqrt{1-x^2}<1$

所以 $f[f(x)]=\sqrt{1-f^2(x)}=\sqrt{1-(1-x^2)}=\sqrt{x^2}=|x|$

当$|x|\geqslant1$ 时,$|f(x)|=|x^2+1|>1$

所以 $f[f(x)]=f^2(x)+1=(x^2+1)^2+1=x^4+2x^2+2$

当 $x=0$ 时,$|f(0)|=|\sqrt{1-0^2}|=1$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com