

高考总复习指导教程

数 学



北京出版社

湖北三所著名重点中学/主编
《高考总复习指导教程》

数 学

顾 问	汪立丰	徐新斌	徐鸿钧
主任委员	陈体国		
副主任委员	黄治民	周传明	严贵海
本书主编	卞清胜		
本书副主编	陈体国	杨 田	杨荆海
	黄忠东	陈平汉	徐方国

北京出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学/卞清胜等编著. - 北京:北京出版社, 1996. 12

高考总复习指导教程/夏春秋主编

ISBN7-200-03111-9

I. 数… II. … III. 数学课-高中-升学参考资料 IV. G633.203

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 20298 号

高考总复习指导教程 数学

GAOKAO ZONGFUXI ZHIDAO JIAOCHENG SHUXUE

卞清胜 陈体国等编著

*

北京出版社出版

(北京北三环中路 6 号)

邮政编码:100011

北京出版社总发行

新华书店经销

北京市振兴印刷厂印刷

*

787×1092 毫米 16 开本 17.5 印张 35 千字

1998 年 7 月第 1 版 1998 年 7 月第 2 次印刷

印数:1-5000

ISBN7-200-03111-9/G·978

定价:13.80 元

答案:4.80 元

说 明

高考总复习系列丛书《高考总复习指导教程》(语文、数学、英语、物理、化学、政治、历史)由湖北省三所著名重点中学——黄冈中学、孝感高中、荆州中学 1999 届毕业年级骨干教师集体编写,体现了这三所学校高考总复习的基本作法和成功经验,供高三学生使用及教师参考。

本书是以人民教育出版社最近修订的高中教材为蓝本,以国家教委颁布的最新《中学数学教学大纲》和国家教委考试中心颁布的最新《普通高等学校招生全国统一考试数学科说明》为纲,根据教育部日前发出的《关于调整现行普通高中数学、物理学科教学内容和教学要求的意见》提供的最新信息,在认真研究近十年高考数学试题的特点和变化趋势、认真总结多届高三数学复习教学的经验的基础上编写而成。全书注重突出中学教学的基础知识、基本技能和基本方法,力求做到:要求明确,重点突出,覆盖面宽,规律性强,题型新颖,难易适中,在培养学生分析问题和解决问题能力上下功夫,努力提高学生的整体素质,力求达到科学性、系统性、指导性和实用性的和谐统一。

本书共分 13 章,按知识点安排 123 课时。每章课时复习前安排“知识要点”,每课时含基础训练,典型例题、课堂小结、巩固练习四部分,全书例题、习题的解答部分单独成册。

参加本书编写的有:黄冈中学——王昕芳、霍祝华、陈体国(第一章),余祖良、陈红明(第五章),杨国民、刘辉(第七章),卞清胜(第八章);孝感高中——叶迎东(第二章),柯建北、杨田(第三章),张新平(第四章),黄鹏、邓建华(第十二章),张红兵、黎绍成(第十三章);荆州中学——张贵才(第九章),燕子宗(第十章),杨荆海(第十一章)。

由于我们水平有限,错误和不妥之处,敬请读者指正。

三校《丛书》编委会

1998 年 5 月

目 录

第一章 幂函数、指数函数和对数函数

知识要点	1
第1课 简单不等式的解法	4
第2课 集合的概念	5
第3课 集合的运算	7
第4课 映射与函数	9
第5课 函数的解析式	11
第6课 函数的定义域	12
第7课 函数的值域	14
第8课 函数的单调性	16
第9课 函数的奇偶性	17
第10课 函数的图象	19
第11课 二次函数	21
第12课 二次函数与二次方程、二次不等式	22
第13课 幂、指数、对数式	24
第14课 幂函数	26
第15课 指数函数与对数函数(一)	27
第16课 指数函数与对数函数(二)	29
第17课 指数方程与对数方程	30
第18课 函数的最值	32
第19课 函数知识的综合应用(一)	34
第20课 函数知识的综合应用(二)	35

第二章 三角函数

知识要点	38
第1课 三角函数的概念	39
第2课 三角函数的性质(一)	41
第3课 三角函数的性质(二)	42
第4课 三角函数的图象	44

第三章 两角和与差的三角函数、解斜三角形

知识要点	46
第1课 三角函数式的化简	46
第2课 三角函数式的求值(一)	48
第3课 三角函数式的求值(二)	49
第4课 三角恒等式的证明	51
第5课 条件三角等式的证明	52
第6课 解斜三角形	53
第7课 三角函数式的最值	55
第8课 三角综合问题	56
第9课 三角知识的应用	57

第四章 反三角函数

知识要点	59
------	----

第1课 反三角函数的概念、图象和性质	59
第2课 反三角函数的运算	60
第3课 反三角函数等式的求值与证明	62

第五章 不等式

知识要点	64
第1课 不等式的概念和性质	65
第2课 有理不等式和绝对值不等式的解法	66
第3课 无理不等式的解法	68
第4课 指数不等式与对数不等式的解法	69
第5课 含参数不等式的解法(一)	70
第6课 含参数不等式的解法(二)	71
第7课 重要不等式及其应用	73
第8课 不等式的证明(一)	74
第9课 不等式的证明(二)	76
第10课 不等式的综合应用(一)	78
第11课 不等式的综合应用(二)	79

