一套适合家长辅导孩子、学生自学的书

时代教育

最新修订版

小学数学奥赛辅导丛书

小学数学奥赛辅导新教案

(六年级同步)

陈龙清 刘晓波 主编
小学数学奥赛研究组 审定

名师导航 名题精讲
自学辅导 举一反三
挑战奥赛 走向名校

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

写在前面的话

数学是思维的体操。大文豪雨果将数学誉为开启人类智慧的“钥匙”。古希腊哲学家柏拉图曾经在他的哲学学校门口张榜声明：不懂几何学的人不得入内。他认为，未经过数学训练的人，尤其是没有掌握严格的演绎推理方法的人，难以深入讨论他所开设的课程。在英国大学里的律师专业和美国西点军校，许多高深的数学课程都是学生的必修课。著名数学教育家米山国藏说过一段寓意深刻的话：“学生们在初中或高中所学到的数学知识，在进入社会后，几乎没有什么机会应用，因而这种作为知识的数学，通常在出校门后不到一两年就忘记了，然而不管他们从事什么业务工作，那种铭刻于头脑中的数学精神和数学思想方法，却长期地在他们的生活和工作中发挥着重要的作用。”

可见，数学教育主要不在于培养数学家，而在于培养人的数学思想，通过开拓头脑中的数学空间，促进全面素质的提高和发展。

编写意图

数学奥赛，集中体现了素质教育思想，它脱胎于传统教学，以开放性、创造性的思维模式，吸引了无数渴望探索数学迷宫的孩子们。同时，数学奥赛又是传统数学教学有益的补充，可以起到激发兴趣、开拓思路、提高能力、扩展知识等多重作用。正因为如此，许多重点中学开设的实验班，以数学奥林匹克的水平测试作为录取新生的首要条件。但是学校的普通数学教学与数学奥赛的要求差距很大，老师、学生和家长迫切需要一本既能作为学生自学又可帮助家长指导孩子的辅导书。

基于以上想法，我们精心策划编著了这套《小学数学奥赛辅导丛书》，希望能为提高我国小学生的数学素质出一份力，为有志进入重点中学学习的孩子们提供一个有力的帮手。

编写特点

数学素质集中体现为数学解题能力，而数学解题能力的提高取

决于三个因素：牢固的基本数学知识、正确的思维方法和丰富的解题经验。本书紧扣数学奥赛主导思想，针对小学数学奥赛中常用的解题技巧，归纳总结了具有代表性的基本解题方法，将知识与方法融为一体，引导学生跳出常规的思维定式，打开思路，举一反三。通过发散思维训练和综合训练题，让学生边学边用，温故知新，不断提高解题能力，形成系统的数学思维。

编写力量

本套丛书以三年级为起点共分为六册，可供不同层次的读者选用。丛书的主编是特级教师韩新生和数学博士王家银。参加各分册编写的均为来自北京四中、北师大实验中学、人大附中、清华附中、北京八中、首都师大附中等著名中学的一线优秀教师。

修订说明

《小学数学奥赛辅导丛书》出版以来，得到了广大读者的好评。丛书的编写本着："立足于自学辅导，服务于初学者；从基础到奥数，逐步提高；讲、练有机结合，归纳、发散全面培训"这一指导思想。事实证明，我们的做法是正确的，是符合读者需要的。

事物在变化，时代在发展。随着中小学课程改革的推进，奥数的思维方法在中小学教材里逐渐凸现出来，数学奥赛作为惟一一项带有政府背景的全国性竞赛，受到了更加广泛的关注。

丛书的全体作者遵照与时俱进、更好的服务于读者的宗旨，经过充分的调研、讨论，对本丛书进行了全面修订，使之能第一时间体现教育改革的趋势，有效提高学生的数学思维能力。

此次修订，增加了经典例题和能力训练题的数量，增设了阶段评估测试 A、B 卷，答案讲解更加详细。

让数学学习不再枯燥乏味，让数学奥林匹克不再高深莫测，让数学成绩快速提高，让重点中学的大门为你敞开。细读本书让你眼睛一亮：奥赛数学原来没那么难！

丛书编委会

2004 年 6 月

目　　录

第1讲 估 算

名师导航

知识精讲

在计数、度量和计算过程中，往往需要对某些量做一个大致估计，估算就是对这些量的粗略运算。通过估算得到的与实际情况相近、有一定误差的数叫做近似数。表示近似数近似的程度叫做近似数的精确度。

