

2005

高考总复习教程

天利38套专题

天利

- 搜狐教育推荐用书
- 天利38套专题训练
- 举一反三 跳出题海

3年模拟+高考 常考易错 典型试题

(全国通用) ◆ 全国高考命题研究组 编
北京天利考试信息网

数学

天利
时地利
考无不胜

西藏人民出版社

编写说明

在高考复习中,练习是不可或缺的,但是传统的题海战术,耗费大量时间不说,就复习效果而言,也不是人人满意的。最有效最适用也最现实的迅速提升成绩的办法,是找出考核要求及试题的规律,通过做少量的典型试题,举一反三地掌握某一类型的知识点和试题解法。基于上述考虑,北京天利考试信息网邀请北京和其他省市特高级教师在充分研究新旧教材更替、考试大纲变化、各省市单独命题以及各种高考模式并行等情况的基础上编写了本书,供全国各地考生在第一轮总复习和第二轮巩固训练,以及查漏补缺时使用。

读者使用本书时请注意以下特点:

1. 本书依照新考试大纲和新教材编写,充分考虑了各种高考模式与各省市单独命题等因素,适合全国各地考生使用;

2. 试题的编排参照考试大纲要求,为了使全书更系统,更符合学习规律,把分散在各章节的相关知识点作了整合,大纲要求的所有考点均包括在内,读者可按照自己的复习顺序选用试题;

3. 本书依照各方研究成果按专题选用了近三年全国高考试题和各省市大联考模拟中的常考、易错、典型试题。题目前标有出处,如('03 山西)表示选自2003年山西省模拟题;

4. 本书先训练后讲解,答案及解题提示附在书后,以便读者找出规律达到举一反三的效果;

5. 个别试题的选材可能过时(如政治学科),但考核的内容仍属应当掌握的范畴,书中未作修改。听力步步高是纯粹的听力训练用书,并配有4盒磁带(磁带录制顺序与书一致)。英语册不含听力内容。

本书主编:范国平

参加各册编写的老师:

语文:范国平 李学中

数学:赵墨林 刘志学

英语:王 春 曹 宁

化学:宋惠民 李君燕

物理:彭文刚 张 波

生物:张淑娟 丁彩梅

政治:闫小辉 张家如

历史:陈同振 李 敏

地理:刘荣珍 马玉芬

听力步步高:王 春 曹 宁

本书编写过程中,得到了北京海淀区、东城区、西城区和其他省市教研室的大力支持和帮助,在此一并致谢。如有错误或不足,敬请批评指正,意见和建议请寄:100027 北京 4717 信箱 本书编委会或登录“北京天利考试信息网(www.TL100.com)”留言。

本书的特别推荐网站:搜狐教育频道(<http://learning.sohu.com>)。

衷心祝愿考生考好成绩,圆大学梦!

编 者

2004年6月于北京

目 录

专题一	集合与简易逻辑	(1)
专题二	映射、函数、反函数	(3)
专题三	函数解析式、定义域、值域	(7)
专题四	函数的图像和性质(一)	(11)
专题五	函数的图像和性质(二)	(15)
专题六	二次函数的图像和性质	(19)
专题七	指数函数、对数函数	(21)
专题八	函数最值问题	(25)
专题九	函数在应用题中的运用	(27)
专题十	函数综合	(31)
专题十一	三角函数概念、性质和图像	(33)
专题十二	三角函数式变形与求值	(35)
专题十三	三角函数式最值及三角形计算	(37)
专题十四	三角函数综合	(39)
专题十五	等差数列	(43)
专题十六	等比数列	(47)
专题十七	数列通项、求和、极限与归纳法	(51)
专题十八	不等式(一)	(55)
专题十九	不等式(二)	(57)
专题二十	平面向量	(59)
专题二十一	复数	(61)
专题二十二	排列、组合、二项式定理	(63)
专题二十三	直线与平面	(67)
专题二十四	空间两平面	(71)
专题二十五	三垂线定理及其逆定理	(75)
专题二十六	空间角的计算与证明	(77)