第六章 数列、极限、数学归纳法

知识要点	81
第1课 等差、等比数列的基本运算	82
第2课 等差、等比数列的性质及其应用(一)	83
第3课 等差、等比数列的性质及其应用(二)	85
第4课 等差、等比数列的综合应用	86
第5课 数列的通项	88
第6课 数列的求和	89
第7课 数列的极限	91
第8课 数列极限的应用	92
第9课 数学归纳法	94
第10课 数学归纳法的应用	96
第11课 归纳、猜想、证明	97
第12课 数列综合题	99

第七章 复数

知识要点	101
第1课 复数的基本概念	101
第2课 复数的代数运算	103
第3课 复数的三角形式	104
第4课 复数的三角运算	106
第5课 复数的几何意义	107
第6课 共轭复数及其性质	109

第7课 复数的模及模的最值	110	第12课 圆锥曲线综合题	158
第8课 复数与方程	111	第十一章 参数方程、极坐标	
第9课 复数与几何	113	知识要点	161
第10课 复数的综合应用	114	第1课 曲线参数方程的概念	162
第八章 排列、组合、二项式定理		第2课 直线的参数方程及应用	164
知识要点	116	第3课 圆锥曲线的参数方程及应用	166
第1课 两个基本原理、排列组合数的计算	116	第4课 应用参数方程求曲线的轨迹方程	168
第2课 排列问题	118	第5课 极坐标系	169
第3课 组合问题	119	第6课 极坐标系中的曲线与方程(一)	171
第4课 排列、组合混合题	121	第7课 极坐标系中的曲线与方程(二)	173
第5课 二项式定理	122	第十二章 直线与平面	
第6课 二项式系数的性质	124	知识要点	175
第7课 二项式定理的应用	125	第1课 平面的基本性质	176
第九章 直线与圆		第2课 空间直线	177
知识要点	127	第3课 直线与平面	178
第1课 有向线段、定比分点	128	第4课 平面与平面	180
第2课 直线与直线系	129	第5课 平行关系	181
第3课 直线与直线的位置关系	131	第6课 垂直关系	183
第4课 充要条件、两条直线所成的角	132	第7课 平行与垂直	184
第5课 圆	133	第8课 空间角(一)	185
第6课 对称问题	135	第9课 空间角(二)	187
第7课 直线与圆的位置关系	136	第10课 距离	188
第8课 与直线和圆有关的轨迹问题	138	第11课 平面图形的折叠	190
第十章 圆锥曲线		第十三章 多面体与旋转体	
知识要点	140	知识要点	192
第1课 椭圆及标准方程	141	第1课 柱体	194
第2课 椭圆的几何性质	143	第2课 锥体	195
第3课 双曲线及标准方程	145	第3课 台体	197
第4课 双曲线的几何性质	146	第4课 侧面展开图(含截面问题)	198
第5课 抛物线及标准方程	148	第5课 球	200
第6课 抛物线的几何性质	149	第6课 组合体	201
第7课 坐标轴的平移	151	第7课 体积	203
第8课 直线与圆锥曲线的位置关系	152	第8课 最(定)值问题	204
第9课 对称问题	154	第9课 综合题	206
第10课 二次曲线系	155	答案与提示	207
第11课 轨迹问题	157		

知识要点

一. 集合的有关概念

1. **集合**: 一组对象的全体形成一个集合. 集合里各个对象叫做集合的元素.
2. **集合的元素**有三个特征: 确定性, 互异性和无序性.
3. **集合的表示法**: 列举法、描述法、图示法.
4. **数集的记号**: 数集常用下列字母表示, N (自然数集)、 Z (整数集)、 Q (有理数集)、 C (复数集)、 R^+ (正实数集)、 R^- (负实数集)、 $\overline{R^-}$ (非负实数集).
5. **空集**: 不含任何元素的集合叫做空集. 记作 $\emptyset$.
6. **子集**: A 是 B 的子集, 记作 $A \subseteq B$; A 是 B 的真子集, 记作 $A \subset B$. 子集的性质有: (1) $\emptyset \subseteq A, \emptyset \subset B$ (非空); (2) $A \subseteq A$; (3) 若 $A \subseteq B, B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$.
7. **两个集合相等**: 若 $A \subseteq B$ 且 $A \supseteq B$ 则 $A = B$.
8. **关系符号**: 元素与集合的关系是从属关系, 用符号 $\in$ 或 $\notin$ 表示; 集合与集合的关系是包含关系用符号 $\subset, \subseteq$ 或 $\supset, \supseteq$ 表示.

二. 集合的运算

1. **交集**: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$. 性质有: ① $A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B$; ② $A \cap \emptyset = \emptyset, A \cap A = A$; ③ $A \cap B = B \cap A$.
2. **并集**: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$. 性质有: ① $A \cup A = A$; ② $A \cup \emptyset = A$; ③ $A \cup B = B \cup A$; ④ $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B, A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$.
3. **全集和补集**: (1) 全集用字母 I 表示; (2) 补集 $\overline{A} = \{x \mid x \in I \text{ 且 } x \notin A\}$. 性质有: ① $\overline{\overline{A}} = A$; ② $\overline{\emptyset} = I, \overline{I} = \emptyset$; ③ $A \cup \overline{A} = I, A \cap \overline{A} = \emptyset$; ④ $A \cap I = A, A \cup I = I$.

