高數題庫3650 (9)

圓・球面及圓錐曲線

出 版 者／牛頓出版股份有限公司
負責人：高源清
著 作 人／牛頓出版股份有限公司
發 行 所／牛頓出版股份有限公司
地 址／臺北市和平東路二段107巷25-1號1樓
電 話／7061976・7061977・7062470・7059942
傳眞：7014422
郵 撥／1179402-3牛頓出版股份有限公司
製 版／詮盛彩色製版股份有限公司
印 刷／江淮印刷股份有限公司
出版登記證／局版臺業字第3139號
法律顧問／林樹旺律師
初 版／中華民國79年9月10日
定 價／新臺幣120元

圓 與 球

圓方程式(題號1～18)

1. 心徑式

以(h, k)爲圓心，r爲半徑之圓方程式爲

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

2. 直徑式

設$P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$，則以$\overline{P_1P_2}$爲直徑的圓方程式爲

$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$

3. 一般式

$x^2+y^2+dx+ey+f=0$……………………………①

設$\Delta=d^2+e^2-4f$

(1)若$\Delta>0$時，①式表一圓，圓心爲$\left(-\dfrac{d}{2}, -\dfrac{e}{2}\right)$，

半徑爲 $\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2}$

(2)若$\Delta=0$時，①式表一點$\left(-\dfrac{d}{2}, -\dfrac{e}{2}\right)$

(3)若$\Delta<0$時，①式表空集合

4. 圓系

(1)過兩圓C_1：$x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1=0$與

C_2：$x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2=0$之交點的圓系可設爲

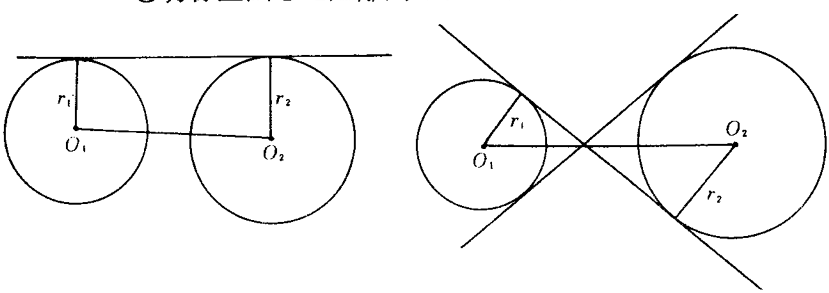
$(x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1)+k(x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2)=0$

(2)過圓C：$x^2+y^2+dx+ey+f=0$與
直線L：$ax+by+c=0$之交點的圓系可設爲
$(x^2+y^2+dx+ey+f)+k(ax+by+c)=0$

◉ 圓與直線的位置關係(題號19～61)

1. 設圓$x^2+y^2=r^2$與直線$y=mx+b$
(1)圓與直線相交於兩相異點之條件爲
$(m^2+1)r^2>b^2$
(2)圓與直線相切之條件爲
$(m^2+1)r^2=b^2$
(3)圓與直線不相交之條件爲
$(m^2+1)r^2<b^2$

2. 兩圓的公切線
如下圖所示
(1)外公切線長$=\sqrt{\overline{O_1O_2}^2-(r_1-r_2)^2}$
(2)內公切線長$=\sqrt{\overline{O_1O_2}^2-(r_1+r_2)^2}$
(3)兩外公切線之交點與兩內公切線之交點坐標，利用分點公式求解之。
(4)兩公切線的夾角，利用三角函數之定義求解之。
(5)兩公切線方程式的求法：
①先求交點坐標。
②令切線方程式爲$y-y_0=m(x-x_0)$
③切線至圓心之距離爲半徑，求得斜率m。



3. 圓的切線

(1) $P(x_0, y_0)$是圓$x^2+y^2+dx+ey+f=0$外一點，過P作圓之切線：

方法 $\begin{cases} \text{a. 令切線方程式爲} y-y_0=m(x-x_0) \cdots\cdots L \\ \text{b. } d(L, O)=r\text{，求出}m \end{cases}$