专题二十七	空间距离的计算与证明	(81)
专题二十八	折叠问题	(83)
专题二十九	多面体与球	(85)
专题三十	空间向量及其应用	(89)
专题三十一	直线方程与直线位置关系	(91)
专题三十二	直线与圆	(93)
专题三十三	椭圆	(95)
专题三十四	双曲线	(99)
专题三十五	抛物线	(103)
专题三十六	直线与圆锥曲线的关系	(105)
专题三十七	曲线与方程	(107)
专题三十八	曲线综合	(109)
专题三十九	导数、概率、概率与统计	(111)
参考答案及解题提示		(115)

【考点提示】

1. 理解集合、子集、补集、交集、并集的概念. 了解空集和全集的意义. 了解属于、包含、相等关系的意义. 掌握有关的术语和符号, 并会用它们正确表示一些简单的集合.
2. 理解逻辑联结词“或”、“且”、“非”的含义. 理解四种命题及其相互关系. 掌握充要条件的意义.

【专题测试】

一、选择题

1. ('04 沈阳) 若 $A = \{(x, y) | |x+1| + (y-2)^2 = 0, x, y \in \mathbf{R}\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2\}$, 则 A, B 两集合间满足的关系是 ()
 A. $A \supsetneq B$ B. $A \subsetneq B$ C. $A \in B$ D. 以上都不对
2. ('04 福建) 设全集 $I = \mathbf{Z}$, 集合 $P = \{x | x = 2n, n \in \mathbf{Z}\}$, $Q = \{x | x = 4m, m \in \mathbf{Z}\}$, 则 I 等于 ()
 A. $P \cup Q$ B. $C_I P \cup Q$ C. $P \cup C_I Q$ D. $C_I P \cup C_I Q$
3. ('00 上海) 若集合 $S = \{y | y = 3^x, x \in \mathbf{Z}\}$, $T = \{y = x^2 - 1, x \in \mathbf{Z}\}$, 则 $S \cap T$ 是 ()
 A. S B. T C. $\emptyset$ D. 有限集
4. ('02 全国) 设集合 $M = \{x | x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbf{Z}\}$, $N = \{x | x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$, 则 ()
 A. $M = N$ B. $M \subsetneq N$ C. $M \supsetneq N$ D. $M \cap N = \emptyset$
5. ('02 北京) 满足条件 $M \cup \{1\} = \{1, 2, 3\}$ 的集合 M 的个数是 ()
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
6. ('03 北京) 设集合 $A = \{x | x^2 - 1 > 0\}$, $B = \{x | \log_2 x > 0\}$, 则 $A \cap B$ 等于 ()
 A. $\{x | x > 1\}$ B. $\{x | x > 0\}$
 C. $\{x | x < -1\}$ D. $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$
7. ('04 南通) 设 U 是全集, 集合 A, B 满足 $A \subsetneq B$, 则下列命题不成立的是 ()
 A. $A \cup B = B$ B. $A \cap B = A$
 C. $A \cup C_U B = U$ D. $(C_U A) \cup B = U$
8. ('04 南京) 设集合 $M = \{x | x^2 - x < 0, x \in \mathbf{R}\}$, $N = \{x | |x| < 2, x \in \mathbf{R}\}$, 则 ()
 A. $N \subsetneq M$ B. $M \cap N = M$ C. $M \cup N = M$ D. $M \cup N = \mathbf{R}$
9. ('04 重庆) 定义集合 A, B 的一种运算: $A * B = \{x | x = x_1 + x_2, \text{ 其中 } x_1 \in A, x_2 \in B\}$, 若 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$, 则 $A * B$ 中的所有元素数字之和为 ()
 A. 9 B. 14 C. 18 D. 21

10. ('01 全国) 如图 1-1, 小圆圈表示网络的结点, 结点之间的连线表示它们有网线相联. 连线标注的数字表示该段网线单位时间内可以通过的最大信息量. 现从结点 A 向结点 B 传递信息, 信息可以分开沿不同的路线

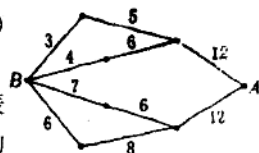


图 1-1

同时传递,则单位时间内传递的最大信息量是

()

A. 26

B. 24

C. 20

D. 19

11. ('02 全国) 函数 $y = x^2 + bx + c (x \in [0, +\infty))$ 是单调函数的充要条件是

()