本讲的重点是选择恰当的方法对某个数或算式进行估算，从而确定它的取值范围。四舍五入法和放大缩小法都是常用的解题方法。

用位数较少的近似数代替位数较多的数时，要遵守一定的取舍法则。要保留的数位右边的所有数叫做尾数。取舍尾数主要方法之一即是四舍五入法：当尾数最高位上的数字是不大于4的数字时，就把尾数舍去；当尾数最高位上的数字是不小于5的数字时，把尾数舍去后，在它的前一位加1。

对于一个数字，如果不知道它的确切数值，我们可以根据题设条件，适当地将它放大或缩小，使它落在一个便于考察的范围内，再进一步确定它的具体值。这种方法即是放大缩小法。

自学指导

在运用放大缩小法时，放大或缩小的幅度要适当，否则就不能得到准确的取值范围，所得的近似数也达不到题目要求的精确度。在放缩时可以先用较大的幅度去试，如果发现太大时，再把幅度调整得小一些，重新估算，从而逐步达到目的。

经典例题

［例1］ 已知 $x=\dfrac{1}{\frac{1}{1981}+\frac{1}{1982}+\frac{1}{1983}+\cdots+\frac{1}{2002}}$，求 x 的整数部分是多少？

思路剖析

这道题我们可以利用通分的方法求出精确值,但这样做的计算量是巨大的。题目只要求我们求出 x 的整数部分,并不要求我们求出精确值,因而我们可以运用"放大缩小法",粗略地估计一下 x 介于哪两个数之间,再根据这两个数确定 x 的整数部分。

解　答

$$\frac{1}{\underbrace{\frac{1}{1981}+\frac{1}{1981}+\cdots+\frac{1}{1981}}_{22\text{个}}}<x<\frac{1}{\underbrace{\frac{1}{2002}+\frac{1}{2002}+\cdots+\frac{1}{2002}}_{22\text{个}}}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{1981}\times 22}<x<\frac{1}{\frac{1}{2002}\times 22}$$

$$\frac{1981}{22}<x<\frac{2002}{22}$$

$$90\frac{1}{22}<x<91$$

答:x 的整数部分为 90。

[例 2]　老师在黑板上写了 13 个自然数,让小明计算平均数(保留两位小数),小明计算的答案是 12.43,老师说最后一位数字错了,其他的数字都对。正确的答案应该是什么?

思路剖析

13 个自然数之和必然是整数,由于此和不是 13 的整数倍,因而平均数是小数。又由于平均数精确到小数点后最后一位数,所以 13 个自然数之和必大于 12.39 的 13 倍,而小于 12.5 的 13 倍。因而可以推算出精确的 13 个自然数的和。

解　答

由 $12.39\times 13=161.07$,$12.5\times 13=162.5$。

得 13 个自然数的和小于 162.5 且大于 161.07,所以 13 个自然数的和应是 162。

正确的答案应是:$162\div 13\approx 12.46$。

答:正确的答案是 12.46。

点 津

在利用放缩法处理问题时，放缩要恰当，不能使放缩后的范围过大或过小。

[例 3] 在下列方框里填上两个相邻的自然数使不等式成立：$\square<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}<\square$

思路剖析

本题要求填入两个连续的自然数，不难发现左边的“□”内至少是2，这是由于：

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=2$$

据此可猜想右边“□”内是3或4等。我们可以通过放大或缩小分母的值来达到估计出这个数的范围的目的。

解 答

因为 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$

$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right)$

$=2+\left(\frac{3}{8}+\frac{3}{10}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right)<2+\left(\frac{3}{8}+\frac{3}{10}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}\right)$

$=3$

所以 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}<3$

又因为 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$

$=2+\left(\frac{3}{8}+\frac{3}{10}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right)>2$

所以有 $2<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}<3$

[例 4] 小龙2002年的年龄等于他出生那年年号的各位数字之和减去3。请问他在2002年几岁？

思路剖析

已知小龙是2002年前出生的，并且可以检验他不是出生于2000年或2001年，所以他出生于2000年以前，而2000年以前各年年号的各位数字之和最大的是1999年，由此可知，小龙年龄最大不超过 $1+9+9+9-3=$