三. 一元二次不等式

1. $|ax + b| < c, |ax + b| > c$ ($c > 0$) 型不等式的解集分别是不等式 $-c < ax + b < c$, 不等式 $ax + b > c$ 或 $ax + b < -c$ 的解集.

2. 一元二次不等式的解法 见表 1-1

四. 函数的性质

1. **单调性** (1) 对于给定区间上的函数 $f(x)$, 如果对于属于这个区间的任意两个自变量的值 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$), 那么就说 $f(x)$ 在这个区间上是增函数(或减函数).

(2) 如果函数 $f(x)$ 在某个区间上是增函数或减函数, 就说 $f(x)$ 在这个区间上具有(严格地)单调性, 这个区间叫做函数 $f(x)$ 的单调区间.

2. **奇偶性** (1) 奇函数: 如果对于函数 $f(x)$ 定义域内任意一个 x , 都有 $f(-x) = -f(x)$, 那么函数 $f(x)$ 就叫做奇函数. 奇函数的图象关于原点成中心对称图形.

(2) 偶函数: 如果对于函数 $f(x)$ 定义域内任意一个 x , 都有 $f(-x) = f(x)$, 那么函数 $f(x)$ 就叫做偶函数. 偶函数的图象关于 y 轴成轴对称图形.

五. 反函数

习惯用 $y = f^{-1}(x)$ 表示. $y = f^{-1}(x)$ 定义域和值域分别是 $y = f(x)$ 的值域, 定义域. $y = f^{-1}(x)$ 与 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称.

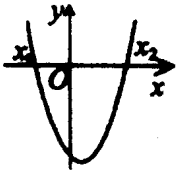
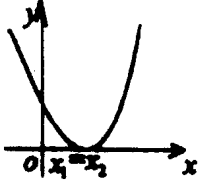
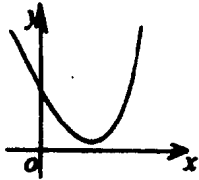
六. 几种代数函数

1. 正比例函数: $y = kx (k \neq 0)$. 2. 反比例函数: $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$.

3. 一次函数: $y = kx + b (k \neq 0)$. 4. 二次函数: $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$.

二次项系数是正数的二次函数, 一元二次方程, 一元二次不等式的主要结论与三者之间的关系见表 1-1

表 1-1

判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) 的图象			
一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根	有两相异实根 $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x_1 < x_2$	有两相等实根 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	没有实根
一元二次不等式的解集	$ax^2 + bx + c > 0$ ($a > 0$)	所有不等于 $-\frac{b}{2a}$ 的实数	全体实数
	$ax^2 + bx + c < 0$ ($a > 0$)	空集	空集

5. 幂函数: $y = x^a$ (a 是常数, a 可取实数).

(1) 根式: $\sqrt[n]{a}$ 叫做根式, n 叫做根指数.

(2) 分数指数幂:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} (a > 0, m, n \in \mathbb{N} \text{ 且 } n > 1), a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} (a > 0, m, n \in \mathbb{N} \text{ 且 } n > 1).$$

(3) 幂函数的性质:

当 $n > 0$ 时, 图象过 $(0, 0)$ 和 $(1, 1)$. 在第一象限内递增; 当 $n < 0$ 时, 图象过 $(1, 1)$, 在第一象限内递减.

6. 指数函数和对数函数

(1) 对数、常用对数、自然对数的概念.

(2) 对数的运算法则:

$$\textcircled{1} \log_a(M \cdot N) = \log_a M + \log_a N; \quad \textcircled{2} \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N;$$

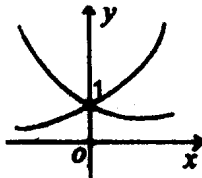
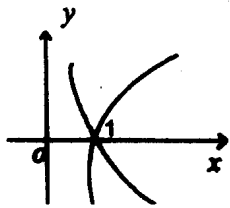
$$\textcircled{3} \log_a M^n = n \log_a M; \quad \textcircled{4} \log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M.$$

(3) 两个恒等式: $a^{\log_a N} = N; \log_a a^N = \frac{\log_b N}{\log_b a}.$

(4) 指数函数: $y = a^x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 见表 1-2

(5) 对数函数: $y = \log_a x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 见表 1-2

表 1-2

		指数函数	对数函数
函数式		$y = a^x \quad (0 < a \neq 1)$	$y = \log_a x \quad (0 < a \neq 1)$
定义域		R	R^+
图 象		$y = a^x \quad y = a^x$ $(0 < a < 1) \quad (a > 1)$ 	$y = \log_a x (a > 1)$ 
性 质	1	$y = a^x > 0$ (图象在 x 轴上方)	$x > 0$ (图象在 y 轴右方)
	2	$a^0 = 1$ (图象过定点 $(0, 1)$)	$\log_a 1 = 0$ (图象过点 $(1, 0)$)
	3	$a > 1$ 时, $a^x \begin{cases} > 1 (x > 0) \\ = 1 (x = 0) \\ < 1 (x < 0) \end{cases}$ $0 < a < 1$ 时, $a^x \begin{cases} < 1 (x > 0) \\ = 1 (x = 0) \\ > 1 (x < 0) \end{cases}$	$a > 1$ 时, $\log_a x \begin{cases} > 0 (x > 1) \\ = 0 (x = 1) \\ < 0 (x < 1) \end{cases}$ $0 < a < 1$ 时, $\log_a x \begin{cases} < 0 (x > 1) \\ = 0 (x = 1) \\ > 0 (x < 1) \end{cases}$
	4	$a > 1$ 时, $y = a^x$ 递增 $0 < a < 1$ 时, $y = a^x$ 递减	$a > 1$ 时, $y = \log_a x$ 递增 $0 < a < 1$ 时, $y = \log_a x$ 递减

七. 指数方程和对数方程

1. 指数方程: 在指数里含有未知数的方程. 主要类型与解法有:

- (1) $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ 型化成 $f(x) = g(x)$ 求解; (2) $a^{f(x)} = b^{g(x)}$ 型采用两边取对数法求解;
 (3) $f(a^x) = 0$ 型采用换元法解; (4) 图象法.