A. $b \geq 0$

B. $b \leq 0$

C. $b > 0$

D. $b < 0$

12. ('01 上海) 已知 a, b 为两条不同的直线, α, β 为两个不同的平面, 且 $a \perp \alpha, b \perp \beta$, 则下列命题中的假命题是

()

A. 若 $a \parallel b$, 则 $\alpha \parallel \beta$

B. 若 $a \perp \beta$, 则 $a \perp b$

C. 若 a, b 相交, 则 α, β 相交

D. 若 α, β 相交, 则 a, b 相交

二、填空题

13. ('02 上海春招) 若全集 $I = \mathbf{R}$, $f(x), g(x)$ 均为 x 的二次函数, $P = \{x | f(x) < 0\}$,

$Q = \{x | g(x) \geq 0\}$, 则不等式组 $\begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$ 的解集可用 P, Q 表示为_____.

14. ('02 上海) 已知函数 $y = f(x)$ (定义域为 D , 值域为 A) 有反函数 $y = f^{-1}(x)$, 则方程 $f(x) = 0$ 有解 $x = a$, 且 $f(x) > x (x \in D)$ 的充要条件是 $y = f^{-1}(x)$ 满足_____.

15. ('03 上海) 设集合 $A = \{x | |x| < 4\}$, $B = \{x | x^2 - 4x + 3 > 0\}$, 则集合 $\{x | x \in A \text{ 且 } x \notin A \cap B\} =$ _____.

三、解答题

16. ('03 丰台) 已知集合 $A = \{x | \log_3(x^2 + x + 1)^2 + 4\sqrt{\log_3(x^2 + x + 1)} > 6, x \in \mathbf{R}\}$,

$B = \{x | \frac{x}{x^2 + x + 2} \geq \frac{1}{4}, x \in \mathbf{R}\}$, 设 $M = A \cap B$, 求集合 M .

17. ('02 东北三校) 已知集合 $A = \{x | (\frac{1}{2})^{x^2 - x - 6} < 1\}$, $B = \{x | \log_4(x + a) < 1\}$, 若 $A \cap B = \emptyset$, 求实数 a 的取值范围.

18. 某中学高一(甲)班有学生 50 人, 参加数学小组的有 25 人, 参加物理小组的有 32 人, 求既参加数学小组, 又参加物理小组的人数的最大值与最小值.

19. 已知函数 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的增函数, $a, b \in \mathbf{R}$, 对命题“若 $a + b \geq 0$, 则 $f(a) + f(b) \geq f(-a) + f(-b)$ ”.

(1) 写出逆命题, 判断其真假, 并证明你的结论.

(2) 写出其逆否命题, 并证明你的结论.

【考点提示】

1. 了解映射的概念,理解函数的概念.
2. 了解反函数的概念及互为反函数的函数图像间的关系会求一些简单函数的反函数.

【专题测试】

一、选择题

1. ('99 全国) 已知映射 $f: A \rightarrow B$, 其中集合 $A = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$, 集合 B 中的元素都是 A 中元素在映射 f 下的象, 且对任意的 $a \in A$, 在 B 中和它对应的元素是 $|a|$, 则集合 B 中元素的个数是 ()

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

2. ('00 全国) 设集合 A 和 B 都是自然数集 N , 映射 $f: A \rightarrow B$ 把集合 A 中的元素 n 映射到集合 B 中的元素 $2^n + n$, 则在映射 f 下, 象 20 的原象是 ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

3. ('03 江西九校) 由等式 $x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = (x+1)^4 + b_1(x+1)^3 + b_2(x+1)^2 + b_3(x+1) + b_4$ 定义映射 $f: (a_1, a_2, a_3, a_4) \rightarrow b_1 + b_2 + b_3 + b_4$, 则 $f(4, 3, 2, 1) =$ ()

- A. 10 B. 7 C. -1 D. 0

4. ('04 成都) 已知集合 $A = \{x | 10 \leq x \leq 6\}$, $B = \{y | 10 \leq y \leq 3\}$, 则下列对应关系中, 不能看作从 A 到 B 的映射的是 ()

