

高等学校教材

工程数学

矢量分析与场论

(第二版)

谢 树 艺



高等教育出版社

高等学校教材

工 程 数 学

矢量分析与场论

(第二版)

谢树艺

高等教育出版社

本书是按照1980年审定的《工程数学教学大纲(草案)》在第一版的基础上修订的。主要内容有: 矢量分析, 场论, 哈密顿算子, 梯度、散度、旋度与调和量在正交曲线坐标系中的表示式等四章。与第一版相比, 除了三、四两章系由附录改为正文外, 还增加了若干内容与例题。本书论证清晰, 文笔通畅, 可作为工科有关专业的教材。配合《工程数学——矢量分析与场论学习指导书》(1982年版), 本教材也可供函授学校与自学者使用。

图书在版编目(CIP)数据

工程数学: 矢量分析与场论/谢树艺. —2. 版—北京:
高等教育出版社, 1985. 3 (2004 重印)

ISBN 7-04-001263-4

I. 工… I. 谢… II. ①工程数学②矢量分析③场论
IV. TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 20281 号

工程数学 矢量分析与场论
谢树艺

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷	北京市朝阳区北苑印刷厂		
开 本	850×1168 1/32	版 次	1978 年 12 月第 1 版
印 张	3.5		1985 年 3 月第 2 版
字 数	82 000	印 次	2004 年 2 月第 26 次印刷
		定 价	5.00 元

凡购买高等教育出版社图书, 如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请在所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

第二版前言

这一版是在1978年第一版的基础上修订的。修订时以1980年6月工科数学教材编审委员会扩大会议审订的《工程数学教学大纲(草案)》为根据,并参照了我校使用第一版的经验以及许多使用此书的教师和读者的宝贵意见。这次修订,对超出大纲的内容或大纲中原已打了“*”的内容均统一标以“*”号,可根据不同的学制及各类专业的不同要求加以选用。在修订中,对第一版里的不妥和错误之处,作了改正;同时,略增加了些例题,如学时不够,可少讲或不讲;对习题也略有增加,其中稍难一点的标有“*”号,供中等以上程度的学生选作;此外,根据一些教师的意见,将第一版的附录(一)与附录(二)改为第三章与第四章,同时将第二章第五节中“平行平面场的概念”提前在第一节之末尾处讲。除此以外,在修订中还尽量注意使《工程数学——矢量分析与场论学习指导书》(1982年版),对此第二版也适用。

使用第二版的教学时数:全书大约为20学时;若除去有“*”号的内容,则大约为14学时。

许多教师和读者对本书提出了宝贵意见,特此表示衷心感谢。

限于编者水平,在第二版中,难免仍存在缺点和错误,诚恳地希望读者批评指正。

编者

1983年10月于重庆大学

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010) 58581897/58581698/58581879/
58581877

传 真：(010) 82086060

E - mail: dd@hep.com.cn 或 chenrong@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社法律事务部

邮 编：100011

购书请拨打电话：(010)64014089 64054601 64054588

目 录

*第一章 矢量分析	1
第一节 矢性函数	1
1. 矢性函数的概念	1
2. 矢端曲线	2
3. 矢性函数的极限和连续性	3
第二节 矢性函数的导数与微分	4
1. 矢性函数的导数	4
2. 导矢的几何意义	6
3. 矢性函数的微分	7
4. 矢性函数的导数公式	9
第三节 矢性函数的积分	12
1. 矢性函数的不定积分	12
2. 矢性函数的定积分	14
习题 1	15
第二章 场论	17
第一节 场	17
1. 场的概念	17
2. 数量场的等值面	17
3. 矢量场的矢量线	19
* 4. 平行平面场	22
习题 2	24
第二节 数量场的方向导数和梯度	25
1. 方向导数	25
2. 梯度	29
习题 3	34
第三节 矢量场的通量及散度	35
1. 通量	35

