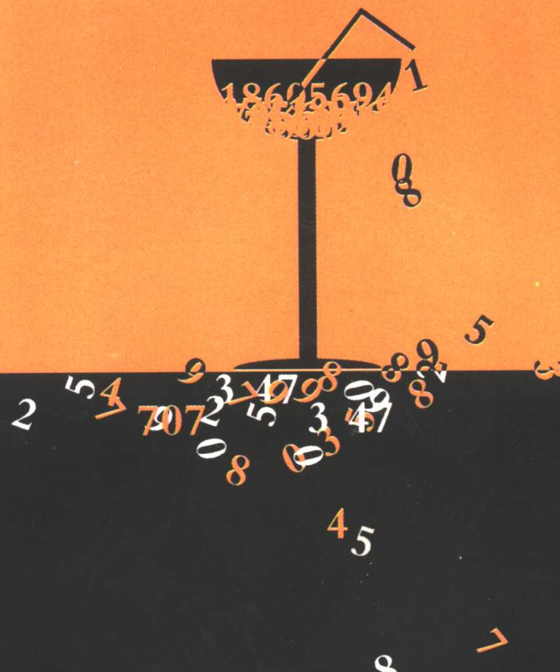
lanzhoudaxuechubanshe

quolangaodengshuxue

liuyaozhaodunbianzhu

qutangaodengshuxue



趣谈高等数学

刘耀　赵敦
编著

兰州大学出版社

9

趣谈高等数学

趣谈高等数学

刘　耀

[illegible]　编著

兰州大学出版社

内容简介

本书着重介绍了高等数学在物理、天体力学、经济优化管理、生态模型、测定化石与地质年代等方面的一些应用，并讲述了高等数学本身的一些有趣的问题。重点在应用，也注意了通俗性、趣味性，以适应多方面读者的需求。

本书可作为各类高等院校学生的课外读物，文科大学生的高等数学教材或参考书，也可作为教师的教学参考书。对于工程技术、企业管理人员和喜欢数学的高中学生来说，也能从书中得到一些有益的启示。

趣谈高等数学

刘 耀
赵 敦 编著

兰州大学出版社出版发行

兰州市天水路308号 电话.8617156 邮编.730000

E-mail:press@lzu.edu.cn

http://www.lzu.edu.cn/press/index.htm

甘肃新视野文化发展有限责任公司印刷

开本：850×1168 1/32 印张:10.75

2000年9月第1版 2000年9月第1次印刷

字数:268千字 印数:1～3000册

ISBN7-311-01679-7/G·642 定价:16.00元

前 言

数学是确切表达科学思想的语言，数学思想在科学发展中起着不可替代的作用。随着科学技术的发展，数学的重要性更加突出。因而，在各类大学，高等数学课程就成了非数学专业学生必修的一门重要的公共基础课，其目的是培养学生的数学意识，让学生会用数学的思维方法和知识去分析问题、解决问题。

然而，作为高等数学教材的书籍，在编写时必然要保持逻辑体系的完整，讲求推理的严密，既要体现数学方法的特点，还要适应不同专业学生的需求，再加上课程学时的限制，就使得高等数学教材的内容选择和写法受到局限。目前国内大部分高等数学教材内容主要是微积分，在应用方面也强调得不够。书中的应用实例，大多局限于几何和物理，面较窄且无法深入展开，这就难以激发学生的兴趣，使不少学生在学习时觉得枯燥，数学课对他们成了一种负担。有许多学生，学完了高等数学却不知怎么去用，这也使得现在很受重视的大学生数学建模活动难以吸引大面积学生参加。

笔者在兰州大学讲授高等数学和数学分析课程 40 年，深感克服这些问题的一个有效办法是给学生编写一些课外读物，举办高等数学专题讲座，介绍一些趣味性强的问题或新鲜有趣的应用实例。这样既能提高学生的学习兴趣，加深对课堂所学知识的理解，又能培养他们解决实际问题的能力，激发他们探索新问题的求知热情。对于数学系的学生，数学模型课程的设置就是为了解决这一问题，但对其他系科的学生来说，限于高等数学的基础，数学模型课程内容比较艰深。可喜的是，现在已有高等数学应用方面的书籍出版，但笔者所见的这类书，体系不是自足的，要完全弄懂其中的