- A. $f: x \rightarrow y = \frac{1}{2}x$ B. $f: x \rightarrow y = x$
C. $f: x \rightarrow y = \frac{1}{3}x$ D. $f: x \rightarrow y = \frac{1}{6}x$

5. ('04 陕西) 十进制整数转换成二进制数的最简便方法是“除 2 取余”法, 它是用待转换的十进制整数除以 2, 取其余数, 作为相应二进制数的最低位, 然后, 再用商除以 2, 其余数作为相应二进制数的次低位, 如此一直重复进行下去, 直到商为 0, 确定相应二进制数的最高位时为止. 对于十进制数整数 25 换成二进制数应是 ()

- A. 10010 B. 10011 C. 11001 D. 10101

6. ('02 石家庄) 对于任意实数 x, y , 定义运算 $x * y = (x+1)(y+1) - 1$, 则以下结论中成立的是 ()

- (1) 对任意实数 $x, y, x * y = y * x$
(2) 对任意实数 $x, y, z, x * (y + z) = (x * y) + (x * z)$
(3) 对任意实数 $x, y, z, x * (y * z) = (x * y) * z$
(4) 对任意实数 $x, x * 0 = x$

- A. (1)(3)(4) B. (1)(3)
C. (1)(2)(3) D. (2)(3)(4)

7. ('99 全国) 若函数 $y = f(x)$ 的反函数是 $y = g(x)$, $f(a) = b, ab \neq 0$, 则 $g(b)$ 等于 ()

A. a B. a^{-1} C. b D. b^{-1}

8. ('02 上海春招) 设 $a > 0, a \neq 1$, 函数 $y = \log_a x$ 的反函数和 $y = \log_a \frac{1}{x}$ 的反函数的图像关于

()

A. x 轴对称B. y 轴对称C. $y = x$ 对称

D. 原点对称

9. ('01 全国) 函数 $y = 2^{-x} + 1 (x > 0)$ 的反函数是

()

A. $y = \log_2 \frac{1}{x-1}, x \in (1, 2)$ B. $y = -\log_2 \frac{1}{x-1}, x \in (1, 2)$ C. $y = \log_2 \frac{1}{x-1}, x \in (1, 2]$ D. $y = -\log_2 \frac{1}{x-1}, x \in (1, 2]$

10. ('04 广州) 函数 $y = 1 - \sqrt{x-1} (x \geq 1)$ 的反函数为

()

A. $y = (x-1)^2 + 1 (x \leq 1)$ B. $y = (x-1)^2 + 1 (x \geq 1)$ C. $y = (x-1)^2 - 1 (x \leq 1)$ D. $y = (x-1)^2 - 1 (x \geq 1)$

11. ('03 东城) 函数 $y = f(x)$ 的图像过点 $(2, 1)$, 则 $y = f(x+3)$ 的反函数的图像必过定点

()

A. $(1, 2)$ B. $(2, -1)$ C. $(1, -1)$ D. $(2, -2)$

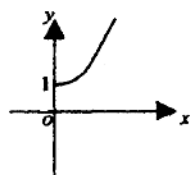
12. ('04 黄冈) 已知函数 $y = f(x)$ 的反函数是 $f^{-1}(x) = \log_{\sec^2 \theta} (\frac{2003}{x} + \tan^2 \theta), \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则方程 $f(x) = 2003$ 的解集为

()

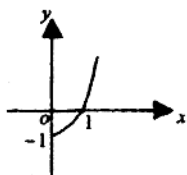
A. $\{-1\}$ B. $\{-1, 1\}$ C. $\{1\}$ D. $\emptyset$

13. ('04 天津) 函数 $y = x^2 + 1 (x \leq 0)$ 的反函数的大致图像为

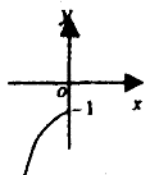
()



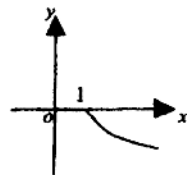
A



B



C



D

二、填空题

14. ('01 成都) 规定 2×2 数表的平方运算规则是 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix}$. 试计算: $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$

15. ('04 成都) 已知函数 $f(x) = x^2 - 2x + 2 (-1 \leq x \leq 1)$, 它的反函数 $f^{-1}(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

16. ('04 石家庄) 已知二次函数 $y = f(x)$ 在 $[-1, 2]$ 上存在反函数, 请你写出满足此条件的 $f(x)$ 的一个解析式: $f(x) =$ _____.