2. 对数方程: 在对数符号后面含有未知数的方程. 主要类型与解法有:

- (1) $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ 型化成 $f(x) = g(x)$ 求解; (2) $\log_a f(x) = b$ 型化成 $f(x) = a^b$ 求解; (3) $f(\log_a x) = b$ 型采用换元法解; (4) 图象法.

第 1 课 简单不等式的解法

[基础训练] 一. 选择题

1. 如果 $a > b > 0$, 那么下列各式中错误的是().

(A) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ (B) $a + c > b + c$ (C) $ad > bd$ (D) $a - c > b - c$

2. 不等式 $|x - 2| > 3$ 的解集是().

(A) $\{x \mid x < 5\}$ (B) $\{x \mid -1 < x < 5\}$ (C) $\{x \mid x < -1\}$ (D) $\{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > 5\}$

二. 填空题

1. 不等式 $\frac{3x-1}{2-x} \geq 1$ 的解集是 _____.

2. 不等式 $(a-2)x^2 + 2(a-2)x - 4 < 0$ 对一切 $x \in R$ 恒成立, 那么 a 的取值范围是 _____.

3. 方程 $x^2 - 2mx + 2m + 3 = 0$ 有二负实根, 那么 m 的取值范围是 _____.

[典型例题] 1. 解不等式组
$$\begin{cases} (x+4)(x+5)^2 > (3x-2)(x+5)^2, \\ \frac{x-5}{2(x^2+1)} \geq \frac{3x-1}{x^2+1}. \end{cases}$$

2. 解不等式: (1) $4 < |1 - 3x| \leq 7$; (2) $|x - 5| - |2x + 3| < 1$; (3) $\frac{4x}{x^2 + x + 2} \leq 1$.

3. (1) 解关于 x 的不等式 $2x^2 + (a+1)x - a(a-1) < 0$ 其中 $a > 0$; (2) 若(1)中不等式的解集包含区间 $(0, 1)$, 试求 a 的取值范围.

4. 若不等式 $8x^4 + 8(m-2)x^2 + 5 - m > 0$ 对任意实数 x 均成立, 求实数 m 的取值范围.

5. 由于最近对某商品实行收税, 使其销售价比原价上涨 $x\%$, 涨价后商品卖出量减少 $\frac{36x}{10000}$, 已知税率为销售金额的 20% .

- (1) 为使现销售金额扣除税款后的金额 y 不比原销售金额少, 求上涨率 $x\%$ 的范围;
 (2) x 为何值时, y 最大? (保留一位小数)

[课堂小结]1. 求解不等式的过程, 就是利用不等式的性质进行同解变形. 特别指出, 不等式两边同乘、同除以一个数时, 不仅要保证乘除数非零, 还要考虑乘除数的符号. 2. 不等式 $|ax + b| < c$ ($c > 0$) 同解于不等式组 $-c < ax + b < c$; 不等式 $|ax + b| > c$ ($c > 0$) 同解于不等式 $ax + b > c$ 或 $ax + b < -c$. 3. 分式不等式一般不能直接去分母, 通常方法是通过移项, 通分, 化分式不等式为整式不等式组的方法来求解. 如能确定分母的符号, 可直接去分母. 4. 解一元二次不等式的方法有图象法、因式分解法和配方法. 5. 解含参数的不等式, 需要对参数进行分类讨论, 其关键是明确何时分类和如何分类.

[巩固练习] 一. 选择题

1. 已知 $a < 0$, $-1 < b < 0$, 那么().

(A) $a > ab > ab^2$ (B) $ab^2 > ab > a$ (C) $ab > a > ab^2$ (D) $ab > ab^2 > a$

2. 不等式 $\frac{ax}{x-1} < 1$ 的解集为 $\{x \mid x < 1 \text{ 或 } x > 2\}$, 那么 a 的值为().

(A) 1 (B) 0 (C) 2 (D) $\frac{1}{2}$

3. 一个三角形的两边长为方程 $x^2 + px + 1 = 0$ 的两根, 第三边长为 2, 则 p 的取值范围是().

(A) $(-\infty, 2)$ (B) $(2\sqrt{2}, +\infty)$ (C) $(-2\sqrt{2}, -2)$ (D) $(2, 2\sqrt{2})$

二. 填空题

1. 不等式 $|x^2 - 2x - 3| > x^2 - 2x - 3$ 的解集是_____.

2. 方程 $x^2 + mx + m - 1 = 0$ 有一正根一个负根, 且负根的绝对值大, 则实数 m 的取值范围是_____.

三. 解答题

1. 已知 $Ax^2 + Bx + C > 0$ 的解集为 (α, β) , $\alpha > 0$, 求不等式 $Cx^2 + Bx + A < 0$ 的解集.