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

内容，还需查阅大量文献，这对于很多学生来说是比较困难的。

本书是针对上面提到的问题而编写的，目的在于提供一本高等数学教材的辅助读物，帮助学生提高学习高等数学的兴趣和应用能力。本书是根据笔者的教学体会，在过去教学中积累的丰富资料的基础上，参阅了一些书籍整理而成。这本书只需要高等数学的基本知识就可全部或大部分读懂。本书以高等数学的应用为重点，还选择了一些趣味性的问题，有些内容涉及到通常高等数学教材以外的一些知识，可以开阔学生的视野。本书力求通俗易懂，即使没有学过高等数学的读者也可看懂部分内容，增加对高等数学的了解。我们有意放弃了某些论证的严密性而突出了直观性，希望有助于读者抓住问题的本质。

限于作者水平，书中的错误、缺点在所难免，欢迎批评指正。

在此要感谢兰州大学出版社的同志对该书的大力支持，没有他们的帮助，这本书是不会这么快与读者见面的。

刘耀　赵敦

1999年6月

目　录

第一章　数的进位制与找假珍珠……………………………（1）
(一)从数说起……………………………………………………（1）
(二)数的进位制…………………………………………………（8）
(三)二进制与猜数字游戏 ………………………………（13）
(四)盘子装箱问题 ………………………………………（14）
(五)砝码问题 ……………………………………………（16）
(六)找出假珍珠 …………………………………………（20）
(七)揭开猜朴克的奥妙 …………………………………（22）
(八)梵塔与世界末日的传说 ……………………………（25）
第二章　无限王国奇遇 ……………………………………（27）
(一)希尔的宾馆和集合的基数 …………………………（28）
(二)有理数集是可列集 …………………………………（30）
(三)实数集不是可列集 …………………………………（33）
(四)平面点集和实数集等势 ……………………………（35）
(五)康托(Cantor)集合 …………………………………（37）
(六)无限集的势是没有尽头的 …………………………（38）
(七)阿列夫家族与连续统假设 …………………………（40）
(八)康托悖论 ……………………………………………（41）
(九)认识的无限性与知识的无限性 ……………………（44）
(十)一列队伍无头无尾 …………………………………（45）
第三章　极限方法与极限概念 ……………………………（47）
(一)关于圆周率 π 的故事 ………………………………（47）
(二)牛顿—莱布尼兹创立了微积分 ……………………（52）

(三)极限过程与极限概念 ………………………………… (55)
(四)极限的局部性 ………………………………………… (59)
(五)等比级数求和 ………………………………………… (60)
(六)几个有趣的例子 ……………………………………… (63)
(七)抛球悖论 ……………………………………………… (65)
(八)实无穷与潜无穷 ……………………………………… (66)
(九)无穷小量的无穷多层次 ……………………………… (67)
第四章 无穷级数与国王的宝盒 ……………………… (70)
(一)无穷级数 ……………………………………………… (70)
(二)神奇的天平 …………………………………………… (75)
(三)无穷级数和无穷积分的相似性 ……………………… (78)
(四)函数项级数与函数的级数展开 ……………………… (82)
(五) p- 级数及级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和……………………… (89)
(六)付里哀级数 …………………………………………… (90)
(七)国王的宝盒 …………………………………………… (93)
第五章 牛顿是怎样发现万有引力定律的 …………… (98)
(一)天体运动的轨道曲线 ………………………………… (98)
(二)牛顿是怎样发现万有引力定律的…………………… (102)
(三)算一算地球的质量…………………………………… (106)
(四)用曲线积分证明开普勒第二定律…………………… (107)
(五)卫星的最大与最小速度……………………………… (109)
(六)天体运动知识总结…………………………………… (111)
(七)第一宇宙速度………………………………………… (113)
(八)第二宇宙速度………………………………………… (114)
(九)第三宇宙速度………………………………………… (116)
(十)地面与月面运动的对比……………………………… (118)
(十一)陨石的下落………………………………………… (120)