17. ('04 四川) 请构造一个非一次的函数, 使它的反函数图像与原函数图像重合 _____.

18. ('04 皖中) 已知 $f(x+1) = -f(x)$ 且 $f(x) = \begin{cases} x & (-1 < x \leq 0) \\ -x^2 & (0 < x \leq 1) \end{cases}$, 则 $f(5) =$ _____.

19. ('00 上海) 已知 $f(x) = 2^x + b$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$, 若 $y = f^{-1}(x)$ 的图像经过点 $Q(5, 2)$, 则 $b =$ _____.

20. ('02 全国) 函数 $y = \frac{2x}{1+x} [x \in (-1, +\infty)]$ 图像与其反函数图像的交点坐标为 _____.

三、解答题

21. ('03 北京) 设 $y = f(x)$ 是定义在区间 $[-1, 1]$ 上的函数, 且满足条件:

(i) $f(-1) = f(1) = 0$;

(ii) 对任意的 $u, v \in [-1, 1]$, 都有 $|f(u) - f(v)| \leq |u - v|$.

(I) 证明: 对任意的 $x \in [-1, 1]$, 都有 $x - 1 \leq f(x) \leq 1 - x$;

(II) 判断函数 $g(x) = \begin{cases} 1+x, & x \in [-1, 0) \\ 1-x, & x \in [0, 1] \end{cases}$ 是否满足题设条件;

(III) 在区间 $[-1, 1]$ 上是否存在满足题设条件的函数 $y = f(x)$, 且使得对任意的 $u, v \in [-1, 1]$, 都有 $|f(u) - f(v)| = |u - v|$.

若存在, 请举一例; 若不存在, 请说明理由.

22. ('03 石家庄)现代社会对破译密文的难度要求越来越高,有一种密码把英文的明文(真实文)按两个字母一组分组(如果最后剩一个字母,则任意添一个字母,拼成一组),例如:

Wish you success, 分组为: *Wi, sh, yo, us, uc, ce, ss* 得到

$$\begin{pmatrix} 23 \\ 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 \\ 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 \\ 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 \\ 19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 \\ 19 \end{pmatrix},$$

其中英文的 $a, b, c, \dots, z$ 的 26 个字母(不论大小写)依次对应 $1, 2, 3, \dots, 26$ 这 26 个自然数, 见表格:

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>	<i>l</i>	<i>m</i>
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
<i>n</i>	<i>o</i>	<i>p</i>	<i>q</i>	<i>r</i>	<i>s</i>	<i>t</i>	<i>u</i>	<i>v</i>	<i>w</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	24	26

给出如下一个变换公式: $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$ 将明文转换为密文, 如

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x' = 3 + 2 \times 5 = 13, \\ y' = 3 \times 3 + 4 \times 5 = 29. \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{即 } ce \text{ 变成 } mc \text{ (说明: } 29 \div 26 \text{ 余数为 } 3 \text{.)}$$

$$\text{又如 } \begin{pmatrix} 23 \\ 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x' = 23 + 2 \times 9 = 41, \\ y' = 3 \times 23 + 4 \times 9 = 105. \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 15 \\ 1 \end{pmatrix},$$

即 *wi* 变成 *oa* (说明: $41 \div 26$ 余数为 15, $105 \div 26$ 余数为 1)

(I) 按上述方法将明文 *star* 译成密文;

(II) 若按上述方法将某明文译成的密文是 *kcwi*, 请你找出它的明文.