2. 已知方程 $x^2 + 4ax - 4a + 3 = 0$, $x^2 + (a-1)x + a^2 = 0$, $x^2 + 2ax - 2a = 0$ 中至少有一个有实根, 求实数 a 的取值范围.

3. 关于 x 的不等式 $(a-2)x^2 - ax - 1 \geq 0$, 它的解集是实数的一个闭区间, 且区间长度在 $[1, 3]$ 内, 求实数 a 的取值范围.

4. 甲工厂去年上交利税 40 万元, 今后 5 年内计划每年平均增长 10%, 乙工厂去年上缴利税比甲工厂少, 今后 5 年内计划每年平均增长 20%, 这样从今年起, 第二年乙工厂上缴利税就能超过甲工厂, 但是要到第三年末, 才能使从今年开始的三年内上缴的总利税不少于甲工厂, 求乙工厂去年大约上缴利税多少万元?(只取到整数万元)

第 2 课 集合的概念

[基础训练] 一. 选择题

1. 由实数 x , $-x$, x , $\sqrt{x^2}$, $-\sqrt[3]{x^3}$ 所组成的集合, 最多含有().

(A) 2 个元素 (B) 3 个元素 (C) 4 个元素 (D) 5 个元素

2. 设集合 $M = \{m \mid m \leq \sqrt{10}\}$, 又 $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, 那么().

(A) $a \subset M$ (B) $a \notin M$ (C) $\{a\} \in M$ (D) $\{a\} \subset M$

二. 填空题

1. 选用适当符号($\in$, $\notin$, $\subset$, $\subseteq$, $=$) 填空: 0 _____ $\{0, 1\}$, $\emptyset$ _____ $\{0\}$, $\{0\}$ _____ $\{0, 1\}$, $\{2\}$ _____ Q , $\{0\}$ _____ $\{0\}$.

2. 设 $A = \{0, 1\}$, 且 $B = \{x \mid \emptyset \subset x \subseteq A\}$, 集合 $B =$ _____.

3. 若 $M = \{y \mid y = x^2 + 1, x \in N\}$, $B = \{x \mid x = y^2 - 4y + 5, y \in N\}$, 则 M 与 B 的关系为 _____.

[典型例题] 1. 已知集合 $A = \{x \mid x = \cos \frac{(n+1)\pi}{4}, n \in N\}$, $B = \{y \mid y = \sin \frac{(n-1)\pi}{4}, n \in N\}$, 试用列举法表示集合 A, B , 并判断 A, B 的关系.

2. 已知 $A = \{x, xy, \lg(xy)\}$, $B = \{0, |x|, y\}$, 且 $A = B$, 求实数 x, y 的值.

3. 设 a, b 是整数, 集合 $E = \{(x, y) \mid (x-a)^2 + 3b \leq 6y\}$ 包含点 $(2, 1)$, 但不包含点 $(1, 0)$ 与 $(3, 2)$, 求 a, b 的值.

4. 设集合 $M = \{x \mid x^2 - 7x + 10 \leq 0\}$, $N = \{x \mid x^2 - (2-m)x + 5-m \leq 0\}$, 且 $N \subseteq M$, 求实数 m 的取值范围.

5. 设 $A = \{x \mid -2 \leq x \leq a\}$, $B = \{y \mid y = 2x + 3, x \in A\}$, $C = \{z \mid z = x^2, x \in A\}$, 且 $C \subseteq B$, 求实数 a 的取值范围.

[课堂小结] 1. 准确理解集合的意义, 掌握集合的表示法: 列举法、描述法及韦恩图法. 无限集一般用描述法; 有限集用列举法. 元素的三个特性: 确定性, 互异性和无序性. 其中互异性常常容易疏忽. 2. 分清元素对于集合的属于($\in$)关系和集合之间的包含($\subset, \subseteq$)关系. 集合的子集与真子集及集合相等的概念. 3. 空集 $\emptyset$ 是一个特殊的集合, 不含元素. 它是任何一个集合的子集, 是任何一个非空集合的真子集. 注意区分 $\emptyset$ 与 $\{0\}$ 是不等的集合. 4. 有 n 个元素的集合的真子集的个数是 $2^n - 1$, 子集的个数是 2^n . 在利用子集概念求字母系数范围时, 不要忽视空集.

[巩固练习] 一. 选择题

1. 下列四个集合中, 表示空集的是().

(A) $\{0\}$

(B) $\{(x, y) \mid y^2 = -x^2, x \in R, y \in R\}$

(C) $\{x \mid 2x^2 + 3x - 2 = 0, x \in N\}$

(D) $\{x \mid \sin x + \cos x = \sqrt{2}, x \in R\}$

2. 集合 $M = \left\{x \mid x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in Z\right\}$, $N = \left\{x \mid x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{2}, k \in Z\right\}$, 则().

(A) $M = N$

(B) $M \supset N$

(C) $M \subset N$

(D) 以上都不对

3. 已知集合 $M = \left\{ a \mid \frac{6}{5-a} \in N, \text{ 且 } a \in Z \right\}$, 则 M 为().