(O, r分別是圓之圓心與半徑)

(2)過圓$x^2+y^2+dx+ey+f=0$上一點$P_0(x_0, y_0)$的切線方程式爲 $x_0x+y_0y+d\cdot\dfrac{x_0+x}{2}+e\cdot\dfrac{y_0+y}{2}+f=0$

(3)圓：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，已知切線斜率m，則切線方程式爲 $y-b=m(x-a)\pm r\sqrt{1+m^2}$

4. 根軸

(1)定義：設兩圓$x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1=0$

與$x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2=0$

則根軸方程式爲

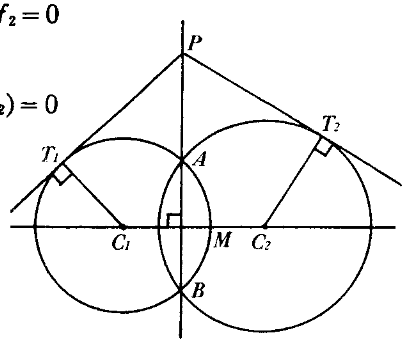
$(d_1-d_2)x+(e_1-e_2)y+(f_1-f_2)=0$

(2)根軸的性質

如圖：設P爲根軸上任一點，

則 ① $\overline{PT_1}=\overline{PT_2}$

② $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PT_1}^2$



5. 正交圓

(1)定義：過二相交圓之一交點各作一切線，則此二切線之交角稱爲此二圓之交角。當此交角之度量θ爲$\dfrac{\pi}{2}$時，稱此二圓正交。

(2)二相交圓正交之條件

設二相交圓爲：C_1：$x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1=0$；

C_2：$x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2=0$

若二圓C_1, C_2正交 $\Leftrightarrow$ $d_1d_2+e_1e_2=2(f_1+f_2)$

◉ 球面及其切平面（題號62～94）

1. 球面的方程式

(1)以$P_0(x_0, y_0, z_0)$為球心，r為半徑之球面的方程式為

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$$

(2)以$P_1(x_1, y_1, z_1)$,$P_2(x_2, y_2, z_2)$

為一直徑的兩端點之球面方程式為

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+(z-z_1)(z-z_2)=0$$

(3)球面的一般方程式 $x^2+y^2+z^2+dx+ey+fz+g=0$

①當$d^2+e^2+f^2-4g>0$時，表一球面，其球心為

$\left(-\frac{d}{2}, -\frac{e}{2}, -\frac{f}{2}\right)$，半徑為$\frac{1}{2}\sqrt{d^2+e^2+f^2-4g}$

②當$d^2+e^2+f^2-4g=0$時

表一點$\left(-\frac{d}{2}, -\frac{e}{2}, -\frac{f}{2}\right)$，也叫做點球面。

③當$d^2+e^2+f^2-4g<0$時，沒有圖形，也叫做虛球面。

2. 切平面

(1)切平面

①過球$x^2+y^2+z^2=r^2$上一點(x_0, y_0, z_0)