7. ('04 杭州) 若函数 $f(x) = \begin{cases} f(x+2) & (x < 2) \\ 2^{-x} & (x \geq 2) \end{cases}$, 则 $f(-3)$ 的值为 ()

- A. 2 B. 8 C. $\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{2}$

8. ('03 全国) 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} - 1, & x \leq 0, \\ x^{\frac{1}{2}}, & x > 0. \end{cases}$

若 $f(x_0) > 1$, 则 x_0 的取值范围是 ()

- A. $(-1, 1)$ B. $(-1, +\infty)$
C. $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ D. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

9. ('04 黄冈) 对于任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x+1) = 2f(x)$, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = x(1-x)$, 则 $f(-1.5)$ 的值是 ()

- A. $\frac{1}{16}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $-\frac{15}{4}$

10. ('04 南宁) 拟定从甲地到乙地通话 m 分钟的电话费由 $f(m) = 1.06(0.5 \times [m] + 1)$ 给出, 其中 $m > 0$, $[m]$ 是大于或等于 m 的最小整数 (如 $[3] = 3, [3.7] = 4, [3.1] = 4$), 则从甲地到乙地通话时间为 5.5 分钟的话费为 ()

- A. 3.71 B. 3.97 C. 4.24 D. 4.77

11. ('04 郴州) 已知函数 $y = f(x)$ 的图像如图 3-1 所示, 那么 $f(x)$ 的解析式是 ()

- A. $\sqrt{x^2 - 2x + 1}$
B. $x^2 - 2|x| + 1$
C. $\sqrt{x^2 - 2|x| + 1}$
D. $|x^2 - 1|$

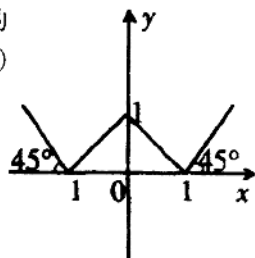


图 3-1

二、填空题

12. ('02 全国) 已知函数 $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$, 那么 $f(1) + f(2) + f(\frac{1}{2}) + f(3) + f(\frac{1}{3}) + f(4) + f(\frac{1}{4})$ = _____.

13. 若函数 $f(2^x)$ 的定义域是 $[-1, 1]$, 则 $f(\log_2 x)$ 的定义域是 _____.

14. ('04 武汉) 若函数 $f(x) = \frac{2}{x-2} (x \in F)$ 的值域为 $(-\infty, -\frac{1}{3}]$, 则其定义域 F 为 _____.

15. ('04 皖中) 设函数 $f(x) = \sqrt{-x^2 - 4x + a}$, $g(x) = \frac{4}{3}x + 1$, 当 $x \in [-4, 0]$ 时恒有 $f(x) \leq g(x)$, 则 a 的取值范围是 _____.

16. ('04 南昌) 定义符号函数 $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$, 则不等式: $x + 2 > (2x - 1)^{\operatorname{sgn} x}$ 的解集是 _____.

17. ('04 宁波) 若函数 $f(x) = \log_a(x + \frac{a}{x} - 4)$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的值域是 $\mathbf{R}$, 则实数 a 的取值范围是 _____.

18. ('04 唐山) 若函数 $f(x)$ 是具有性质: ① $f(x)$ 为偶函数; ② 对任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(\frac{\pi}{2} - x) = f(\frac{\pi}{2} + x)$, 则函数 $f(x)$ 的解析式可能是_____ (只需写出满足条件的 $f(x)$ 的一个解析式即可)

19. ('04 福州) 某地一种出租车的车费的计算规定如下: 基本车费为 7 元, 行程不足 3 公里时, 只收取基本车费; 行程不足 5 公里时, 大于等于 3 公里的那部分, 每增加 0.5 公里, 加收车费 0.7 元, 不足 0.5 公里按 0.5 公里计算 (如: 行程为 x 公里, 在 $4 \leq x < 4.5$ 时, 车费为 $7 + 0.7 \times 3 = 9.1$ 元); 行程大于等于 5 公里时, 大于等于 5 公里的那部分, 每增加 0.2 公里, 加收车费 0.4 元. 如果某人从 A 地到 B 地, 共付车费 11 元, 那么从 A 地到 B 地的行程 x 的范围是_____.

三、解答题

20. ('02 北京) 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的不恒为零的函数, 且对于任意的 $a, b \in \mathbf{R}$, 都满足:
 $f(a \cdot b) = af(b) + bf(a)$

(1) 求 $f(0), f(1)$ 的值;

(2) 判断 $f(x)$ 的奇偶性, 并证明你的结论;

(3) 若 $f(2) = 2, u_n = \frac{f(2^{-n})}{n} (n \in \mathbf{N}^+)$, 求数列 $|u_n|$ 的前 n 项的和 S_n .