2. 散度	41
* 3. 平面矢量场的通量与散度	45
习题 4	47
第四节 矢量场的环量及旋度	48
1. 环量	48
2. 旋度	53
习题 5	57
第五节 几种重要的矢量场	58
1. 有势场	59
2. 管形场	66
3. 调和场	68
习题 6	72
第三章 哈密顿算子 ∇	75
习题 7	82
*第四章 梯度、散度、旋度与调和量在正交曲线坐标系中的表示式	84
第一节 曲线坐标的概念	84
第二节 正交曲线坐标系中的弧微分	86
1. 坐标曲线的弧微分	86
2. 一般曲线的弧微分	87
第三节 在正交曲线坐标系中梯度、散度、旋度与调和量的表示式	94
1. 梯度的表示式	94
2. 散度的表示式	95
3. 调和量的表示式	96
4. 旋度的表示式	96
5. 梯度、散度、旋度与调和量在柱面坐标系和球面坐标系中的表示式	98
习题 8	99
习题答案	101

*第一章 矢量分析

这一章矢量分析,是矢量代数的继续,它是场论的基础知识,同时也是研究其他许多学科的有用工具.其主要内容是介绍矢性函数及其微分、积分等.

第一节 矢性函数

1. 矢性函数的概念

我们在矢量代数中,曾经学过模和方向都保持不变的矢量,这种矢量称为常矢(零矢量的方向为任意,可作为一个特殊的常矢量);然而,在许多科学、技术问题中,我们常常遇到模和方向或其中之一会改变的矢量,这种矢量称为变矢.例如当质点 M 沿曲线 l 运动时,其速度矢量 v ,在运动过程中,就是一个变矢,参看图(1-1).此外,在矢量分析中还引进了矢性函数的概念,其定义如下.

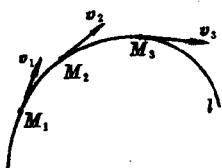


图 1-1

定义:设有数性变量 t 和变矢 A ,如果对于 t 在某个范围 G 内的每一个数值, A 都以一个确定的矢量和它对应,则称 A 为数性变量 t 的矢性函数,记作

$$A = A(t), \quad (1.1)$$

并称 G 为函数 A 的定义域.

矢性函数 $A(t)$ 在 $Oxyz$ 直角坐标系中的三个坐标(即它在三个坐标轴上的投影),显然都是 t 的函数:

$$A_x(t), \quad A_y(t), \quad A_z(t),$$

所以,矢性函数 $A(t)$ 的坐标表示式为:

$$A = A_x(t)i + A_y(t)j + A_z(t)k, \quad (1.2)$$

其中 i, j, k 为沿 x, y, z 三个坐标轴正向的单位矢量. 可见, 一个矢性函数和三个有序的数性函数(坐标)构成一一对应的关系.

2. 矢端曲线

本章所讲的矢量均指自由矢量, 就是当二矢量的模和方向都相同时, 就认为此二矢量是相等的. 据此, 为了能用图形来直观地表示矢性函数 $A(t)$ 的变化状态, 我们就可以把 $A(t)$ 的起点取在坐标原点. 这样, 当 t 变化时, 矢量 $A(t)$ 的终点 M 就描绘出一条曲线 l , 如图(1-2); 这条曲线叫做矢性函数 $A(t)$ 的矢端曲线, 亦叫做矢性函数 $A(t)$ 的图形. 同时称(1.1)式或(1.2)式为此曲线的矢量方程.

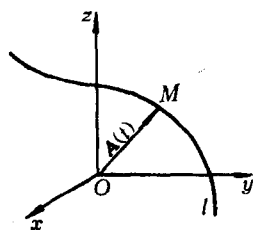


图 1-2

由矢量代数知道: 起点在坐标原点 O , 终点为 $M(x, y, z)$ 的矢量 \overrightarrow{OM} 叫做点 M (对于 O 点) 的矢径, 常用 r 表示:

$$r = \overrightarrow{OM} = xi + yj + zk.$$

当我们把矢性函数 $A(t)$ 的起点取在坐标原点时, $A(t)$ 实际上就成为其终点 $M(x, y, z)$ 的矢径. 因此, $A(t)$ 的三个坐标 $A_x(t), A_y(t), A_z(t)$ 就对应地等于其终点 M 的三个坐标 x, y, z . 即有

$$x = A_x(t), \quad y = A_y(t), \quad z = A_z(t), \quad (1.3)$$

此式就是曲线 l 的以 t 为参数的参数方程.