之切平面方程式為 $x_0x+y_0y+z_0z=r^2$

②過球$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$上一點$(x_0, y_0, z_0)$

之切平面方程式為

$$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)+(z_0-c)(z-c)=r^2$$

③過球$x^2+y^2+z^2+dx+ey+fz+g=0$上一點

(x_0, y_0, z_0)之切平面方程式為

$$x_0x+y_0y+z_0z+d\cdot\frac{x_0+x}{2}$$

$$+e\cdot\frac{y_0+y}{2}+f\cdot\frac{z_0+z}{2}+g=0$$

④過球外一線L的切平面可利用包含L之平面族與球心之距離等於半徑以求之。

(2)切線長：自球外一點$P(x_0, y_0, z_0)$作球

S：$x^2+y^2+z^2+dx+ey+fz+g=0$之切線長

$$=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2+dx_0+ey_0+fz_0+g}$$

(3)根平面

球S_1：$x^2+y^2+z^2+d_1x+e_1y+f_1z+g_1=0$

S_2：$x^2+y^2+z^2+d_2x+e_2y+f_2z+g_2=0$

爲二相異球，則平面

E：$(d_1-d_2)x+(e_1-e_2)y+(f_1-f_2)z+(g_1-g_2)=0$

稱爲S_1與S_2之根平面，E上之任一點至二球之切線長相等。

(4)切點面

①球外一點P，作球S之切線的切點集合爲一圓C，則包含圓C之平面，稱爲切點面。

②設$P(x_0, y_0, z_0)$爲球$x^2+y^2+z^2+dx+ey+fz+g=0$外一點，則自P作球之切線，切點所成之集合爲一圓，包含此圓的切點面方程式爲

$$x_0x+y_0y+z_0z+\frac{d}{2}(x_0+x)+\frac{e}{2}(y_0+y)+\frac{f}{2}(z_0+z)+g=0$$

1 Ⅲ 三 ★

試求滿足下列條件的圓方程式：

(1)以點$(-4, 3)$爲圓心，且通過原點的圓。

(2)圓心在直線$y=-x$上，且通過兩點$(2, 0), (0, -4)$。

(3)以$A(-5, 2), B(3, -4)$爲直徑的兩端點的圓。

【詳解】 (1)設所求圓方程式爲

$(x+4)^2+(y-3)^2=r^2 (r>0)$

$\because$ 通過原點

$\therefore$ $(0+4)^2+(0-3)^2=r^2$

$\therefore$ $r=5$

$\therefore$ $(x+4)^2+(y-3)^2=5^2$

(2)設圓心坐標爲$(a, -a)$

圓方程式爲$(x-a)^2+(y+a)^2=r^2$

$\because$ 通過$(2, 0), (0, -4)$

$$\therefore \begin{cases} (2-a)^2+a^2=r^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ a^2+(a-4)^2=r^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

由①, ②得 $a=3, r^2=10$

$\therefore$ $(x-3)^2+(y+3)^2=10$

(3)$\because$ $\overline{AB}$爲直徑

$\therefore$ 圓心爲$\overline{AB}$的中點$=(-1, -1)$

半徑爲$\overline{AB}$長度的一半

亦即，半徑$=\dfrac{1}{2}\sqrt{(-5-3)^2+(2+4)^2}=5$

$\therefore$ 圓方程式爲 $(x+1)^2+(y+1)^2=25$

另　解　(3)如圖，

設圓上一點$P(x, y)$

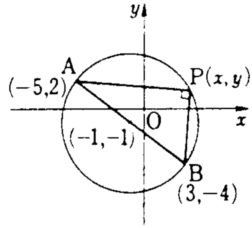
則$\overline{PA}$的斜率$=\dfrac{y-2}{x+5}$

$\overline{PB}$的斜率$=\dfrac{y+4}{x-3}$

$\because\ \angle APB=90^0$

$\therefore\ \dfrac{y-2}{x+5}\cdot\dfrac{y+4}{x-3}=-1$

$\therefore\ (x+5)(x-3)+(y-2)(y+4)=0$



2　Ⅲ　三　★

以兩定點$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$爲直徑的兩端點的圓，其方程式爲$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$，試證明之。