第六章　平均值及有关的不等式……………………………（124）
(一)从平均值到数学期望……………………………………（124）
(二)决策树方法………………………………………………（130）
(三)平均值与积分的近似计算………………………………（132）
(四)利用平均值展开函数为幂级数…………………………（135）
(五)柯西平均值不等式………………………………………（138）
(六)用倒推归纳法证明柯西平均值定理……………………（142）
(七)用倒推归纳法证明乘幂平均数不等式…………………（144）
(八)柯西定理的一个等价性命题……………………………（149）
(九)利用微分学知识推导柯西平均值不等式………………（150）
(十)有关平均值不等式的几个极限…………………………（151）
第七章　数 e 与地质年代的测定………………………………（155）
(一)数 e ………………………………………………………（155）
(二)数 e 是无理数的证明……………………………………（161）
(三)欧拉常数…………………………………………………（163）
(四)连续复利与马尔萨斯人口模型…………………………（165）
(五)平均寿命增加，人口总数是增加还是减少 ……………（168）
(六)生物种群的数学模型……………………………………（169）
(七)测定化石年代的碳定年代法……………………………（171）
(八)名画伪造案的判定………………………………………（174）
(九)地质年代的铷-锶测定法 ………………………………（176）
(十)双曲函数与三角函数对比………………………………（178）
第八章　杨辉三角与牛顿二项式定理…………………………（184）
(一)杨辉三角…………………………………………………（184）
(二)有意思的巧合……………………………………………（188）
(三)有限数列的和数列的一个有用结论……………………（192）
(四)牛顿是怎样求 π 的近似值的 ………………………（194）
(五)三项式系数………………………………………………（196）

(六)多项式定理…………………………………………………… (197)
(七)整数幂和公式的递推……………………………………… (198)
(八)奇特的想法……………………………………………………… (200)
(九)滚珠金字塔……………………………………………………… (202)
(十)错装信封问题………………………………………………… (204)
(十一)斯特林公式………………………………………………… (206)
第九章　优化管理…………………………………………………… (210)
(一)极值理论回顾………………………………………………… (210)
(二)蛛网模型………………………………………………………… (214)
(三)最大利润………………………………………………………… (216)
(四)最优广告策略………………………………………………… (219)
(五)进货批量的优化……………………………………………… (223)
(六)经济量的弹性问题………………………………………… (224)
(七)最小二乘法…………………………………………………… (225)
(八)统计相关分析………………………………………………… (231)
第十章　搜索法……………………………………………………… (234)
(一)用对分法求函数方程的近似解…………………………… (234)
(二)黄金分割法(0.618 法)……………………………………… (235)
(三)斐波那契(Fibonacci)数列　…………………………… (241)
(四)斐波那契数与魔术师……………………………………… (245)
(五)梯度搜索法…………………………………………………… (246)
(六)线性规划模型………………………………………………… (248)
(七)运输问题的表上作业法…………………………………… (251)
第十一章　七桥问题与中国邮路问题…………………………… (256)
(一)七桥问题……………………………………………………… (256)
(二)四色问题……………………………………………………… (259)
(三)中国邮递员问题……………………………………………… (260)
(四)运输问题的图上作业法…………………………………… (262)

(五)最短路问题……………………………………………… (267)
(六)连线问题………………………………………………… (269)
(七)分配问题与最优对集…………………………………… (271)
第十二章　几种有趣的曲线和有趣的函数……………… (275)
(一)旋轮线及最速下降问题……………………………… (275)
(二)旋轮线为什么也叫摆线……………………………… (279)
(三)惠更斯钟摆……………………………………………… (283)
(四)星形线…………………………………………………… (286)
(五)圆内旋轮线……………………………………………… (288)
(六)圆外旋轮线……………………………………………… (290)
(七)悬链线…………………………………………………… (292)
(八)螺线与四人追逐游戏………………………………… (294)
(九)从狗追兔子到导弹打飞机…………………………… (297)
(十)几个有趣的函数………………………………………… (300)
第十三章　求质量与积分计算…………………………… (306)
(一)密度与概率分布………………………………………… (306)
(二)非均匀杆的质量与定积分…………………………… (309)
(三)几类质量问题与几种积分概念……………………… (312)
(四)化二重积分为累次积分……………………………… (315)
(五)利用极坐标计算二重积分…………………………… (317)
(六)化三重积分为累次积分……………………………… (320)
(七)利用球面坐标计算三重积分………………………… (323)
(八)利用柱面坐标计算三重积分………………………… (326)
(九)化一型曲线积分为定积分…………………………… (327)
(十)化一型曲面积分为二重积分………………………… (329)
参考书目……………………………………………………… (332)