- (A) $\{1, 2, 3, 4\}$ (B) $\{2, 3\}$ (C) $\{1, 2, 3, 6\}$ (D) $\{-1, 2, 3, 4\}$

二. 填空题

1. 设 $A = \{x \mid \sqrt{x-1} \leq 3-x\}$, 且 $B = \{x \mid (x-1)(x-a) \leq 0\}$, 且 $A = B$, 实数 a 的值为_____.

2. 如果 $x = \frac{1}{3-5\sqrt{2}}$, $y = 3 + \sqrt{2}\pi$, 集合 $M = \{m \mid m = a + b\sqrt{2}, a \in Q, b \in Q\}$, 那么 x , y 与集合 M 的关系为 x _____ M , y _____ M .

三. 解答题

1. 若 $A = \{x \mid x = a^2 + 2a + 4, a \in R\}$, $B = \{y \mid y = b^2 - 4b + 3, b \in R\}$, 试确定集合 A , B 的关系.

2. 已知集合 $A = \{x \mid x^2 + ax + 1 \leq 0\}$, $B = \{x \mid x^2 - 3x + 2 \leq 0\}$, 且 $A \subset B$, 求实数 a 的取值范围.

3. 已知集合 $M = \{a, a+d, a+2d\}$, $N = \{a, aq, aq^2\}$, 其中 $a \neq 0$, 且 $M = N$, 求 q 的值.

4. 已知函数 $f(x) = x^2 + ax + b$, $a, b \in R$, $A = \{x \mid x = f(x), x \in R\}$, $B = \{x \mid x = f[f(x)], x \in R\}$.

(1) 证明: $A \subseteq B$; (2) 当 $A = \{-1, 3\}$ 时, 用列举法写出 B 及 B 的子集组成的集合.

第3课 集合的运算

[基础训练] 一. 选择题

1. 设集合 $M = \{x \mid 0 \leq x < 2\}$, $N = \{x \mid x^2 - 2x - 3 < 0\}$, $M \cap N = ()$.

- (A) $\{x \mid 0 \leq x < 1\}$ (B) $\{x \mid 0 \leq x < 2\}$
(C) $\{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$ (D) $\{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$

2. 已知全集 $I = N$, 集合 $A = \{x \mid x = 2n, n \in N\}$, $B = \{x \mid x = 4n, n \in N\}$, 则().

- (A) $I = A \cup B$ (B) $\bar{I} = \bar{A} \cup B$ (C) $I = A \cup \bar{B}$ (D) $I = \bar{A} \cup \bar{B}$

二. 填空题

1. 若集合 $A = \{1, 3, 3-2x\}$, $B = \{x^2, 1\}$ 且 $A \cup B = \{1, 3, 3-2x\}$, 则 $x =$ _____.

2. 方程 $x^2 - (p-1)x + q = 0$ 的解集为 A , 方程 $x^2 + (q-1)x + p = 0$ 的解集为 B , 若 $A \cap B = \{-2\}$, 则 $A \cup B =$ _____.

3. 设 $I = \{x \mid x \text{ 为小于 } 20 \text{ 的正偶数}\}$, $A \cap \bar{B} = \{12, 14\}$, $\bar{A} \cup \bar{B} = \emptyset$, $\bar{A} \cap B = \{2, 4, 16, 18\}$, 则 $A =$ _____.

[典型例题] 1. A 包含于方程 $x^2 - px + 15 = 0$ 的解集, B 包含于方程 $x^2 - 5x + q = 0$ 的解集, 又 $A \cup B = \{2, 3, 5\}$, $A \cap B = \{3\}$, 求 p, q 的值及集合 A, B .

2. 已知集合 $A = \{x \mid x^2 - ax + a^2 - 19 = 0\}$, $B = \{x \mid \log_2(x^2 - 5x + 8) = 1\}$, $C = \{x \mid x^2 + 2x - 8 = 0\}$, 若 $A \cap B \supset \emptyset$ 与 $A \cap C = \emptyset$ 同时成立, 求实数 a 的值.

3. 已知集合 $A = \left\{x \mid \frac{6}{x+1} \geq 1, x \in \mathbb{R}\right\}$, $B = \{x \mid x^2 - 2x + 2m < 0, x \in \mathbb{R}\}$.

(1) 若 $A \cap B = \{x \mid -1 < x < 4\}$, 求 m ; (2) 若 $A \cup B = A$, 求实数 m 的取值范围.

4. 设 $A = \{(x, y) \mid y^2 - x - 1 = 0\}$, $B = \{(x, y) \mid 4x^2 + 2x - 2y + 5 = 0\}$, $C = \{(x, y) \mid y = kx + b\}$, 是否存在 $k, b \in \mathbb{N}$, 使得 $(A \cup B) \cap C = \emptyset$, 并证明你的结论.

[课堂小结] 1. 要正确理解和掌握集合的交、并、补的意义, 熟练地进行集合的交、并、补的运算, 运算时, 应首先化简给定的集合. 2. 注意等价条件的不同形式, 如 $A \subseteq B$ 与 $A \cap B = A$, $A \cup B = B$, 是等价的, 又如 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. 3. 数集之间的运算常借助于数轴进行, 一般集合可以借助于韦恩图来表示. 4. 在用区间来表示集合时, 要注意区间的“开”或“闭”.

[巩固练习] 一. 选择题

1. 已知集合 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 3\}$, 则 B 的子集最多可能有().

(A) 2 个 (B) 4 个 (C) 8 个 (D) 16 个

2. 已知非空集合 M 和 N , 规定 $M - N = \{x \mid x \in M, \text{但 } x \notin N\}$, 那么 $M - (M - N)$ 等于().