【詳解】　設圓上一點$P(x, y)$

直線PA的斜率$=\dfrac{y-y_1}{x-x_1}$

直線PB的斜率$=\dfrac{y-y_2}{x-x_2}$

$\because\ \angle APB=90°$

$\therefore\ \dfrac{y-y_1}{x-x_1}\cdot\dfrac{y-y_2}{x-x_2}=-1$

$\therefore\ (x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$

3 Ⅲ 三 ★

求下列各圓的方程式：

(1)圓心爲(3, 4)，且與x軸相切。

(2)圓心爲(3, 4)，且過點(7, 0)。

(3)圓心在直線$y=x+1$上，且通過點(3, 2)，和x軸也相切。

【詳解】 (1)$\because$ 圓心$=(3, 4)$，且與x軸相切

$\therefore$ 半徑$=4$

$\therefore$ $(x-3)^2+(y-4)^2=4^2$

(2)設半徑$=r$

$\therefore$ $r^2=(7-3)^2+(0-4)^2=32$

$\therefore$ 圓方程式爲$(x-3)^2+(y-4)^2=32$

(3)設圓心爲$(\alpha, \alpha+1)$

半徑$=r$

$\because$ 和x軸相切

$\therefore$ $r=\alpha+1$

$\therefore$ $(x-\alpha)^2+(y-\alpha-1)^2=(\alpha+1)^2$

以(3, 2)代入

$\Rightarrow$ $(3-\alpha)^2+(2-\alpha-1)^2=(\alpha+1)^2$

$\therefore$ $\alpha^2-10\alpha+9=0$

$\therefore$ $(\alpha-1)(\alpha-9)=0$

$\therefore$ $\alpha=1$或9

若$\alpha=1 \Rightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=4$

若$\alpha=9 \Rightarrow (x-9)^2+(y-10)^2=100$

4 Ⅲ 三 ★

圓心在x軸上，且通過兩點$A(3,\ -4)$, $B(-2,\ 1)$的圓，試求其方程式。

【詳解】 設圓心爲$C(\alpha, 0)$

$\because\quad \overline{CA}^2=\overline{CB}^2=(\text{半徑})^2$

$\therefore\quad (\alpha-3)^2+4^2=(\alpha+2)^2+1^2$

$\Rightarrow\quad 10\alpha=20$

$\therefore\quad \alpha=2$

$\therefore\quad (\text{半徑})^2=\overline{CA}^2=(2-3)^2+4^2=17$

$\therefore$ 圓方程式爲$(x-2)^2+y^2=17$

研　究 若圓心在x軸上，且通過$A(3,\ -4)$，則此圓也必定通過$A'(3, 4)$——點A關於x軸的對稱點。
所以，本題也可以藉由$A(3,\ -4)$, $A'(3,\ 4)$, $B(-2,\ 1)$這三點來決定圓的方程式。

5 Ⅲ 三 ★

(1)$x^2+y^2-4x+10y+30=0$是否爲某一個圓的方程式。

(2)求$x^2+y^2+ax+by+c=0$爲圓的方程式的充要條件。

【詳解】 (1)$\because\quad x^2+y^2-4x+10y+30=0$

$\Rightarrow\quad (x-2)^2+(y+5)^2=-1$

$\Rightarrow\quad r^2=-1$

$\therefore$ 不存在實數r, 故不是圓的方程式

(2)$\because\quad x^2+y^2+ax+by+c=0$

$$\Rightarrow\quad \left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c$$

$\therefore$ 它要成爲圓的方程式的充要條件是$\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{b^2}{4}-c>0$

6 Ⅲ 三 ★

下列各方程式若爲圓的方程式，則求出它的圓心和半徑。

(1)$x^2+y^2+2x-6y+1=0$

(2)$x^2+y^2-6x+5y-3=0$

(3)$4x^2+4y^2-24x-28=0$

(4)$2x^2+2y^2-x+6y+5=0$

【詳解】(1)原式化爲$(x+1)^2+(y-3)^2=3^2$

$\therefore$ 圓心$=(-1,3)$，半徑$=3$

(2)原式化爲$x^2-6x+9+y^2+5y+\dfrac{25}{4}=9+3+\dfrac{25}{4}$

$$\therefore\quad (x-3)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{73}}{2}\right)^2$$

$\therefore$ 圓心$=\left(3,-\dfrac{5}{2}\right)$，半徑$=\dfrac{\sqrt{73}}{2}$

(3)原式化爲$x^2+y^2-6x-7=0$

$\therefore\quad x^2-6x+9+y^2=16$

$\therefore\quad (x-3)^2+y^2=4^2$

$\therefore$ 圓心$=(3,0)$，半徑$=4$

(4)原式化爲$x^2-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{16}+y^2+3y+\dfrac{9}{4}=\dfrac{1}{16}+\dfrac{9}{4}-\dfrac{5}{2}$

$$\therefore\quad \left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=-\frac{3}{16}$$