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第一章　数的进位制与找假珍珠

（一）从数说起

数是我们生活中表示一切数量关系的尺度。从结绳、刻痕、串在细绳上的贝壳这些记录数的萌芽，可以肯定数的概念是在离我们现在极其遥远的人类生存时期就已产生。数的概念的出现在有文字之前，因此我们不能确知人类究竟何时和怎样才产生了数的概念，只能从有关数的“遗迹”和推理做些猜测。

远古时期的人类，在狩猎、采集食物和分配物品的过程中，逐渐有了“多”和“少”的比较。人类从“多与少”这个概念中，分出“一”这个概念，是人类在数的概念形成过程中迈出的决定性的一步，曾经生活在巴西的保托库德部落就只用“一”和“多”两个词来表达数。人总是用一只手拿物品，经过漫长的岁月，人类终于有了数“一”。对于“二”的出现，可以解释为双手各拿一件物品所致。现在我们知道，距今6000年前的我国西安半坡村人已掌握了从一到九的全部数字，这可能是人类对数字一到九有明确认识的最早时间。

在计数的初级阶段，人们用一只手拿物品，用两只手各拿一个物品，把第三个物品放在脚边，用五个指头计算五，用两只手，甚至用脚趾这些人身上的“计算器”去记数。例如南美的印第安人，为了表示数“二十”就把手指和脚趾合在一起。

可以想象，在数字概念形成的早期，并不是人人都会计数。会

计数的人是受特别崇拜的。当某个人在分配物品时，他可能无意识地发出某种习惯的声音，引起别人的注意，于是大家就会模仿他。如果我们那位祖先 —— 最早的计数权威，在数物品时习惯性地发出"一"、"二"、"三"的声音（也许是容易发出的"哼"、"哈"、"呼"，后来被某个酋长改为"一"、"二"、"三"，但这并不重要，重要的是用一个声音表示数。），数就正式诞生了。

人类对数的认识过程一方面伴随着计数的实际需要，另一方面也伴随着由于对数的认识而产生的关于数的运算的需要。比如先捕到 4 只兔子，又捕到 5 只兔子，一共捕到了几只兔子？这就产生了加法的概念。进而，逐渐地产生了减法、乘法和除法的概念。可以相信，最初的简单计算，是有手指、脚趾等身体部位参予的。

"0"的创造，在人类的数学史中，经历了十分艰难的漫长岁月。"0"是一个数，但这个数却表示什么都没有。据现有的资料，在公元前 4 世纪的春秋战国时代，我国古代数学家开始有了"0"的表示法和对"0"的运用。这是现在所知道的人类明确使用"0"这一概念的最早时间，这一时间比西方数学史专家所认为的最早时间 —— 印度人开始使用"0"的时间，早了近 1000 年。

"0"的产生和十进制记数法的确立，使人类计数的概念产生了飞跃，到这个时候，自然数系就形成了。

现在我们称 0,1,2,3,…… 为自然数。自然数的直观概念就是：它们是这样一种数，它们中的每一个都可以通过从 0 开始不断加 1 而得到。在现代数学中，为了逻辑上的需要，采用公理来描述自然数。意大利数学家 Giuseppe Peano（1858 ～ 1932）关于自然数的公理是：

自然数系是这样一个非空集合 N，其中有一个选定了元素 0，和一个 N 到自身的映射 $a \mapsto a^+$，称之为后继映射，a^+ 称为 a 的后继，满足

i）　**映射 $a \mapsto a^+$ 是单射，即从 $a^+ = b^+$ 推出 $a = b$；**

ii）　0 不是任何元素的后继，即不存在 $a \in N$，使得 $a^+ = 0$；

iii）　如果 N 的任一个子集 S 满足，1）$0 \in S$；2）对所有的元素 $a \in N$，从 $a \in S$，恒有 $a^+ \in S$，则 $S = N$。