(A) $M \cup N$ (B) $M \cap N$ (C) M (D) N

3. 集合 $M = \{1, 3, t\}$, $N = \{t^2 - t + 1\}$, 若 $M \cup N = M$, 则 t 组成的集合是().

(A) $\{1\}$ (B) $\{-1, 1, 2\}$ (C) $\{-1, 0, 2\}$ (D) $\emptyset$

二. 填空题

1. 设 $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{x \mid x^3 - 4x^2 + 3x = 0\}$, $M = \{C \mid C \subseteq A\}$, $N = \{D \mid D \subseteq B\}$, 则 $M \cap N = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 已知集合 $M = \left\{x \mid \frac{x+1}{2} \in \mathbb{N}\right\}$, $P = \{x \mid x = 3k, k \in \mathbb{N}\}$, $I = \mathbb{N}$, 则 $\overline{M} \cap P = \underline{\hspace{2cm}}$.

三. 解答题

1. 集合 $A = \{x \mid x^2 - (m+1)x + 1 = 0, x \in \mathbb{R}\}$, 已知 $A \cap \mathbb{R}^- = \emptyset$, 求实数 m 的取值范围.

2. 已知集合 $A = \left\{(x, y) \mid \frac{y-3}{x-2} = a+1\right\}$, 集合 $B = \{(x, y) \mid (a^2 - 1)x + (a - 1)y = 15\}$, 若 $A \cap B = \emptyset$, 求实数 a 的值.

3. 设 a, b 是两个实数, 平面 xOy 的点集: $A = \{(x, y) \mid y = ax + b, x \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{(x, y) \mid y = 3x^2 + 15, x \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 144\}$, 讨论是否存在 a, b , 使得: (1) $A \cap B \neq \emptyset$; (2) $(a, b) \in C$ 同时成立.

4. 已知 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} \subset \mathbb{N}$, $B = \{a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2, a_5^2\}$, 其中 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$,

若 $A \cap B = \{a_1, a_4\}$, $a_1 + a_4 = 10$, 且 $A \cup B$ 中的所有元素之和为 224, 求: (1) a_1 与 a_4 的值; (2) $a_2 + a_3 + a_5 + a_2^2 + a_3^2 + a_5^2$ 的值; (3) a_5 的值; (4) 集合 A .

第 4 课 映射与函数

[基础训练] 一. 选择题

1. 给定映射 $f: (x, y) \rightarrow (2x + y, xy) (x, y \in R)$ 的条件下, 点 $(\frac{1}{6}, -\frac{1}{6})$ 的原象是().

(A) $(\frac{1}{6}, -\frac{1}{36})$ (B) $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2})$ 或 $(-\frac{1}{4}, \frac{2}{3})$

(C) $(\frac{1}{36}, -\frac{1}{6})$ (D) $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$ 或 $(-\frac{2}{3}, \frac{1}{4})$

2. 下列各组函数中, 属同一函数的一组是().

(A) $f(x) = x - 3$ 与 $g(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$ (B) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ 与 $g(x) = x + 2$

(C) $f(x) = |x - 1|$ 与 $g(t) = \begin{cases} t - 1 & (t \geq 1) \\ 1 - t & (t < 1) \end{cases}$ (D) $f(x) = \pi x^2$ 与圆面积 S 是半径

r 的函数

二. 填空题

1. 函数 $f(x) = \frac{ax + b}{x + c}$ 的反函数 $f^{-1}(x) = \frac{4x - 3}{2 - x}$, 则 $abc =$ _____.

2. 已知 $f(x) = \begin{cases} x - 3 & (x \geq 9) \\ f[f(x + 4)] & (x < 9) \end{cases}$, 则 $f(7)$ 的值等于_____.

3. 已知 $g(x) = 1 - x^2$, 且当 $x \neq 0$ 时, $f[g(x)] = \frac{1 - x^2}{x^2}$, 则 $f(\frac{1}{2})$ 的值为_____.

[典型例题] 1. 判断下列各组函数是否表示同一个函数:

(1) $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 与 $y = x + 1$; (2) $y = \lg x$ 与 $y = \frac{1}{2} \lg x^2$;

(3) $y = \sqrt{x^2 - 1}$ 与 $y = x - 1$; (4) $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \in (-1, 0) \\ x - 1, & x \in (0, 1) \end{cases}$ 和 $y = f^{-1}(x)$.

2. 下列对应是否为 A 到 B 的映射?

(1) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{-10, -4, 0, 2\}$, $f: x \rightarrow x(3 - x)$;

(2) $A = \{x \mid 0 < x < \pi\}$, $B = R^+$, $f: x \rightarrow \frac{1}{\sin x}$;

(3) $A = \{x \mid x \in R\}$, $B = \{y \mid y \text{ 是纯虚数}\}$, $f: x \rightarrow y = xi$;

(4) $A = \{\text{平面 } \alpha \text{ 内边长不同的正方形}\}$, $B = \{\text{平面 } \alpha \text{ 内的圆}\}$, $f: \text{作正方形的外接圆}$.

3. 求下列函数的反函数:

(1) $y = \frac{1}{1 - x^2} (-1 < x < 0)$; (2) $y = 1 - \sqrt{1 - x^2} (-1 \leq x < 0)$; (3) $y = x |x| + 2x$.