$\therefore$ 這個方程式不代表圓。

7 Ⅲ 三 ★

試求通過(0, 0), (2, 3), (3, 4)三點的圓方程式。

【詳解】 設圓方程式爲

$x^2+y^2+ax+by+c=0$ ………………… ①

$\because$ 通過(0, 0), (2, 3), (3, 4)

$$\therefore \begin{cases} c=0 & \cdots\cdots ② \\ 4+9+2a+3b+c=0 & \cdots\cdots ③ \\ 9+16+3a+4b+c=0 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

將②代入③, ④

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+3b+13=0 \\ 3a+4b+25=0 \end{cases}$$

$\therefore$ $a=-23,\ b=11$

$\therefore$ 圓方程式爲$x^2+y^2-23x+11y=0$

注 意 這也就是以已知三點爲頂點的三角形的外接圓方程式。

8 Ⅲ 三 ★

試求通過$(-3, 0), (-1, 2), (-2, -\sqrt{3})$的圓的方程式。

【詳解】 設所求方程式爲

$x^2+y^2+ax+by+c=0$

$\because$ 通過$(-3, 0), (-1, 2), (-2, -\sqrt{3})$

$$\therefore \begin{cases} 9-3a+c=0 & \cdots\cdots ① \\ 1+4-a+2b+c=0 & \cdots\cdots ② \\ 4+3-2a-\sqrt{3}b+c=0 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

由②－① $\Rightarrow$ $2a+2b=4$ ……………………… ④

由③－① $\Rightarrow$ $a-\sqrt{3}b=2$ ……………………… ⑤

由④, ⑤得 $a=2,\ b=0$

將$a=2$代入① $\Rightarrow$ $c=-3$

$\therefore$ 圓方程式爲 $x^2+y^2+2x-3=0$

9 Ⅲ 三 ★★

試求下列三直線所成的三角形的外接圓的方程式。

$x-y=-1,\quad x+y=3,\quad x+2y=-1$

【詳解】 $\begin{cases} x-y=-1 & \cdots\cdots ① \\ x+y=3 & \cdots\cdots ② \\ x+2y=-1 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$

由①, ② $\Rightarrow$ $x=1,\ y=2$

由②, ③ $\Rightarrow$ $x=7,\ y=-4$

由③, ① $\Rightarrow$ $x=-1,\ y=0$

$\therefore$ 三角形的三頂點坐標爲

$(1,\ 2),\ (7,\ -4),\ (-1,\ 0)$

設外接圓方程式爲

$x^2+y^2+ax+by+c=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+2b+c=-5 \\ 7a-4b+c=-65 \\ -a+c=-1 \end{cases}$$

解聯立方程組得

$a=-6,\ b=4,\ c=-7$

$\therefore$ 所求的方程式爲

$x^2+y^2-6x+4y-7=0$

另 解

$$\begin{cases} x-y+1=0 \cdots\cdots ① \\ x+y-3=0 \cdots\cdots ② \\ x+2y+1=0 \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

將上述三式的左邊記爲l_1, l_2, l_3

設一個方程式如下：

$al_1l_2+bl_2l_3+cl_3l_1=0 \cdots\cdots ④$

$\because$ $l_1=0$且$l_2=0$

表示①式和②式所代表的兩直線的交點

但當$l_1=0$, $l_2=0$時④式成立

$\therefore$ ①式和②式的交點必定滿足④式

同理可知：

④式所代表的曲線必經過已知的三角形的三頂點。

將④式加以整理

$\Rightarrow$ $(a+b+c)x^2+(3b+c)xy+(-a+2b-2c)y^2$

$+(-2a-2b+2c)x+(4a-5b+c)y$

$+(-3a-3b+c)=0 \cdots\cdots ⑤$

$\because$ ⑤式要代表一個圓

$$\therefore \begin{cases} a+b+c=-a+2b-2c \cdots\cdots ⑥ \\ 3b+c=0 \cdots\cdots ⑦ \end{cases}$$

