L. Wittgenstein

维特根斯坦全集

第 7 卷

涂纪亮 主编

徐友渔 涂纪亮 译

维　特　根　斯　坦　全　集

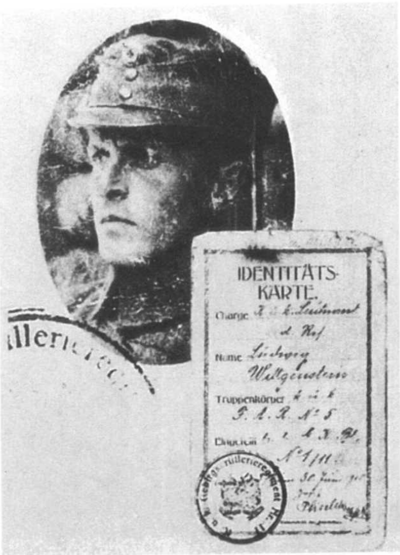
论数学的基础

7

G.E.M.Anscombe,R.Rhees,G.H.V.Wright　编
徐友渔　涂纪亮　译

河北教育出版社

路德维希·维特根斯坦（琼·贝文夫人素描）



第一次世界大战中做军官时的
路德维希·维特根斯坦

译 者 前 言

徐友渔

本卷《论数学的基础》(*Bemerkungen über Die Grundlagen der Mathematik*)译自德国 Suhrkamp 出版社于 1989 年出版的 8 卷本中的 *Ludwig Wittgenstein: Werkausgabe Band 6*。本卷内容几乎全部是维特根斯坦写作于 1937 年 9 月至 1944 年 4 月这段时间。这部著作在维特根斯坦生前没有出版,第一个版本出版于 1956 年,这一个新版本是在第一版的基础上增添和重新编排而成的。

本书第一篇在全书中占有特殊地位,是各节中写作得最早,也是维特根斯坦遗稿中惟一打印出来的,其中大部分经过他本人的校正。本篇及其附录中有相当部分内容与维特根斯坦的《哲学研究》早期手稿的内容一致,因此是研究维特根斯坦前后期思想是否有连续性和统一性,研究《哲学研究》一书的构思、形成过程的宝贵材料。

第三篇集中阐述了维特根斯坦对于数学基础的一系列重要见解,比如数学与逻辑的关系,数学证明的性质,数学基础应取罗素主张的形式还是希尔伯特主张的形式,什么是矛盾和一致性证明,等等。这一部分包含了大量有价值的思想,它们是在维特根斯坦的其他著作或手稿中所未见的。

第七篇的上半部分(第 1 至 23 节)讨论数学命题与经验命题之间、计算和实验之间的关系,并对矛盾和一致性表述了

新见解;下半部分主要讨论遵守规则、数学证明和逻辑推理的概念。在这些问题上,许多看法与维特根斯坦在过渡阶段的思考有关,同时又与《哲学研究》中的观点有关,因此,这部分内容的重要性,自不待言。

本书第二篇讨论实数、基数、无理数的概念,并用了相当篇幅谈分数不能按大小在数列中排序的问题。这一部分篇幅较小,由第一版中第一篇的附录二稍作扩充而成。

第四和第五篇的大多数内容写于1942至1943年间,这是维特根斯坦思想的过渡阶段,许多思考是为在第七篇中表达的观点做准备,在第七篇中,这些看法以更明确的方式表达出来了。

第六篇是全新的,本书初版完全没有这方面内容。这一部分探讨了应用、规则、图像、实践等一系列重要概念,从中可以看出维特根斯坦的后期哲学思想与他深入思考数学基础问题,比如命题与证明的性质,有密切关系。

本卷中的内容提要,第一至五篇由徐友渔翻译,第六、七篇由涂纪亮翻译。译者相信,本书的出版对于中国哲学界更全面、深入地了解和研究维特根斯坦的思想,弄清他的哲学思想的发展线索和转变契机,是大有帮助的。同时我们深知,本书内容庞杂,有的地方思想表达艰深、晦涩,不少地方论述含混、跳跃,这为翻译本书带来不少困难,再加上我们在数学基础知识和德文方面的水平有限,译文中不确切乃至错误之处一定不少,欢迎专家和读者批评指正。

论数学的基础

内 容 提 要

第 一 篇

1—5. 遵守规则问题。(参见《哲学研究》第 189、190 节,等等)——由公式决定变换(1—2)。序列的延续(3)。数学的严格性;数学与真(4—5)。论度量(5)。

6—23. 逻辑推理。——语词“全部”;从“$(x)\cdot fx$”推导出“$f(a)$”(10—16)。推理与真(17—23)。

24—74. 证明。——证明是图式或模型、范型。例子:手与五角形(25,等等)。作为实验图像的证明(36)。例子:100 个弹子(36,等等)。图形由其部分构成(42—72)。数学上的惊奇。证明与确信。数学与本质(32,73,74)。本质的深刻性:对确信的深度需要(74)。