25 岁。所以他应出生在 2002 - 25 = 1977 年后。

若他出生在 1986 年，则他的年龄是 16 岁，而年号的各位数字之和减去 3 等于 21，不符合题意。若他出生在 1986 年以后，则他的年龄不超过 16 岁，而各年年号的各位数字之和减去 3 均大于 16，不符合本题要求。所以他出生在 1977 年至 1985 年之间。

解　答

设小龙出生于 $\overline{198x}$ 年，x 为一位数，则

$$2002-1980-x=1+9+8+x-3$$
$$22-x=15+x$$
$$2x=7$$
$$x=3.5\text{（不合题意，舍去）}$$

设小龙出生于 $\overline{197y}$ 年，y 为一位数，则

$$2002-1970-y=1+9+7+y-3$$
$$32-y=14+y$$
$$2y=18$$
$$y=9$$

答：小龙出生于 1979 年，2002 年他 23 岁。

［例 5］　比较 $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{7}{8}\times\cdots\times\frac{15}{16}$ 与 $\frac{1}{4}$ 的大小。

思路剖析

本题如果以常规方法来计算，会显得相当麻烦，观察前一个数的分子和分母，依次由自然数 1，2，…，15，16 组成，因此可以引入另一个数 $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\frac{8}{9}\times\cdots\times\frac{14}{15}$ 后，再来与 $\frac{1}{4}$ 比较。

解　答

设 $a=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{15}{16}$，$b=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\cdots\times\frac{14}{15}$，则有

$$a\times b=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}\times\frac{6}{7}\times\cdots\times\frac{14}{15}\times\frac{15}{16}=\frac{1}{16}=\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

由于 a 有 8 项，b 有 7 项，且 a 的前 7 项都对应小于 b 的前 7 项，并且 a 的第 8 项 $\frac{15}{16}<1$，所以 $a<b$。由 $a\times b=\left(\frac{1}{4}\right)^2$ 与 $a\times a<a\times b$，可知

$$a\times a<\left(\frac{1}{4}\right)^2,\ a<\frac{1}{4}$$

即$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{7}{8}\times\cdots\times\frac{15}{16}<\frac{1}{4}$

[例 6] 记号[x],表示不超过数 x 的最大整数。

比如:$[2.3]=2$,$[\frac{17}{4}]=4$,$[5]=5$。试计算下列式子:$\left[\frac{1\times2}{80}\right]+\left[\frac{2\times3}{80}\right]+\left[\frac{3\times4}{80}\right]+\cdots+\left[\frac{30\times31}{80}\right]$

思路剖析

观察式子,可知本题中分数的分母均为80,而分子的一般形式为 $k(k+1)$,其中 $k=1,2,3,\cdots,30$,即分子为两个连续的自然数的乘积。再考虑当 $k=8$ 时,$8\times9=72<80$,而 $9\times10=90>80$,这说明当 $k=1,2,\cdots,8$ 时,$\left[\frac{k(k+1)}{80}\right]=0$。

其他情况我们可以类似讨论得出。

解 答

由于式中各项分数的分子都是两个连续自然数之积,因此可表示为 $k(k+1)$,$k=1,2,3,\cdots,30$。所以各分数都可以写成$\frac{k(k+1)}{80}$。

由于 $8\times9=72<80$,而 $9\times10=90>80$,因而当 $k=1,2,\cdots,8$ 时,$\left[\frac{k(k+1)}{80}\right]=0$;

由于 $12\times13=156<160$,而 $13\times14=182>160$,因而当 $k=9,10,11,12$ 时,$\left[\frac{k(k+1)}{80}\right]=1$;

由于 $15\times16=240$,因而当 $k=13,14$ 时,$\left[\frac{k(k+1)}{80}\right]=2$;

由于 $17\times18=306<320$,而 $18\times19=342>320$,因而当 $k=15,16,17$ 时,$\left[\frac{k(k+1)}{80}\right]=3$;

由于 $19\times20=380<400$,而 $20\times21=420>400$,因而当 $k=18,19$ 时,$\left[\frac{k(k+1)}{80}\right]=4$;

由于 $21\times22=462<480$,而 $22\times23=506>480$,因而当 $k=20,21$ 时,$\left[\frac{k(k+1)}{80}\right]=5$;

类似讨论可知:

当 $k=22,23$ 时，$\left[\dfrac{k(k+1)}{80}\right]=6$；

当 $k=24$ 时，$\left[\dfrac{k(k+1)}{80}\right]=7$；

当 $k=25,26$ 时，$\left[\dfrac{k(k+1)}{80}\right]=8$；

当 $k=27$ 时，$\left[\dfrac{k(k+1)}{80}\right]=9$；

当 $k=28,29$ 时，$\left[\dfrac{k(k+1)}{80}\right]=10$；

当 $k=30$ 时，$\left[\dfrac{k(k+1)}{80}\right]=11$；

由上述讨论可知：

$$\left[\frac{1\times2}{80}\right]+\left[\frac{2\times3}{80}\right]+\cdots+\left[\frac{29\times30}{80}\right]+\left[\frac{30\times31}{80}\right]$$

$$=0\times8+1\times4+2\times2+3\times3+4\times2+5\times2+6\times2+7\times1+8\times2+9\times1+10\times2+11\times1$$

$$=110$$

［例 7］ 有一个算式，$\frac{A}{3}+\frac{B}{5}+\frac{C}{7}\approx1.16$，其中 A、B、C 均为自然数，左式四舍五入得到右边的近似值 1.16。那么 A、B、C 分别代表哪几个自然数？

思路剖析

本题可以采用估值的方法先确定左边算式的精确值所在范围，并且 1.16 是四舍五入得到的，因此左边的值一定介于 1.155 与 1.164 之间。从而可以确定一个与 A、B、C 有关的等式，再分析讨论 A、B、C 的具体数值，这一步骤则通过 A、B、C 是自然数来求得。

解　答

☆解法一：由已知得

$$1.155\leqslant\frac{A}{3}+\frac{B}{5}+\frac{C}{7}\leqslant1.164$$

$$1.155\leqslant\frac{35A+21B+15C}{105}\leqslant1.164$$

$$121.275\leqslant35A+21B+15C\leqslant122.22$$

由于 A、B、C 是自然数，所以 $35A+21B+15C$ 也是自然数，因此 $35A+21B+15C=122$。

首先确定 A 的取值范围，容易看出 A 最大只能取3。否则若 $A=4$，则 $35\times4=140>122$。这说明 $A=1,2,3$。

(1)当 $A=1$ 时，$21B+15C=122-35=87$，解得 $B=2,C=3$。

(2)当 $A=2$ 或 3 时，经试验此时方程无自然数解。

从而得 $A=1,B=2,C=3$

☆**解法二**：因为 $\frac{1}{3}\approx0.333,\frac{1}{5}=0.2,\frac{1}{7}\approx0.143$

所以 $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\approx0.676$

$$2\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)\approx1.352$$

又 $0.676<1.16<1.352$，所以 $\frac{A}{3}+\frac{B}{5}+\frac{C}{7}$ 至少包含一个 $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\approx0.676$。

$1.16-0.676=0.484$，而 $\frac{1}{5}+\frac{1}{7}<0.484<2\times\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)$，$\frac{1}{3}+\frac{1}{7}<0.484<2\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{7}\right)$，$0.484-0.343=0.141\approx\frac{1}{7}$，所以 0.484 中至少包含一个 $\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\approx0.343$。

如果用 $\frac{1}{3}+\frac{1}{7}<0.484<2\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{7}\right)$，$0.484-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{7}\right)\approx0.008$，则误差较大，应舍去。$\frac{A}{3}+\frac{B}{5}+\frac{C}{7}$ 可由 $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}$、$\frac{1}{5}+\frac{1}{7}$、$\frac{1}{7}$ 组成，从而 A、B、C 这三个数依次为 1、2、3。

点津

本讲易错点在于使用“放大缩小法”过程中，不能做到“放缩”适度。如果取的位数少了，范围太大，无法确定；如果取的位数多了，计算量太大，繁琐且没有必要。要想做到“放缩”适度，我们需在实践中不断积累解题经验。只有逐步试探，逐步缩小范围，才可以得到符合题意的近似值。

发散思维训练

1. 哥哥对弟弟说：“到 21 世纪的某一年，我的年龄的平方刚好是那一年的年份数。”哥哥的出生年份是______年。

2. $\dfrac{1}{\frac{1}{20}+\frac{1}{21}+\frac{1}{22}+\cdots+\frac{1}{39}}$ 的整数部分是______。

3. 已知 $A=\dfrac{12345678910111213141516171819}{91817161514131211101987654321}$，$A$ 的小数部分的前三位数是______。