从公理 *i*）和 *ii*）可推出 N 是一个无穷集合，公理 *iii*）就是我们常用的数学归纳法的原理。

在从自然数系向有理数系的发展过程中，负数概念的形成是至为关键的一步。人类很早就有了分数的概念，公元前 2100 年前的巴比伦人曾经使用 60 进位的分数，公元前 1650 年左右的古埃及人 Ahmes 的手册中，出现了十进制的单分数（分子是 1 的分数）。然而负数的概念的形成却要晚得多。从《九章算术》中看，我国古代数学家对负数的认识始于 2000 多年前。大约生活在三世纪的希腊数学家丢番图，虽没有明确提出负数概念，但当需要把两个数的差乘以另两个数的差时，他运用的法则是："消耗数乘以消耗数得到增添数，消耗数乘以增添数得到消耗数。"丢番图实质上是以消耗数表示负数，增添数表示正数。西方数学史专家公认的负数产生的时间是德国数学家米哈伊尔·史提非（1486 ～ 1567）于 1544 年建立负数概念和运算法则。

当负数概念明确形成后，整数系和有理数系就随之产生了。今天，我们把一个有理数定义为两个整数之比 $\frac{p}{q}$，$q \neq 0$，有理数包括了一切整数和一切分数。如果把整数看做以 1 为分母的特殊的分数，那么，有理数系就是全体分数。

无理数的发现比负数的发现要早。公元前五世纪到公元前六世纪的毕达哥拉斯（约公元前 585 年到公元前 497 年）学派，在数学史上占有重要地位，该学派规定在数学中必须坚持严格证明，这就给数学增添了特殊的科学意义。该学派确信：给定任何两个线段，必存在第三个线段，使得给定的两个线段的长度都是第三个线段长度的整数倍。即任何两个线段是可公度的，它们长度之比是个

分数。后来毕达哥拉斯学派发现了著名的毕达哥拉斯定理(勾股定理),由此定理知边长为1的正方形,其对角线长为$\sqrt{2}$,而$\sqrt{2}$不是分数。

因若$\sqrt{2}=\frac{p}{q}$,q和p是既约整数。

则 $2=\frac{p^2}{q^2}$,从而$p^2=2q^2$。因为奇数之积必为奇数,所以p必为偶数。设$p=2r$,则又得到$q^2=2r^2$,于是q也必为偶数。p、q都是偶数,2是公因子,这与p,q是既约的前提矛盾,故$\sqrt{2}$不是分数。

$\sqrt{2}$不是分数,使当时的希腊数学界大为震惊。因为毕达哥拉斯学派建立的数学理论,特别是有关相似三角形的几何定理,都是基于两个线段的可公度性而证明的,这就导致了数学史上的第一次危机。这一危机持续了一百多年,大约到公元前370年,才由于欧多克斯(约公元前408～公元前355)的比例论消除了这一危机。

用十进位小数的观点看,有理数就是有限小数或无限循环小数。由于任意两个有理数之间有无穷多个有理数,有理数在数轴上是处处稠密的,但有理数不能充满数轴,有理数对应点之外的那些点对应的数是无理数,无理数就是无限而不循环的小数。有理数和无理数合起来统称为实数。数轴上的点和实数之间存在一一对应关系,实数对应的点充满了整个数轴,所以称实数是个连续的系统。

戴德金特(Dedekind,1831～1916)在有理数的基础上给实数下了适宜于数学推理的定义。他定义一个实数α是对全体有理数的一个“分割”。所谓分割是指把全体有理数分为两个互不相交的非空集合,其一称为上集,记为α_A;另一个称为下集,记为α_B。要求α_B中的任一个数都小于α_A中的随便一个数。如果上集α_A有最小值或下集α_B有最大值,则该分割就定义了一个有理数α,α就是α_A的