21. ('04 重庆) 已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3}a \sin x \cos x - 2a \sin^2 x + 2a + b + 1 (a > 0)$ 的定义域为 $[0, \frac{\pi}{2}]$, 值域为 $[-4, 2]$. 求函数 $f(x)$ 的表达式.

22. ('04 黄冈) 已知 $f(x) = \log_2 \frac{x+2}{x-2}$, $g(x) = \log_2(x-2) + \log_2(p-x)$ ($p > 2$),

(1) 求 $f(x), g(x)$ 同时有意义的实数 x 的取值范围;

(2) 求 $F(x) = f(x) + g(x)$ 的值域.

23. ('04 天津) 已知函数 $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 3x + 2}$, $x \in (-\infty, 1]$

(I) 判断 $f(x)$ 的单调性;

(II) 求 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$;

(III) 求出该函数的值域.

24. ('04 海淀) 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = -\frac{7x}{x^2 + x + 1}$

(I) 求当 $x < 0$ 时, $f(x)$ 的解析式;

(II) 试确定函数 $y = f(x)$ ($x \geq 0$) 的单调区间, 并证明你的结论;

(III) (理) 若 $x_1 \geq 2$, 且 $x_2 \geq 2$

证明: $|f(x_1) - f(x_2)| < 2$.

【考点提示】

1. 了解互为反函数的函数图像间的关系.
2. 了解函数的单调性的概念,掌握判断一些简单函数的单调性的方法.

【专题测试】

一、选择题

1. ('01 全国) 设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 都是单调函数, 有如下四个命题:

- ① 若 $f(x)$ 单调递增, $g(x)$ 单调递增, 则 $f(x) - g(x)$ 单调递增;
- ② 若 $f(x)$ 单调递增, $g(x)$ 单调递减, 则 $f(x) - g(x)$ 单调递增;
- ③ 若 $f(x)$ 单调递减, $g(x)$ 单调递增, 则 $f(x) - g(x)$ 单调递减;
- ④ 若 $f(x)$ 单调递减, $g(x)$ 单调递减, 则 $f(x) - g(x)$ 单调递减;

其中正确的命题是

()

- A. ①③ B. ①④ C. ②③ D. ②④

2. ('04 湖南师大附中) 设 $f(x)$ 为奇函数, 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 均有 $f(x+4) = f(x)$, 已知 $f(-1) = 3$, 则 $f(-3)$ 等于

()

- A. -3 B. 3 C. 4 D. -4

3. ('02 北京、安徽春招) 函数 $y = \lg|x|$

()

- A. 是偶函数, 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递增
- B. 是奇函数, 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递增
- C. 是偶函数, 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增
- D. 是奇函数, 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增

4. ('04 江西九校) 下列同时满足条件: (1) 是奇函数 (2) 在 $[0, 1]$ 上是增函数 (3) 在 $[0, 1]$ 上最小值为 0 的函数是

()

- A. $y = x^5 - 5x$ B. $y = \sin x + 2x$

- C. $y = \frac{1-2^x}{1+2^x}$ D. $y = \sqrt{x} - 1$

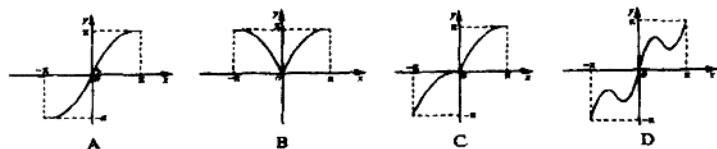
5. ('04 福州) 函数 $y = x + \frac{2}{x}$ 的图像关于

()

- A. x 轴对称
- B. y 轴对称
- C. 原点对称
- D. 直线 $y = x$ 对称

6. ('02 上海高考) 函数 $y = x + \sin|x|$, $x \in [-\pi, \pi]$ 的大致图像是

()