容易看出, 曲线 l 的矢量方程(1.2)和参数方程(1.3)之间, 有着明显的一一对应关系, 只要知道其中的一个, 就可以立刻写出其另一个来.

例如: 已知圆柱螺旋线(图 1-3)的参数方程为

$$x = a \cos \theta, \quad y = a \sin \theta, \quad z = b\theta,$$

则其矢量方程为

$$r = a \cos \theta i + a \sin \theta j + b\theta k.$$

又如：已知摆线(图 1-4)的参数方程为

$$x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t),$$

则其矢量方程为

$$\mathbf{r}=a(t-\sin t)\mathbf{i}+a(1-\cos t)\mathbf{j}.$$

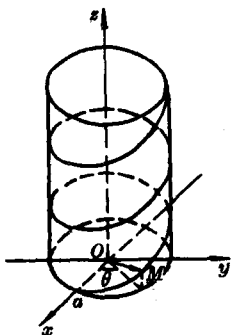


图 1-3

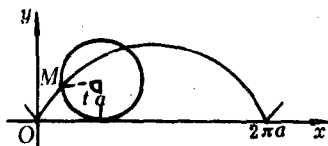


图 1-4

3. 矢性函数的极限和连续性

和数性函数一样,矢性函数的极限和连续性,是矢性函数的微分与积分的基础概念.兹分述于下:

(1) 矢性函数极限的定义: 设矢性函数 $A(t)$ 在点 t_0 的某个邻域内有定义(但在 t_0 处可以没有定义), A_0 为一常矢. 若对于任意给定的正数 ϵ , 都存在一个正数 δ , 使当 t 满足 $0 < |t - t_0| < \delta$ 时, 就有

$$|A(t) - A_0| < \epsilon$$

成立, 则称 A_0 为矢性函数 $A(t)$ 当 $t \rightarrow t_0$ 时的极限, 记作

$$\lim_{t \rightarrow t_0} A(t) = A_0. \quad (1.4)$$

这个定义与数性函数的极限定义完全类似. 因此, 矢性函数也就有类似于数性函数中的一些极限运算法则. 例如

$$\lim_{t \rightarrow t_0} u(t)A(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} u(t) \lim_{t \rightarrow t_0} A(t) \quad (1.5)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [A(t) \pm B(t)] = \lim_{t \rightarrow t_0} A(t) \pm \lim_{t \rightarrow t_0} B(t), \quad (1.6)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [A(t) \cdot B(t)] = \lim_{t \rightarrow t_0} A(t) \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} B(t), \quad (1.7)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [A(t) \times B(t)] = \lim_{t \rightarrow t_0} A(t) \times \lim_{t \rightarrow t_0} B(t), \quad (1.8)$$

其中 $u(t)$ 为数性函数, $A(t), B(t)$ 为矢性函数; 且当 $t \rightarrow t_0$ 时, $u(t), A(t), B(t)$ 均有极限存在.

依此, 设

$$A(t) = A_x(t)i + A_y(t)j + A_z(t)k,$$

则由(1.6)与(1.5)有

$$\lim_{t \rightarrow t_0} A(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} A_x(t)i + \lim_{t \rightarrow t_0} A_y(t)j + \lim_{t \rightarrow t_0} A_z(t)k, \quad (1.9)$$

此式把求矢性函数的极限, 归结为求三个数性函数的极限.

(2) 矢性函数连续性的定义: 若矢性函数 $A(t)$ 在点 t_0 的某个邻域内有定义, 而且有

$$\lim_{t \rightarrow t_0} A(t) = A(t_0), \quad (1.10)$$

则称 $A(t)$ 在 $t = t_0$ 处连续.

容易看出, 矢性函数 $A(t)$ 在点 t_0 处连续的充要条件是它的三个坐标函数 $A_x(t), A_y(t), A_z(t)$ 都在 t_0 处连续.

若矢性函数 $A(t)$ 在某个区间内的每一点处都连续, 则称它在该区间内连续.

