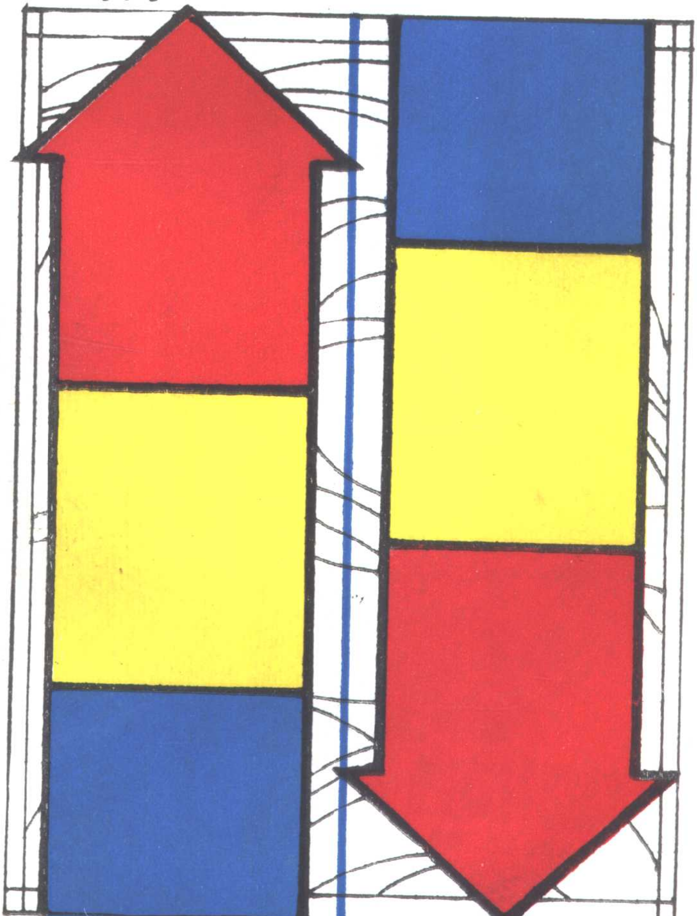
中学数学典型问题解法指南

袁禹门



天津教育出版社

中学数学典型问题解法指南

袁禹门　编著

天 津 教 育 出 版 社

中学数学典型问题解法指南

袁禹门　编著

*

天津教育出版社出版

（天津市湖北路27号）

新华书店天津发行所发行

天津市蓟县印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开　13印张　277千字

1990年6年第1版

1990年6月第1次印刷

印数1—13200

ISBN　7-5309-0904-5

G·711　定价：4.00元

目　录

一、怎样求值

求值题是中学数学中的一种涉及面比较广泛的题型，它需要多种方法和技巧进行解答．我们归纳整理出了一些常用的方法，现在简介如下：

1．观察法

用这种方法求值，主要是通过观察，找出题目中的已知条件的特点．

例 1　已知 $m+\frac{1}{m}=2$，求$m^{1990}+\frac{1}{m^{1990}}$之值．

解　由观察得　$m=1$

$\therefore$　原式 $=1^{1990}+\frac{1}{1^{1990}}=2$

例 2　若x，y都是实数，且 $y=\sqrt{\frac{3x+1}{4x-5}}+\sqrt{\frac{3x+1}{5-4x}}+1$

求$\log_{\frac{27}{64}}(y+xy+x^2y+\cdots+x^{n-1}y+\cdots)$之值．

解　由观察得 $x=-\frac{1}{3}$　因此$y=1$

$$\therefore \text{原式}=\log_{\frac{27}{64}}\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\cdots+\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\cdots\right]$$

$$=\log_{\frac{27}{64}}\left[\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}\right]=\log_{\frac{27}{64}}\frac{3}{4}=\frac{1}{3}$$

例3　若$\sqrt{1+\lg\operatorname{tg}x}+\sqrt{1-\lg\operatorname{tg}x}=2$，求从$-2\pi$到$2\pi$之间的角$x$.

解　由观察得$\lg\operatorname{tg}x=0$　$\therefore \operatorname{tg}x=1$

解之得　$x=k\pi+\dfrac{\pi}{4}$ $(k\in Z)$

又x在-2π到2π之间，所以角x为

$-\dfrac{7\pi}{4}$，$-\dfrac{3\pi}{4}$，$\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{5\pi}{4}$.

2.合成法

用这种方法求值，关键是利用等式的性质，把二个、三个、甚至n个等式相加、相乘，或者把两个等式相减、相除（除式不为0）而得到一个新的等式.