75—105. 计算和实验。——数学特性的“展示”。100 个弹子的例子(75,86,88)。多边形特性的展示(76),以及链条的特性(79,80,91,92)。度量(93,94)。几何学的例子(96 至 98)。内在特性与关系(102—105)。从颜色的逻辑而来的例子。

106—120. 数学信念。

113—142. 逻辑强制性。——在何种意义上逻辑论证有强制性?(113—117)。逻辑严格性与法律严格性的对照

(118)。逻辑机器与刚体运动学(119—125)“逻辑上必定的坚硬性”(121)。机器标记了它的反应方式(122)。一下子把握词的用法(123—130)。可能性是实在的影子(125)。词的使用被误解成了奇特的过程(127)。(对于122—130,参见《哲学研究》第191—197节。)逻辑定律是“思想定律”(131—133)。计算中出错(136—137)。论度量(140)。逻辑上不可能(141)。“我们所提供的其实是对人的自然史的评论”(141)。

143—156. 计算程序和逻辑推理的基础。——无命题的计算(143—145)。例子:卖柴(143—152)。“我们的推理规则是永恒不变的吗?”(155)逻辑先于真(156)。

157—170. 数学、逻辑与经验。——证明与实验(157—169)。数学是逻辑;它在我们语言的规则中运动(165)。数学家是发明者,不是发现者(168)。逻辑上必定的基础(169—171)。

附 录 一

1—7. 两类否定:一种是自我抵消,一种是多次否定后,最后得到的是否定。在双重否定中,人们是如何表示这一种或另一种意思。通过检验对看法的表达而得到的看法(3)。比较在几何学中旋转180°而得到的否定(1,6,7)。

8—10. 我们可以想想有一种“较原始的”逻辑,其中只可以否定语句,而不能对否定加以否定(8)。问题:否定对这些人是否像对我们一样有意义(9)。“这根杆长1米”和“这里站着1个士兵”说的是两回事吗(10)?

12—13. 长度度量的两个系统。1英尺=1W,但2W=4英尺,等等。“W”和“英尺”有相同的意义吗?

16. 意义是语词在语句中的作用。

17—27. 语词“是”用作系词和用作等号。通过等同词得到的

人称结合只是巧合。一个符号本质性与非本质的特征。与图形在游戏中的作用作对比。没有规则的游戏,特别是讲笑话(20)。

附 录 二

1—13. 在数学中,惊讶可以起两种完全不同的作用。——一事态可能通过描述的方式而表现得令人吃惊。或者,可以把得出一确定的结果看成是惊讶。

第二种惊讶不合法。批判这种观点:数学证明是揭露出某种隐秘的东西(2)。“这里没有秘密”说的是:再好好瞧一瞧:(4)。把计算比做一种发牌(5)。当我们对我们所做的事缺乏总体把握时,我们就会觉得神秘。我们接受一定的表达方式,我们的行动和思想就受到了它的控制。

附 录 三

1—4. 命题的种类——不要命题做算术(4)。

5—7.《数学原理》系统中的真与或然性。

8—19. 讨论命题“P”,它在《数学原理》系统中断定自己是不可证明的。——矛盾在语言游戏中的作用(11—14,17)。

20. 逻辑的命题。“命题”和“命题的构成”。

第 二 篇

1—22.(“附加材料”)。——对角线程序。为何能用对角数?(3)“这里的格言是:向四周打量开一些!”(6)。用怀疑的态度考察用言词表达的计算结果(7)。“不可数”的概念(10—13)。从数列顺序的观点比较实数与基数的概念(16—22)。

23. 时间的疾病。

24—27. 讨论命题:“不存在最大基数。”“我们说到一种准许,它没有终结。”(26)

28—34. 无理数。不存在无理数系统(33)。但康托[①]定义了一种高阶微分,即发散系统的发散微分(34)。

35—39 No。我们用得着一种数词,来说明无穷数列的项数,但并不能因此就推知,说“无穷系列”概念的数量也就有任何意义。没有语法上的技术提议使用那样的表达。不是这样的用途:仍然要发现,而是:首先要发明(38)。

40—48. 讨论命题:“分数不能按大小排列。”

49—50. 如何比较游戏?

51—57. 讨论这个命题:分数(数对)不能在无穷序列中排列。

58—60.“在数学中应该避免‘无限的’这个词吗?”