4. $1.22\times8.03+1.23\times8.02+1.24\times8.01$ 的整数部分是______。

5. 在下面的横线处分别填入两个相邻的整数，使不等式成立。

$$\_\_\_\_ < \left(\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\cdots+\frac{1}{20}\right)\times5 < \_\_\_\_$$

6. 计算下式，精确到小数点后三位数的近似值。

$$1357902468\div8642097531$$

7. 李军读一本书，如果每天读 80 页，需 4 天多读完，如果每天读 90 页，需 3 天多读完。现在，为使每天读的页数与读完的天数相等，则每天应该读多少页？

8. 有 30 个数：$1.64, 1.64+\dfrac{1}{30}, 1.64+\dfrac{2}{30}, \cdots, 1.64+\dfrac{29}{30}$，如果取每个数的整数部分（例如 1.64 的整数部分是 1，$1.64+\dfrac{29}{30}$ 的整数部分是 2），并将这些整数相加，那么其和等于多少？

9. 下列是经过四舍五入得到的一个式子：$\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{B}+\dfrac{1}{C}\approx0.658$，其中 A、B、C 分别代表三个一位的自然数，求 A、B、C 代表的三个自然数分别是多少？

10. 一个四位数 $\overline{6**6}$ 能被 134 整除，求这个四位数除以 134 的商。（第一届九章杯中国小学生数学竞赛决赛试题）

11. 老师让小华求 7 个自然数的平均数（得数保留两位小数），小华求得的结果是 30.23。老师说最后一位数是错的，其余的各位数字都是对的。问：正确的答案是多少？

12. 有 9 个分数，其和为 1，它们的分子都是 1，其中 5 个是 $\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{7}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{11}, \dfrac{1}{33}$，其余 4 个分数的分母的个位数字都是 5，请写出这四个分数。

13. $\dfrac{1}{100}+\dfrac{1}{101}+\dfrac{1}{102}+\cdots+\dfrac{1}{300}$ 的整数部分是多少？

14. 任取一个四位数乘 3456，用 A 表示其积的各位数字之和，用 B 表示 A 的各位数字之和，C 表示 B 的各位数字之和，求 C。（1990 年小学数学奥林匹克初赛试题）

15. 把下列除法算式中的“*”所表示的数字写出来。（北京市第二届

小学生迎新春数学竞赛决赛试题)

```
            * 8 * 7
     * * ) * * * * * *
           * * *
           ---------
               * *
               * *
           ---------
                   * *
                   * *
           ---------
                     0
```

第2讲　二进制与十进制

名师导航

知识精讲

所谓数的进位制，指的是记载数目的一种规则。世界上大多数地区和民族均采用的是十进制计数法。在十进制计数法中，采用0、1、2、3、4、5、6、7、8、9这10个数字表示任何十进制数，它遵循的原则是"逢十进一，退一当十"，任何一个十进制数 N 都可以表示为：$N = a_m \times 10^m + a_{m-1} \times 10^{m-1} + a_{m-2} \times 10^{m-2} + \cdots + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_0$，其中 $a_m, a_{m-1}, a_{m-2}, \cdots, a_2, a_1, a_0$ 都只能取 $0, 1, 2, \cdots, 9$ 中的数字，简记为 $N = (a_m a_{m-1} a_{m-2} \cdots a_2 a_1 a_0)_{10}$。

类似的，对于在现代计算机运算技术中采用的二进制计数法，我们有以下的说明：在二进制计数法中，采用0和1这两个数字表示任何二进制数，它遵循"逢二进一，退一当二"的原则。同样，任何一个二进制数 N 都可以表示为：$N = a_m \times 2^m + a_{m-1} \times 2^{m-1} + a_{m-2} \times 2^{m-2} + \cdots + a_2 \times 2^2 + a_1 \times 2 + a_0$，其中 $a_m, a_{m-1}, a_{m2}, \cdots, a_2, a_1, a_0$ 都只能取0或1，我们简记为 $N = (a_m a_{m-1} a_{m-2} \cdots a_2 a_1 a_0)_2$。

自学指导

(1)二进制数转化成十进制数：通过下式 $N = (a_m a_{m-1} \cdots a_1 a_0)_2 = a_m \times 2^m + a_{m-1} \times 2^{m-1} + \cdots + a_1 \times 2 + a_0$，可以直接计算其结果。