第二节 矢性函数的导数与微分

1. 矢性函数的导数

设有起点在 O 点的矢性函数 $A(t)$, 当数性变量 t 在其定义域内从 t 变到 $t + \Delta t$ ($\Delta t \neq 0$) 时, 对应的矢量分别为

$$A(t) = \overrightarrow{OM},$$

$$A(t + \Delta t) = \overrightarrow{ON},$$

如图(1-5), 则

$$A(t + \Delta t) - A(t) = \overrightarrow{MN}$$

叫做矢性函数 $A(t)$ 的增量, 记作 ΔA , 即

$$\Delta A = A(t + \Delta t) - A(t). \quad (2.1)$$

据此, 我们就可给出矢性函数的导数的定义.

定义: 设矢性函数 $A(t)$ 在点 t 的某一邻域内有定义, 并设 $t + \Delta t$ 也在这邻域内. 若 $A(t)$ 对应于 Δt 的增量 ΔA 与 Δt 之比

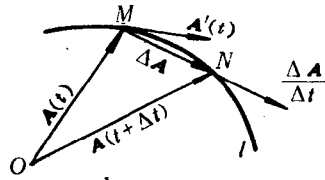


图 1-5

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{A(t + \Delta t) - A(t)}{\Delta t}$$

在 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 其极限存在, 则称此极限为矢性函数 $A(t)$ 在点 t 处的导数 (简称导矢), 记作 $\frac{dA}{dt}$ 或 $A'(t)$, 即

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A(t + \Delta t) - A(t)}{\Delta t}. \quad (2.2)$$

若 $A(t)$ 由坐标式给出:

$$A(t) = A_x(t)i + A_y(t)j + A_z(t)k,$$

且函数 $A_x(t)$, $A_y(t)$, $A_z(t)$ 在点 t 可导, 则有

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A_x}{\Delta t} i + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A_y}{\Delta t} j + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A_z}{\Delta t} k, \\ &= \frac{dA_x}{dt} i + \frac{dA_y}{dt} j + \frac{dA_z}{dt} k, \end{aligned}$$

即

$$A'(t) = A'_x(t)i + A'_y(t)j + A'_z(t)k. \quad (2.3)$$

此式把求矢性函数的导数归结为求三个数性函数的导数.

例 1. 已知圆柱螺旋线的矢量方程为

$$r(\theta) = a \cos \theta i + a \sin \theta j + b \theta k,$$

求导矢 $r'(\theta)$.

解: $r'(\theta) = (a \cos \theta)' i + (a \sin \theta)' j + (b \theta)' k$

$$= -a \sin \theta i + a \cos \theta j + b k.$$

例 2. 设 $e(\varphi) = \cos \varphi i + \sin \varphi j$,

$$e_1(\varphi) = -\sin \varphi i + \cos \varphi j.$$

试证明:

$$e'(\varphi) = e_1(\varphi), e_1'(\varphi) = -e(\varphi),$$

及 $e(\varphi) \perp e_1(\varphi)$.

$$\text{证: } e'(\varphi) = (\cos \varphi)' i + (\sin \varphi)' j$$

$$= -\sin \varphi i + \cos \varphi j$$

$$= e_1(\varphi),$$

$$e_1'(\varphi) = (-\sin \varphi)' i + (\cos \varphi)' j$$

$$= -\cos \varphi i - \sin \varphi j$$

$$= -e(\varphi),$$

又 $e(\varphi) \cdot e_1(\varphi) = \cos \varphi (-\sin \varphi) + \sin \varphi \cos \varphi = 0$,

所以 $e(\varphi) \perp e_1(\varphi)$.

容易看出, $e(\varphi)$ 为一单位矢量, 故其矢端曲线为一单位圆, 因此 $e(\varphi)$ 又叫做圆函数; 与之相伴出现的 $e_1(\varphi)$, 亦为单位矢量, 其矢端曲线亦为单位圆, 如图(1-6).

引用圆函数, 圆柱螺旋线的方程就可简写为

$$r(\theta) = a e(\varphi) + b \theta k,$$

其导矢 $r'(\theta) = a e_1(\varphi) + b k$.