由⑥, ⑦得 $a=5b$, $c=-3b$

$\therefore$ $a:b:c=5:1:-3$

以 $a=5$, $b=1$, $c=-3$代入⑤

$\Rightarrow$ $3x^2+3y^2-18x+12y-21=0$

$\therefore$ $x^2+y^2-6x+4y-7=0$

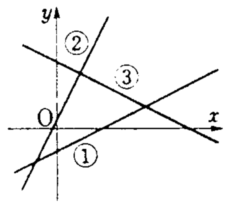
$\therefore$ $(x-3)^2+(y+2)^2=20$

10 Ⅲ 三 ★★

由三直線$x-2y-2=0$，$4x-2y+1=0$，$x+2y-6=0$所圍成的三角形，試求其內切圓的圓心和半徑。

【詳解】
$$\begin{cases} x-2y-2=0 \cdots\cdots ① \\ 4x-2y+1=0 \cdots\cdots ② \\ x+2y-6=0 \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

三條直線的圖形如附圖



設內心爲$I(x_1, y_1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1-2y_1-2<0 \\ 4x_1-2y_1+1>0 \\ x_1+2y_1-6<0 \end{cases}$$

設內切圓半徑$=r$

$$\Rightarrow \frac{|x_1-2y_1-2|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|4x_1-2y_1+1|}{\sqrt{4^2+2^2}}=\frac{|x_1+2y_1-6|}{\sqrt{1^2+2^2}}=r$$

$$\therefore \begin{cases} -(x_1-2y_1-2)=\sqrt{5}r \cdots\cdots ④ \\ 4x_1-2y_1+1=2\sqrt{5}r \cdots\cdots ⑤ \\ -(x_1+2y_1-6)=\sqrt{5}r \cdots\cdots ⑥ \end{cases}$$

由④, ⑤得　$x_1+1=\sqrt{5}r$

由⑤, ⑥得　$x_1-1=\frac{\sqrt{5}}{5}r$

$$\Rightarrow x_1=\frac{3}{2}, r=\frac{\sqrt{5}}{2} \cdots\cdots ⑦$$

將⑦代入④ $\Rightarrow -\frac{3}{2}+2y_1+2=\frac{5}{2}$

$\therefore$　$y_1=1$

$\therefore$　內切圓的圓心$=\left(\frac{3}{2}, 1\right)$，半徑$=\frac{\sqrt{5}}{2}$

11 Ⅲ 三 ★★

試求圓心在直線$x-2y-3=0$上，且和兩坐標軸均相切的圓方程式。

【詳解】 參見附圖

$\because$ 此圓和兩坐標軸均相切

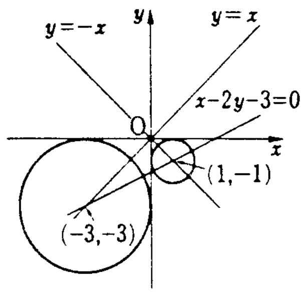
設圓心$=(x_0, y_0)$

則$x_0=y_0$或$x_0=-y_0$

圓心在直線$x-2y-3=0$上

(1)若$x_0=y_0$，則$x_0-2x_0-3=0$

$\therefore$ $x_0=-3, y_0=-3$



(2)若$x_0=-y_0$，則$x_0+2x_0-3=0$

$\therefore$ $x_0=1, y_0=-1$

$\therefore$ 圓方程式為$(x+3)^2+(y+3)^2=3^2$

或$(x-1)^2+(y+1)^2=1$

12 Ⅲ 三 ★

試求圓$x^2+y^2+10x-8y+16=0$在x軸及y軸上的截線段的長度。

【詳解】 (1)設$y=0$ $\Rightarrow$ $x^2+10x+16=0$

$\Rightarrow$ $(x+8)(x+2)=0$

$\therefore$ $x=-8$或-2

$\therefore$ x軸上的截線段長$=6$

(2)設$x=0$ $\Rightarrow$ $y^2-8y+16=0$

$\Rightarrow$ $(y-4)^2=0$

$\therefore$ 此圓和y軸相切

$\therefore$ y軸上的截線段長$=0$