61. 有穷论和行为主义方向相同。二者都不承认存在着某些东西,都从混乱中逃向用途。

62.“我所做的不是证明计算错了;而是检验计算的重要性。”

第 三 篇

1—2. 证明。——数学证明必须是自明的。定义的作用(2)。

3—8. 罗素的逻辑以及把算术还原为符号逻辑的想法。——计算的运用必须关照自身(4)。在罗素的计算中,在十进制计算中,在加横计算中的证明。

9—11. 证明。——证明是印象深刻的图像(9)。证明模式的再生产(10—11)。

12—20. 罗素的逻辑和不同计算技术相互间关系问题。——十进制系统的发明是什么(12)。在罗素的计算和在十进制系统中的证明(13)。可明白理解的和不可明白理解的

---

① 康托(Georg Cantor,1845—1918):德国数学家。——译者注

数字符号(16)。简化的与未简化的计算技术相互间的关系(17—20)。

21—44. 证明。——等同与证明的可再生性(21)。证明是一模型。证明与实验(22—24)。证明与数学上的确信(25—26)。在证明中,我们通过思想斗争而作出了决定(27)。被证明了的命题是规则。它要向我们说明说什么有意义(28)。数学命题是“语言工具”(29)。证明导向新概念(31)。什么样的概念产生“P⊃P”?“P⊃P”是语言学表现方法的枢轴(33)。证明是一个体制的一部分(36)。决定含义和使用含义之间区别的意义(37)。接受证明;证明的“几何学”概念(38—40)。证明是承认特定的记号使用(41)。“证明必须是自明的程序”(42)。作为数学基础的逻辑如果只是因为逻辑证明的说服力与其几何学的说服力而存亡,那是不行的(43)。在数学中,我们可以从逻辑证明那里逃掉(44)。

45—64. 罗素的逻辑。——一般的证明技术与罗素的证明技术之间的关系(45)。批判逻辑是数学“基础”这个概念。数学是计算技术的混合物。简化了的技术是半简化技术的一个新方面(46—48)。论三角学(50)。十进制记数法独立于单位加横计算(51)。为什么罗素的逻辑没有教我们做除法(52)。为什么数学不是逻辑(53)。递归证明(54)。证明和实验(55)。不同计算的对应;加横记数法和十进记数法(56—57)。同一命题的几种证明;数学命题的证明和含义(58—62)。在音乐和数学中令人信服的变换的高度一致(63)。

65—76. 计算和实验。——数学命题是人类学命题吗?(65)把数学命题理解为对于一致的计算结果的预言(66)。一致属于计算现象(67)。如果计算是实验,那么计算中的错

误是什么(68)。计算是实验,也是通路(69)。证明对理解有帮助,实验以理解为前提(71)。数学和条件计算反射科学(72)。计算的概念排除混乱(75—76)。

77—90.矛盾。——谁先动谁准赢的游戏(77)。以(a—a)作计算。如果我没有看见,计算中的深渊就不存在(78)。讨论他谓悖论(79)。从语言游戏的观点考察矛盾。矛盾是计算的“隐藏的疾病”(80)。矛盾和计算的可用性(81)。不矛盾性证明和对于机械地保证避免矛盾这个看法的误用(82—89)。“我的目的是改变对于矛盾和对于不矛盾性证明的态度”(82)。命题“我肯定算错了”的作用——理解数学“基础”的关键(90)。

第四篇

1—7.论公理。——公理的自明性(1—3)。自明和使用(2—3)。公理和经验命题(4—5)。公理的否定(5)。数学命题靠四只脚,而不是三只脚站立(7)。

8—9.遵守规则。——借助于规则来描述(8)。

10.算术假定并不系于经验。

11—13.算术概念是数的自然史。——借助于图像来评判经验(12)。

14.逻辑(数学)命题的外在关系。

15—19.从事无纯数学的应用数学的可能性。——从事数学不需要在命题中进行;重心可能全在于行动(15)。以交换律为例(16—17)。

20.计算是机械的活动。

21.图像是证明。

22—27.体制。

26.不作计算与错误计算之间的区别是什么?

29—33. 证明与数学概念的形成。——证明改换概念的形成。概念形成是经验的界限(29)。证明不强迫,但引导(30)。证明将我们的经验导向确定的渠道(31,33)。证明与预言(33)。