2. 导矢的几何意义

如图(1-5), l 为 $A(t)$ 的矢端曲线,

$\frac{\Delta A}{\Delta t}$ 是在 l 的割线 MN 上的一个矢量. 当

$\Delta t > 0$ 时, 其指向与 ΔA 一致, 系指向对应 t 值增大的一方; 当 $\Delta t < 0$ 时, 其指向与 ΔA 相反, 如图(1-7), 但此时 ΔA 指向对

应 t 值减少的一方, 从而 $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ 仍指向对应 t

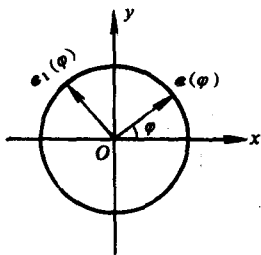


图 1-6

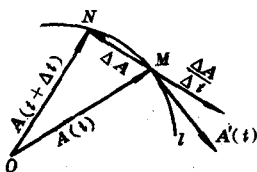


图 1-7

值增大的一方.

在 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 由于割线 MN 绕点 M 转动, 且以点 M 处的切线为其极限位置. 此时, 在割线上的矢量 $\frac{\Delta A}{\Delta t}$, 其极限位置, 自然也就在此切线上, 这就是说, 导矢

$$A'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t}$$

当其不为零时, 是在点 M 处的切线上, 且由上述可知, 其方向恒指向对应 t 值增大的一方. 故导矢在几何上为一矢端曲线的切向矢量, 指向对应 t 值增大的一方.

3. 矢性函数的微分

(1) 微分的概念与几何意义

设有矢性函数 $A = A(t)$, 我们把

$$dA = A'(t)dt, \quad (dt = \Delta t) \quad (2.4)$$

称为矢性函数 $A(t)$ 在 t 处的微分.

由于微分 dA 是导矢 $A'(t)$ 与增量 Δt 的乘积, 所以它是一个矢量, 而且和导矢 $A'(t)$ 一样, 也在点 M 处与 $A(t)$ 的矢端曲线 l 相切. 但其指向: 当 $dt > 0$ 时, 与 $A'(t)$ 的方向一致; 而当 $dt < 0$ 时, 则与 $A'(t)$ 的方向相反, 如图(1-8).

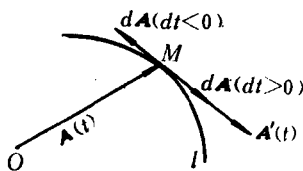


图 1-8

微分 dA 的坐标表示式, 可由 (2.3) 式求得, 即

$$\begin{aligned} dA &= A'(t)dt \\ &= A'_x(t)dti + A'_y(t)dtj + A'_z(t)dtk. \end{aligned}$$

或

$$dA = dA_x i + dA_y j + dA_z k \quad (2.5)$$

例 3. 设 $r(\theta) = a \cos \theta i + b \sin \theta j$, 求 dr 及 $|dr|$.

解: $dr = d(a \cos \theta) i + d(b \sin \theta) j$

$$\begin{aligned}
 &= -a \sin \theta d\theta i + b \cos \theta d\theta j \\
 &= (-a \sin \theta i + b \cos \theta j) d\theta. \\
 |dr| &= \sqrt{(-a \sin \theta d\theta)^2 + (b \cos \theta d\theta)^2} \\
 &= \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} |d\theta|.
 \end{aligned}$$

(2) $\frac{dr}{ds}$ 的几何意义

如果我们把矢性函数 $A(t) = A_x(t)i + A_y(t)j + A_z(t)k$ 看作其终点 $M(x, y, z)$ 的矢径函数

$$r = xi + yj + zk,$$

这里 $x = A_x(t), y = A_y(t), z = A_z(t)$, 则(2.5)式又可写为

$$dr = dx i + dy j + dz k, \quad (2.6)$$

其模

$$|dr| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \quad (2.7)$$

另一方面, 我们若在有向曲线 (即规定了正方向的曲线) l 上, 取定一点 M_0 作为计算弧长 s 的起点, 并以 l 之正向作为 s 增大的方向, 则在 l 上任一点 M 处, 弧长的微分是

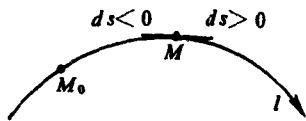


图 1-9

$$ds = \pm \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

按下述办法取右端符号; 以点 M 为界, 当 ds 位于 s 增大一方时取正号; 反之, 取负号, 如图(1-9).