7. ('04 重庆) 已知函数 $y = f(x)$ 的图像如图 4-1 所示, 那么, 函数 $y = |f(x+1)|$ 的图像是

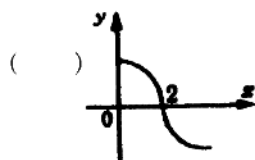
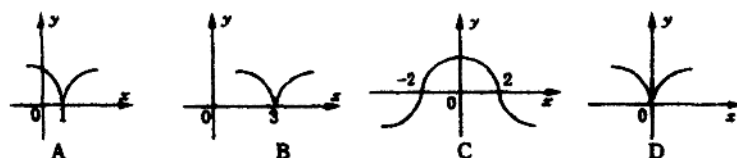


图 4-1



8. ('03 上海) $f(x)$ 是定义在区间 $[-c, c]$ 上的奇函数, 其图像如图 4-2 所示. 令 $g(x) = af(x) + b$, 则下列关于函数 $g(x)$ 的叙述正确的是

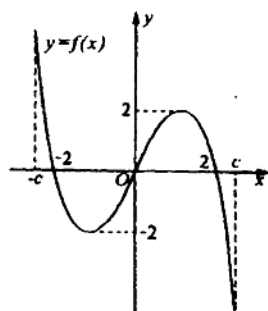


图 4-2

- A. 若 $a < 0$, 则函数 $g(x)$ 的图像关于原点对称
- B. 若 $a = -1, -2 < b < 0$, 则方程 $g(x) = 0$ 有大于 2 的实根
- C. 若 $a \neq 0, b = 2$, 则方程 $g(x) = 0$ 有两个实根
- D. 若 $a \geq 1, b < 2$, 则方程 $g(x)$ 有三个实根

9. ('02 北京) 如图 4-3 所示: $f_i(x) (i = 1, 2, 3, 4)$ 是定义在 $[0, 1]$ 上的四个函数, 其中满足性质: “对 $[0, 1]$ 中任意的 x_1 和 x_2 , 任意 $\lambda \in [0, 1]$, $f[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$ 恒成立”的只有

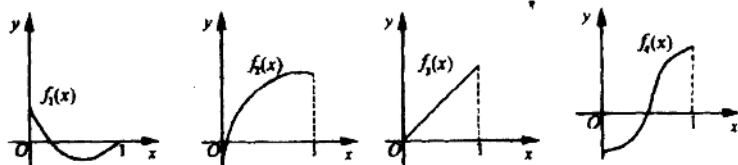


图 4-3

- A. $f_1(x), f_3(x)$
- B. $f_2(x)$
- C. $f_2(x), f_3(x)$
- D. $f_4(x)$

10. 函数 $y = |x^2 - 1| + 1$ 的图像与函数 $y = 2^x$ 的图像交点的个数为

二、填空题

11. ('04 南通) 函数 $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ 的单调递减区间是_____.

12. ('03 北京) 函数 $f(x) = \lg(1 + x^2)$, $g(x) = \begin{cases} x+2, & x < -1, \\ 0, & |x| \leq 1, \\ -x+2, & x > 1, \end{cases}$ $h(x) = \tan 2x$ 中, _____是

偶函数.

13. ('02 上海春招) 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 若当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \log_3(1+x)$, 则 $f(-2) =$ _____.

14. ('04 上海六校) 偶函数 $y = f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 在区间 $[-1, 0]$ 上单调递增, 且满足 $f(x+1) = -f(x)$, 在下面的判断中正确的判断是 _____ (把你认为正确的判断都填上).

① $f(x)$ 是周期函数.

② $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是增函数.

③ $f(x)$ 的图像关于直线 $x = 1$ 对称.

④ $f(2) = f(0)$.

三、解答题

15. ('01 京、皖、蒙春季高考) 设函数 $f(x) = \frac{x+a}{x+b}$ ($a > b > 0$), 求 $f(x)$ 的单调区间, 并证明 $f(x)$ 在其单调区间上的单调性.

16. ('03 上海) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x} - \log_2 \frac{1+x}{1-x}$, 求函数 $f(x)$ 的定义域, 并讨论它的奇偶性和单调性.

17. ('04 南昌) 已知函数 $f(x^2 - 1) = \log_a \frac{x^2}{2-x^2}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$).

(1) 求 $f(x)$ 的表达式, 并判断奇偶性;

(2) (文) 若 $0 < a < 1$, 求 $f^{-1}(x)$ 并判断单调性.

(理) 求 $f^{-1}(x)$ 并判断单调性.