例1　设$\sin A=m\sin B$，$\cos A=n\cos B$，$|m|>1$，$0<n\leqslant 1$，求$\operatorname{tg}A$，$\operatorname{tg}B$之值。

解　$\because$　$\sin A=m\sin B$　①

$\cos A=n\cos B$　②

①^2+②^{2}得

$m^2\sin^2B+n^2\cos^2B=\sin^2A+\cos^2A=1=\sin^2B+\cos^2B$

即　$(m^2-1)\sin^2B=(1-n^2)\cos^2B$　③

$\because$　$|m|>1$，$\therefore$　$m^2-1\neq 0$

又$\because$　$\cos B\neq 0$（若$\cos B=0$，则由③可推出$\sin B=0$，矛盾）

$\therefore$　③式两边同除以$(m^2-1)\cos^2B$得$\operatorname{tg}^2B=\dfrac{1-n^2}{m^2-1}$

$\therefore$　$\operatorname{tg}B=\pm\sqrt{\dfrac{1-n^2}{m^2-1}}$

①÷②得

$$\text{tg}A=\frac{m}{n}\text{tg}B=\pm\frac{m}{n}\sqrt{\frac{1-n^2}{m^2-1}}.$$

例 2　已知$\sin\alpha+\sin\beta=P$，$\cos\alpha+\cos\beta=Q$，求$\sin(\alpha+\beta)$ 和$\cos(\alpha+\beta)$ 之值．

解　∵　$\sin\alpha+\sin\beta=P$　①

$\cos\alpha+\cos\beta=Q$　②

由$①^2+②^2$，并化简得

$2[1+\cos(\alpha-\beta)]=Q^2+P^2$　③

由$②^2-①^2$，并化简得

$2\cos(\alpha+\beta)[\cos(\alpha-\beta)+1]=Q^2-P^2$　④

由①×②，并化简得

$\sin(\alpha+\beta)[1+\cos(\alpha-\beta)]=PQ$　⑤

把③分别代入④和⑤得

$(Q^2+P^2)\cos(\alpha+\beta)=Q^2-P^2$

$(Q^2+P^2)\sin(\alpha+\beta)=2PQ$

当P、Q不全为零时，得

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{2PQ}{Q^2+P^2}\quad\cos(\alpha+\beta)=\frac{Q^2-P^2}{Q^2+P^2}$$

当$P=Q=0$时，由①得　$\sin\beta=-\sin\alpha$

由②得　$\cos\beta=-\cos\alpha$

$$\begin{aligned}\therefore\quad\sin(\alpha+\beta)&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\&=\sin\alpha(-\cos\alpha)+\cos\alpha(-\sin\alpha)\\&=-\sin2\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\&=\cos\alpha(-\cos\alpha)-\sin\alpha(-\sin\alpha)\end{aligned}$$

$$= -\cos 2\alpha.$$

在这种特殊的情况下，所求的解答不定。

3.比较法

用这种方法求值，主要是通过各种形式的比较．例如比较对应项系数，比较指数，比较等式的两边，等等．

例1　已知不等式 $ax^2+bx+a^2>2$（$a\neq 0$）的解是 $1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$，求a、b之值．

解　$1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$可写为下列不等式

$$x^2-2x-1<0$$

即　$-x^2+2x+1>0$

为了使上式与$ax^2+bx+(a^2-2)>0$同解，则有：

$$\frac{a}{-1}=\frac{b}{2}=\frac{a^2-2}{1}$$

$$\therefore \begin{cases}2a+b=0\\2a^2-b=4\end{cases}\quad 解之得\begin{cases}a=-2\\b=4\end{cases}\quad\begin{cases}a=1\\b=-2\end{cases}$$

$\because\ a<0\quad\therefore\ a=-2\quad b=4$

例2　已知$\left(\frac{9}{8}\right)^a\left(\frac{10}{9}\right)^b\left(\frac{16}{15}\right)^c=2$求整数$a$、$b$、$c$之值．