例如：$(11011)_2 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1$

$= 16 + 8 + 2 + 1 = 27$，即 $(11011)_2 = (27)_{10}$

(2)十进制数转化成二进制数：我们一般用倒写余数法，即把这个十进制数用2除，记下余数，再用2除它的商，再记下余数，直到商为0为止。将所得余数自下而上依次排列起来，就得到二进制数。

例如：$(13)_{10}$化为二进制数。

2	13	
2	6	………… 余1
2	3	………… 余0
2	1	………… 余1
	0	………… 余1

因此　$(13)_{10}=(1101)_2$

二进制的四则运算是本讲的难点，它遵循“逢二进一，退一当二”的原则。这就要将它与十进制区分开来，利用二者的类似点进行计算。本讲的重点在于这两种进制数之间的互换，如何选取合适的方法是关键。

经典例题

[例1]　有一个人拿着两只空瓶，其中一只可以容纳7斤水，另外一只可以容纳5斤水。现在要从水池中取出6斤水。请问，此人应当怎样用这两只空瓶取回6斤水来？

思路剖析

本题是一个进制问题，容积为7斤的空瓶，可以装0斤、1斤、2斤……最多可以装7斤，再多装就需要“进位”(倒掉重装)，这类似于八进制记数法。对容积为5斤的空瓶的情形，则类似于六进制记数法。

要得到6斤水，先从算法上实现这一步。首先把6表示成5和7的加减运算式

$$6=5+5+5+5-7-7$$

然后在实践中实现这个算式，“+”表示装水，“-”表示倒水。

解　答

由于 $6=5+5+5+5-7-7$，因此可以做如下操作：

(1)用容积为5斤的空瓶装满水，倒入容积为7斤的空瓶中，这时7斤瓶中有5斤水。

(2)再用容积为5斤的空瓶装满水，往容积为7斤的瓶中倒，直到注满为止。这时，容积为5斤的瓶中还剩3斤水，而7斤的瓶中装满了水，把水倒回水池中，使7斤瓶为空瓶。

(3)把5斤瓶中的3斤水倒入7斤瓶中，然后，用5斤瓶装满水继续注入7斤瓶中，直到注满为止。这时，5斤瓶中还剩1斤水，而7斤瓶中又一次装满，将7斤瓶中水倒回水池中，使7斤瓶为空瓶。

(4)将5斤瓶中剩下的1斤水倒入7斤瓶中。然后，用5斤瓶装满水继续注入7斤瓶中，此时7斤瓶中正好装了6斤水。

[例2]　比较下列两组数的大小。

(1)$(1111101)_2$ 与 $(124)_{10}$

(2)$(2102)_3$ 与 $(333)_4$

思路剖析

对两个不同进制的数，无法直接进行比较，因此我们必须将这两个数进行转化，使其处于同一进制里。由于别的进制化为十进制比较容易，因此我们采取将所有数均化为十进制的方法。

解　答

(1)$(1111101)_2 = 1\times2^6+1\times2^5+1\times2^4+1\times2^3+1\times2^2+0\times2+1=64+32+16+8+4+1=125$

即 $(1111101)_2=(125)_{10}$

由于 $(125)_{10}>(124)_{10}$

所以 $(1111101)_2>(124)_{10}$

(2)$(2102)_3=2\times3^3+1\times3^2+0\times3+2=54+9+2=65$

即 $(2102)_3=(65)_{10}$

$(333)_4=3\times4^2+3\times4+3=48+12+3=63$

即 $(333)_4=(63)_{10}$

由于 $(65)_{10}>(63)_{10}$

所以 $(2102)_3>(333)_4$

[例 3]把三进制数 $(200221)_3$ 改成八进制的数。

思路剖析

先将这个数改成十进制的数，再改成八进制的数。

解　答

$$\begin{array}{l} (2\,0\,0\,2\,2\,1)_3 = 2\times3^5+2\times3^2+2\times3^1+1 \\ \ \ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots \\ \ \ 5\,4\,3\,2\,1\,0 \qquad = 2\times243+2\times9+2\times3+1 \\ \qquad\qquad\qquad = 511 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 8\,\underline{|\ 511} & \cdots\ 余7 \\ 8\,\underline{|\ 63} & \cdots\ 余7 \\ 8\,\underline{|\ 7} & \cdots\ 余7 \\ 0 & \end{array}$$

所以 $511=(777)_8$

[例 4]　请判断下列算式是几进制数的乘法。