最小值或 α_B 的最大值(显然不可能 α_A 有最小值，同时 α_B 又有最大值。因为若 α_A 有最小值 A，同时 α_B 有最大值 B，则由分割的定义必有 $B < A$，那么 $\frac{A+B}{2}$ 既不在 α_A 中，又不在 α_B 中，与分割的定义矛盾。) 如果 α_A 没有最小值，同时 α_B 没有最大值，则该分割定义了一个无理数 α。例如，把所有平方大于 2 的正有理数作为 α_A，所有平方小于 2 的正有理数以及 0 和负有理数作为 α_B，这样由 α_A 和 α_B 给出的分割就定义了实数 $\sqrt{2}$。戴得金特分割实际上就是把实数轴从 α 分开，α 右边的有理数组成 α_A，α 左边的有理数组成 α_B。从实数分割定义出发可以得到一些关于实数的基本定理，如确界存在定理，单调有界原理，区间套定理等，这些命题是严格的极限理论的基础。

人们最早使用虚数的时间和史提非建立负数理论的时间几乎相同。1545 年，意大利数学家卡尔丹诺(1501 ～ 1576) 出版了他的数学名作《大衍术》，在书中给出的三次代数方程的求根公式中，明显涉及到了负数的平方根。卡尔丹诺虽然借用虚数求解方程，但他本人却认为这样的数“既捉摸不定，又没有用处”，放弃了对虚数的研究。直到 18 ～ 19 世纪，丹麦数学家卡斯巴·米塞尔，法国的婆叶、费朗塞等人给出了复数在平面上的几何解释，人们开始逐渐接受复数。1799 年高斯(1777 ～ 1855) 对现在称之为代数基本定理的命题做出了第一个合理而完整的证明，复数的表达式 $a+b\mathrm{i}$ 是高斯在探讨四次剩余中第一次提出的(在 1825 年和 1831 年的著作中)。高斯死后，虚数和复数开始被广泛应用。

人们一般对复数的看法是，它是 $a+b\mathrm{i}$ 这样的混杂数，其中 a 和 b 是实数，而 i 是使 $\mathrm{i}^2=-1$ 的一种非实数。对这些数进行加法和乘法运算时，把复数看成 i 的小于或等于一次的多项式，结果中出现 i^2 时以 -1 代替，即

$$(a+b\mathrm{i})+(c+d\mathrm{i})=(a+c)+(b+d)\mathrm{i}$$

$$(a+b\mathrm{i})\cdot(c+d\mathrm{i})=(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}$$

爱尔兰数学家哈密尔顿(1805～1865)发现，复数可以直接以有序实数对(a,b)来表示。他定义：(a,b)与(c,d)这两个实数对为相等，当且仅当$a=c$且$b=d$，哈密尔顿定义加法和乘法如下：

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

$$(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

容易验证，有序实数对的上述加法和乘法符合交换律、结合律、消去律、以及乘法对加法的分配律。在有序实数对的集合上定义了上述的相等、加法和乘法后，除了表示形式的差异外，复数$a+b\mathrm{i}$本质上和(a,b)就是一回事了。这一看法使得人们可以用公理的方式去定义复数。其实有理数也可以完全类似地用有序整数对$(a,b)(b\neq 0)$来定义：

$$(a,b)=(c,d)\Leftrightarrow ad=bc \qquad \left(\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow ad=bc\right)$$

$$(a,b)+(c,d)=(ad+bc,bd) \qquad \left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}\right)$$

$$(a,b)(c,d)=(ac,bd) \qquad \left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}\right)$$

在上述发现的启发下，哈密尔顿发明了四元数作为复数的推广。

在有序实数四元数组(a,b,c,d)构成的集合中，定义

$$(a,b,c,d)=(e,f,g,h)\Leftrightarrow a=e,b=f,c=g,d=h,$$

并定义加法和乘法使得实数和复数能被嵌入到四元数中。如果把实数a和四元数$(a,0,0,0)$对应，把复数$a+b\mathrm{i}$和四元数$(a,b,0,0)$对应，那么，加法和乘法必须满足

$$(a,0,0,0)+(e,0,0,0)=(a+e,0,0,0)$$

$$(a,0,0,0)(e,0,0,0)=(ae,0,0,0)$$

$$(a,b,0,0)+(e,f,0,0)=(a+e,b+f,0,0)$$

$$(a,b,0,0)(e,f,0,0)=(ae-bf,af+be,0,0)$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com