由此可见, 有

$$|dr| = |ds|, \quad (2.8)$$

就是说, 矢性函数的微分的模, 等于(其矢端曲线的)弧微分的绝对值. 从而由

$$|dr| = \left| \frac{dr}{ds} ds \right| = \left| \frac{dr}{ds} \right| \cdot |ds|,$$

有

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| = 1. \quad (2.9)$$

再结合导矢的几何意义,便知:矢性函数对(其矢端曲线的)弧长 s 的导数 $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ 在几何上为一切向单位矢量,恒指向 s 增大的一方.

4. 矢性函数的导数公式

设矢性函数 $\mathbf{A}=\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}=\mathbf{B}(t)$ 及数性函数 $u=u(t)$ 在 t 的某个范围内可导,则下列公式在该范围内成立

$$(1) \frac{d}{dt}\mathbf{C}=\mathbf{0}, (\mathbf{C} \text{ 为常矢});$$

$$(2) \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \pm \frac{d\mathbf{B}}{dt};$$

$$(3) \frac{d}{dt}(k\mathbf{A}) = k \frac{d\mathbf{A}}{dt}, (k \text{ 为常数});$$

$$(4) \frac{d}{dt}(u\mathbf{A}) = \frac{du}{dt}\mathbf{A} + u \frac{d\mathbf{A}}{dt};$$

$$(5) \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B};$$

特例: $\frac{d}{dt}A^2 = 2\mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt}$, (其中 $A^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$);

$$(6) \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B};$$

(7) 复合函数求导公式:若 $\mathbf{A}=\mathbf{A}(u)$, $u=u(t)$, 则

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d\mathbf{A}}{du} \frac{du}{dt}.$$

这些公式的证明方法,与微积分学中数性函数的类似公式的证法完全相同. 比如公式(5)可以这样证明:

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= (\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{B} + \Delta\mathbf{B}) - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \\ &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \Delta\mathbf{B} + \Delta\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \Delta\mathbf{A} \cdot \Delta\mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \\ &= \mathbf{A} \cdot \Delta\mathbf{B} + \Delta\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \Delta\mathbf{A} \cdot \Delta\mathbf{B}; \end{aligned}$$

以 Δt 除两端,有

$$\frac{\Delta(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}{\Delta t} = \mathbf{A} \cdot \frac{\Delta\mathbf{B}}{\Delta t} + \frac{\Delta\mathbf{A}}{\Delta t} \cdot \mathbf{B} + \Delta\mathbf{A} \cdot \frac{\Delta\mathbf{B}}{\Delta t};$$

再令 $\Delta t \rightarrow 0$ 两端取极限, 就得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(A \cdot B) &= A \cdot \frac{dB}{dt} + \frac{dA}{dt} \cdot B + 0 \cdot \frac{dB}{dt} \\ &= A \cdot \frac{dB}{dt} + \frac{dA}{dt} \cdot B.\end{aligned}$$

例 4. 矢性函数 $A(t)$ 的模不变的充要条件是

$$A \cdot \frac{dA}{dt} = 0. \quad (2.10)$$

证: 假定 $|A| = \text{常数}$,

则有

$$A^2 = |A|^2 = \text{常数}.$$

两端对 t 求导[左端用导数公式(5)的特例], 就得到

$$A \cdot \frac{dA}{dt} = 0.$$

反之, 若有 $A \cdot \frac{dA}{dt} = 0$,

则有

$$\frac{d}{dt}A^2 = 0,$$

从而

$$A^2 = |A|^2 = \text{常数}.$$

所以有

$$|A| = \text{常数}.$$

这个例子, 可以简单地说明: 定长矢量 $A(t)$ 与其导矢互相垂直.

特别, 对于单位矢量 $A^\circ(t)$ 有

$$A^\circ \perp \frac{dA^\circ}{dt}, \quad (2.11)$$

比如例 2 中的圆函数, 就有 $e(\varphi) \perp e_1(\varphi)$ [因 $e_1(\varphi) = e'(\varphi)$].

例 5. 导矢的物理意义

设质点 M 在空间运动, 其矢径 r 与时间 t 的函数关系为