34. 哲学问题是:我们何以能够讲真话,而同时又平定这些强烈的偏见(34)。

35—36. 数学命题。——我们通过转过背对看它的方式承认它(35)。证明的效果:投入新规则(36)。

39—42. 数学命题的综合特征。——以质数的分布为例(42)。

40. 结果设置成等同于运算。

41. 证明必须是自明的,这意味着因果性在证明中不起作用。

43—44. 数学中的体制。

47. 数学命题是确定概念,跟随着发现新的形式。

48. 数学机器的工作只是机器工作的图像。

49. 图像是证明。

50—51. 语词的颠倒。

52—53. 数学命题和经验命题。——假定数学概念表达了对某些经验有把握的期待;但是,这种度量的确定并不等于表达了期待。

55—60. 矛盾。说谎者(58)。把矛盾理解为超命题的,理解为两面神头像碑,高居于逻辑的命题之上(59)。

第五篇

1—4. 数学是游戏,是像机器一样的活动。——计算的机器计算吗?(2)。为了懂得罗素的数理逻辑,在多大程度上必须有“命题”这个概念(4)。

5—8. 关于数学可能有的应用的误解对于作为数学的一部分

的计算造成了损害吗？——集合论(7)。

9—13. 数学中的排中律。——这是没有决定的基础，必需首先发明出一点东西，以便使得运用排中律有意义。

14—16 以及 21—23。无限概念和其他数学概念的炼金术，其运用不被理解。——无限预言(23)。

17—20. 排中律。数学命题是命令。数学上的存在。

24—27. 数学中的存在证明。——数学中逻辑的有害侵犯(24；亦见 46 及 48)。数学中普遍与特殊的关系与别的情况下普遍与特殊的关系不同(25)。存在证明不允许构造存在的东西(26—27)。

28. 由归谬法而来的证明。

29—40. 论数学中外延的东西和内涵的东西；戴德金[①]切割。——分析中的几何图示(29)。戴德金关于没有无理数的定理(30)。这定理如何抵达其深度内容(31)。数字直线的图像(32，37)。对分割概念的讨论(33—34)。函数中的普遍性是无序的普遍性(38)。讨论数学的函数概念；分析中的外延和内涵(39—40)。

41. 出现在“必然”命题中的概念必定在非必然命题中也有意义。

42—46. 论证明和理解数学命题。——把证明理解为从一个概念向另一个概念的运动(42)。理解数学命题(45—46)。证明导入了新概念。证明应使我确信某些东西(45)。存在证明与构造(46)。

47. 概念在本质上不是谓词。

48.“数理逻辑”使数学家和哲学家的思考完全盲目。

---

① 戴德金(Julius Wilhelm Richard Dedekind，*1831—1916*)：德国数学家。——译者注

49. 数字符号属于概念符号，而且只是和它在一起才表示出多少。

50. 论普遍性概念。

51. 证明指明结果如何产生出来。

52—53. 一般性评论。——哲学家是这样一种人，他在能够得到健全的人类理解的概念之前，必须治愈自己许多理解方面的疾病。(53)。

第 六 篇

1. 证明对命题排序。

2. 证明是形式上的检验，它只是内在于变形技术。某个数的加法叫做该数字符号的形式上的检验，但只是在加法是一种实际技术时才是如此。——证明也是与应用联系在一起的。

3. 如果命题在应用中看上去不对头，那么必须作出证明，它为什么、怎么样才必定是对的。

4. 证明指明了规则——比如说 8×9 等于 72——如何以及为什么可以被使用。

5. 奇怪的是，是图像，而不是真，能够证实一个命题。

6. 欧几里得证明教我们一种方法，找到在 P 和 P! +1 两数之间的质数。我们确信，这方法必定始终会引导到一个大于 P 的质数。

7. 旁观者看到了难忘的过程并报告说："我看出了必定如此。"——这个"必定"说明他从事件中得到了什么样的理论。

8. 这个必定说明，他已经接受了一个概念，也即是一种方法；与方法的运用相反。

9. "给我说明，3 加 2 怎么就得 5。"小孩与算盘。——有人会

对那个人问起“怎么”，会让他说明他明白这里说的是什么。

10.“给我说明……怎么……”不同于“给我说明情况是……”

11. 对命题的证明没有涉及整个计算系统，它是该命题的背景并使它有意义。

12. 哲学任务的范围。

13. 我们要说，数学家不懂费尔马定理？

14.“请说明怎么有无限多个质数”，这是什么意思？

15. 复写的过程。按规则建构的过程。一个人对于他的预言说的是数学方面的事还是其他方面的事，必定有清晰的概念吗？

16. 严格的命题是这样的：这个数根据该规则从这里得出来。运算的结果是根据实施运算的准则得出。因此，我们现在可以在新的意义上评判某个人是否遵守了规则。

17. 学习规则。——“它总会这样继续下去，就像我已经向你指出过的那样。”——我要用例子来解释我对“有规律的”作何理解。

18. 定义在这里对我没有用处。

19. 解释规则，只是使其成为明白易懂的东西，这可能已经是在遵循这解释了。

20. 教人乘法：我们用相同的开端去拒绝不同的乘法图式。

21. 说曾经有人在世界历史上遵守过一次规则，这是没有意义的。——至于规则是否被遵循，这一点并未产生争论。——这应该是我们的语言借以（譬如说）作出描述的框架。

22. 我们好像是使经验命题强化为规则，现在经验受到了它的比较和评判。

23. 计算的要点不在于计算得正确还是错误。——算术命题