解　由原式得

$$(3^2\cdot 2^{-3})^a(2\cdot 5\cdot 3^{-2})^b(2^4\cdot 3^{-1}\cdot 5^{-1})^c=2$$

即　$2^{-3a+b+4c}\cdot 3^{2a-2b-c}\cdot 5^{b-c}=2^1\cdot 3^0\cdot 5^0$

$$\therefore \begin{cases}-3a+b+4c=1\\2a-2b-c=0\\b-c=0\end{cases}$$

解之得　$a=3\quad b=2\quad c=2$

例3　设$x^2+\mathrm{tg}^2\alpha=2x\mathrm{tg}\alpha$，且无穷递缩等比数列$x$，$x^3$，

x^5，…之和等于$\frac{\sqrt{3}}{2}$，求锐角α之值。

解 $\because x^2+\text{tg}^2\alpha=2x\text{tg}\alpha$ 即 $(x-\text{tg}\alpha)^2=0$

$\therefore \quad x=\text{tg}\alpha$

又x，x^3，x^5，…为无穷递缩等比数列

$$\therefore \quad x+x^3+x^5+\cdots=\frac{x}{1-x^2}=\frac{\text{tg}\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha} \quad ①$$

$$\text{而} \quad x+x^3+x^5+\cdots=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ②$$

比较①、②两端，得

$$\frac{\text{tg}\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{即}\ \text{tg}2\alpha=\sqrt{3}$$

$\because \quad \alpha$为锐角 $0<2\alpha<\pi$

$\therefore \quad 2\alpha=\frac{\pi}{3} \quad \alpha=\frac{\pi}{6}$

4.配凑法

这种方法包括凑角、凑零和凑值三种情况。

例 1 已知$\text{tg}(\alpha+\beta)=2$，$\text{tg}(\alpha-\beta)=7$，求$\text{tg}2\alpha$和$\text{tg}2\beta$之值。

解 $$\text{tg}2\alpha=\text{tg}[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]=\frac{\text{tg}(\alpha+\beta)+\text{tg}(\alpha-\beta)}{1-\text{tg}(\alpha+\beta)\text{tg}(\alpha-\beta)}$$

$$=\frac{2+7}{1-2\times 7}=-\frac{9}{13}$$

$$\text{tg}2\beta=\text{tg}[(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)]$$

$$=\frac{\text{tg}(\alpha+\beta)-\text{tg}(\alpha-\beta)}{1+\text{tg}(\alpha+\beta)\text{tg}(\alpha-\beta)}=-\frac{1}{3}$$

例 2　已知 $\mathrm{tg}\alpha=\frac{2}{3}$，求 $\frac{1}{2\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+3\cos^2\alpha}$ 之值.

解　$\because \mathrm{tg}\alpha=\frac{2}{3}$　$\therefore \cos\alpha\neq 0$

$$\text{原式}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+3\cos^2\alpha}=\frac{\mathrm{tg}^2\alpha+1}{2\mathrm{tg}^2\alpha-\mathrm{tg}\alpha+3}$$

$$=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2+1}{2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2-\frac{2}{3}+3}=\frac{13}{29}$$

例 3　已知 $x=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，求 $3x^5-2x^4-30x^3+20x^2+4x-2$ 之值.

解　$\because$　$x=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

两端平方并移项，得

$$x^2-5=-2\sqrt{6}$$

两端再平方，整理得　$x^4-10x^2+1=0$

又 $\because$　$3x^5-2x^4-30x^3+20x^2+4x-2$

$=x^4(3x-2)-10x^2(3x-2)+(3x-2)+x$

$=(3x-2)(x^4-10x^2+1)+x=x$

$\therefore$　$x=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

5.设值法

这种方法是首先设值，然后通过恒等变形，求得结果.

例 1　求 $\cos\frac{\pi}{17}\cos\frac{2\pi}{17}\cdots\cos\frac{8\pi}{17}$ 之值.

解　设 $M=\cos\frac{\pi}{17}\cos\frac{2\pi}{17}\cdots\cos\frac{8\pi}{17}$

$$N=\sin\frac{\pi}{17}\sin\frac{2\pi}{17}\cdots\sin\frac{8\pi}{17}$$

则 $M\cdot N=\sin\frac{\pi}{17}\cos\frac{\pi}{17}\sin\frac{2\pi}{17}\cos\frac{2\pi}{17}$

$$\cdots\sin\frac{8\pi}{17}\cos\frac{8\pi}{17}$$

$$=\frac{1}{2^8}\sin\frac{2\pi}{17}\sin\frac{4\pi}{17}\cdots\sin\frac{16\pi}{17}$$

$$=\frac{1}{2^8}\sin\frac{\pi}{17}\sin\frac{2\pi}{17}\cdots\sin\frac{8\pi}{17}$$

$$=\frac{1}{2^8}N=\frac{1}{256}N$$

$$\because N\neq 0\qquad\therefore M=\frac{1}{256}$$

即　$\cos\frac{\pi}{17}\cos\frac{2\pi}{17}\cdots\cos\frac{8\pi}{17}=\frac{1}{256}$。

例 2　求 $\lg\sqrt[10]{10\sqrt[10]{10\sqrt[10]{10\sqrt[10]{\cdots}}}}$ 之值。

解　设 $x=\lg\sqrt[10]{10\sqrt[10]{10\sqrt[10]{10\sqrt[10]{\cdots}}}}$

则 $x=\lg(10\sqrt[10]{10\sqrt[10]{10\sqrt[10]{\cdots}}})^{\frac{1}{10}}$

$$=\frac{1}{10}(\lg 10+\lg\sqrt[10]{10\sqrt[10]{10\sqrt[10]{\cdots}}})$$

$$=\frac{1}{10}(1+x)$$

$\therefore\quad 10x=1+x$　故　$x=\frac{1}{9}$

即 $\lg\sqrt[10]{10\sqrt[10]{10\sqrt[10]{10\sqrt[10]{\cdots}}}}=\frac{1}{9}$.

例 3　实数a、b、c、d满足$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{a}$，求$\frac{a+b+c+d}{a+b+c-d}$之值.

解　设$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{a}=k$　则$d=ak$　$c=dk=(ak)k=ak^2$　$b=ck=(ak^2)k=ak^3$　$a=bk=(ak^3)k=ak^4$

$\because$　$a\neq 0$　$\therefore$　$k^4=1$　$k=\pm 1$

$$原式=\frac{a+ak^3+ak^2+ak}{a+ak^3+ak^2-ak}=\frac{1+k^3+k^2+k}{1+k^3+k^2-k}$$

$$=\begin{cases}2 & 当k=1时\\ 0 & 当k=-1时.\end{cases}$$

例 4　在$\triangle ABC$中，已知$a:b:c=4:5:6$，且面积为$\frac{15\sqrt{7}}{16}$,求它的最长边，三角形的外接圆和内切圆的半径.

解　令$\frac{a}{4}=\frac{b}{5}=\frac{c}{6}=k$，则$a=4k$，$b=5k,c=6k(k>0)$，因此$c$边最长，所对的$C$角为最大角.

由余弦定理，得：

$$\cos\angle C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{(4k)^2+(5k)^2-(6k)^2}{2\times 4k\times 5k}=\frac{1}{8}$$

$\therefore$　$0^\circ<\angle C<90^\circ$

$$\sin\angle C=\sqrt{1-\cos^2\angle C}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$$

$$又S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin\angle C=\frac{1}{2}\times 4k\times 5k\times\frac{3\sqrt{7}}{8}=\frac{15\sqrt{7}}{16}$$

解之得 $k=\pm\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\text{不合题意，舍去}\right)$

$\therefore \quad c=6k=6\times\frac{1}{2}=3$

$\triangle ABC$外接圆半径为 $\quad R=\frac{c}{2\sin\angle C}=\frac{4\sqrt{7}}{7}$

又 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(a+b+c)r$ （r为内切圆半径）

$\therefore \quad r=\frac{15\sqrt{7}}{16}\div\frac{15}{4}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

故$\triangle ABC$的最长边为 3 ，外接圆半径为 $\frac{4\sqrt{7}}{7}$，内切圆半径为$\frac{\sqrt{7}}{4}$.

6.不等式法

这种方法主要是利用不等式的性质.

例 设α、β、γ都为锐角，且$(3\cos^2\alpha+1)(6\cos^2\beta+5)(5\cos^2\gamma+3)=120\sqrt{6}\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

求$3\cos^2\alpha+2\cos^2\beta+5\cos^2\gamma$之值.

解 因为α、β、γ都为锐角，所以$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$都为正数，利用基本不等式，有

$$3\cos^2\alpha+1\geqslant 2\sqrt{3}\cos\alpha$$

$$6\cos^2\beta+5\geqslant 2\sqrt{30}\cos\beta$$

$$5\cos^2\gamma+3\geqslant 2\sqrt{15}\cos\gamma$$

把上面三式相乘，得

$$(3\cos^2\alpha+1)(6\cos^2\beta+5)(5\cos^2\gamma+3)$$
$$\geqslant 120\sqrt{6}\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

要使上式等号成立，必须

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{3},\cos^2\beta=\frac{5}{6},\cos^2\gamma=\frac{3}{5}$$

$$\therefore\quad 3\cos^2\alpha+2\cos^2\beta+5\cos^2\gamma=5\frac{2}{3}.$$

7.三角法

这种方法是利用三角函数式去代替式中的字母，从而使求值问题变得简单.

例 1　若$a^2+b^2=1$，$c^2+d^2=1$，且$ac+bd=0$，试求$ab+cd$之值.

解　令$a=\sin\alpha$，$b=\cos\alpha$，$c=\sin\beta$，$d=\cos\beta$

于是　$ac+bd=\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha-\beta)=0$

$$\begin{aligned}\therefore\quad ab+cd&=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta\\&=\frac{1}{2}(\sin 2\alpha+\sin 2\beta)\\&=\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=0.\end{aligned}$$

例 2　已知$k=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$（$a>b>0$），求$\frac{k-\sqrt{k^2-1}}{2a\sqrt{k^2-1}}$之值.

解　由$\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}=1$知，可设$\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{\frac{b}{a}}$，$\operatorname{ctg}\alpha=\sqrt{\frac{a}{b}}$（$0^\circ<\alpha<45^\circ$），则

$$k=\frac{1}{2}(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\csc 2\alpha$$

$$\therefore \quad \text{原式} = \frac{\csc 2\alpha - \sqrt{\csc^2 2\alpha - 1}}{2a\sqrt{\csc^2 2\alpha - 1}} = \frac{\csc 2\alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha}{2a \operatorname{ctg} 2\alpha}$$

$$= \frac{1 - \cos 2\alpha}{2a\cos 2\alpha}$$

$$\text{又} \quad \cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1 - \dfrac{b}{a}}{1 + \dfrac{b}{a}} = \frac{a - b}{a + b}$$

$$\therefore \quad \text{原式} = \frac{1 - \dfrac{a-b}{a+b}}{2a \times \dfrac{a-b}{a+b}} = \frac{b}{a(a-b)}.$$

习 题 一

1. 已知实数 x、y、z 满足 $\frac{1}{2}|x - y| + \sqrt{2y + z} + z^2 - z + \frac{1}{4} = 0$，求 $(z + y)^x$ 之值。

2. 若函数 $f(x) = \dfrac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{x^2 + x - 2}$，且 $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$，$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$，试确定 a、b、c、d 之值。

3. 已知 x、y 为有理数，且 $(x - \sqrt{2}y)^2 = 6 - 4\sqrt{2}$，试求 x、y 之值。

4. 已知 a、b 为有理数，且 $\dfrac{2\sqrt[3]{4} - b}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}a + 1} = \sqrt[3]{4} + 1$，求 a、b 之值。

5. 已知 $a - b = 2 + \sqrt{3}$，$b - c = 2 - \sqrt{3}$，求

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$之值。

6． 已知$x=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，$y=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$，求$3x^2-5xy+3y^2$之值。

7． 已知$x^2+y^2-6x-8y+25=0$，x、$y\in R$，求$\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y}$之值。

8． 已知tg$(2A+B)=2$，tg$A=-4$，求tg$(A+B)$之值。

9． 已知$x^2+x-1=0$，求x^3+2x^2+3之值。

10．已知 $\text{tg}\theta=\sqrt{2}$，求$\dfrac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$之值。

11．求$\sin6°\sin42°\sin66°\sin78°$之值。

12．求$\sqrt[3]{4-3\sqrt[3]{4-3\sqrt[3]{4-3\sqrt[3]{\cdots}}}}$之值。

13．若$\dfrac{x}{a-b}=\dfrac{y}{b-c}=\dfrac{z}{c-a}$，求$x+y+z$之值。

14．已知$x=\dfrac{4ab}{a+b}$，求$\dfrac{x+2a}{x-2a}+\dfrac{x+2b}{x-2b}$之值。

15．设 $\text{tg}\theta=-4$，其中$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，求$\sin\theta\cos\theta$之值。

16．设x、y、z都是正数，且$(x^2+1)(y^2+2)(z^2+8)=32xyz$，求$x^2+y^2+z^2$之值。

17．若$x^2+x+1=0$，求$x^{30}+x^{40}+x^{50}$之值。

18．求$10\text{ctg}(\text{arcctg}3+\text{arcctg}7+\text{arcctg}13+\text{arcctg}21)$之值。

19．实数a、b满足$a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=1$，求$a^2+b^2$之值．

20．设$x=\frac{\sqrt{3}}{2}$，求$\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}+\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$之值．