4. 已知 $f(x) = \frac{x}{ax+b}$ (a, b 为常数且 $a \neq 0$), 满足 $f(2) = 1$, 且方程 $f(x) = x$ 有唯一解;
 $g(x) = \frac{cx}{2x+3}$ 对任意 $x \in R$, 且 $x \neq -\frac{3}{2}$, 有 $g[g(x)] = x$ 成立, 求 $f[g(3)]$ 的值.

5. 求证: 函数 $y = \frac{x-1}{ax-1}$ ($a \in R$, 且 $a \neq 0, a \neq 1, x \in R$ 且 $x \neq \frac{1}{a}$) 的图象关于直线 $y = x$ 对称.

[课堂小结] 1. 定义域和对应法则是确定一个函数最基本的要素, 判断两个函数是否相同, 一要看它们的定义域是否相同, 二要看它们的对应法则是否相同. 2. 集合 A 到 B 的对应是否为一个映射, 只考虑 A 中每一个元素在 B 中是否有唯一元素与之对应. 3. 函数与其反函数的关系, 主要是定义域和值域的互换性, 以及图象关于直线 $y = x$ 的对称性. 求分段函数的反函数, 应在每一段上分别求其反函数. 求 $y = f(x)$ 的反函数的一般步骤是: (1) 确定原函数的值域, 它是其反函数的定义域; (2) 由 $y = f(x)$ 解出 $x = f^{-1}(y)$; (3) 对换 x, y 得反函数的习惯表达式 $y = f^{-1}(x)$.

[巩固练习] 一. 选择题

1. 已知集合 $P = \{x | 0 \leq x \leq 4\}$, $Q = \{y | 0 \leq y \leq 2\}$, 下列从 P 到 Q 的各对应关系 f 不是映射的是 ().

(A) $f: x \rightarrow y = \frac{1}{2}x$ (B) $f: x \rightarrow y = \frac{1}{3}x$ (C) $f: x \rightarrow y = \frac{2}{3}x$ (D) $f: x \rightarrow y = \frac{1}{8}x^2$

2. 点 (a, b) 在函数 $y = f(x)$ 图象上, 则下列各点中必在其反函数图象上的点是 ().

(A) $P_1(a, f^{-1}(a))$ (B) $P_2(f^{-1}(b), b)$ (C) $P_3(f^{-1}(a), a)$ (D) $P_4(b, f^{-1}(b))$

3. 已知函数 $f(x) = a^x + k$ 的图象经过点 $(1, 7)$, 其反函数图象经过点 $(9, 2)$, 则 $f(x)$ 的表达式是 ().

(A) $f(x) = 4^x + 3$ (B) $f(x) = 2^x + 5$ (C) $f(x) = 5^x + 2$ (D) $f(x) = 3^x + 4$

二. 填空题

1. 已知 $f(x) = \begin{cases} x+1 & (x > 0) \\ x & (x = 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$, 则 $f\{f[f(-1)]\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 设点 $M(1, 2)$ 既在函数 $f(x) = ax^2 + b$ ($x \geq 0$) 的图象上, 又在它的反函数的图象上, 则 $f^{-1}(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

三. 解答题

1. 求下列函数的反函数:

(1) $f(x) = 1 - \sqrt{25 - x^2}$ ($0 < x \leq 5$); (2) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & (x < 0), \\ \frac{1}{2}x + 3 & (x \geq 0). \end{cases}$

2. 若 $f: y = 3x + 1$ 是从集合 $A = \{1, 2, 3, k\}$ 到集合 $B = \{4, 7, a^4, a^2 + 3a\}$ 的一个映射, 求自然数 a, k 的值及集合 $A \cdot B$.

3. 设集合 $M = \{1, 2, 3, 4\}, N = \{a, b, c\}$, 从集合 M 到集合 N 的映射 f , 使 N 中的每一个元素都有原象, 这样的映射 f 有多少个?

4. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x}(ax + b)$, 当 a, b 为何值时, $f(x) = f^{-1}(x)$.

第5课 函数的解析式

[基础训练] 一. 选择题

1. 设 $f(3x) = \frac{\sqrt{9x+5}}{2}$, 则 $f(1)$ 的值是().

(A) $\sqrt{7}$ (B) 4 (C) 2 (D) $\sqrt{2}$

2. 设函数 $f(x) = \frac{1}{1-x}$, 则 $f\{f[f(x)]\}$ 的函数解析式为().

(A) $\frac{1}{1-x}$ (B) $\frac{1}{(1-x)^3}$ (C) $-x$ (D) x

二. 填空题

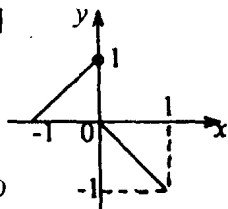
1. 设函数 $y = f(x)$ 的图象关于 $x = 1$ 对称, 若当 $x \leq 1$ 时, $f(x) = x^2 + 1$, 则当 $x > 1$ 时, $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 R^+ , 有 $f(xy) = f(x) + f(y)$, 若 $f(8) = 3$, 则 $f(\sqrt{2})$ 等于 $\underline{\hspace{2cm}}$.

3. 邮寄国内挂号信件, 每 20 克应付邮费 0.5 元, 不足 20 克(包括不足 20 克的零数)以 20 克重量计算, 另加挂号费 0.5 元, 那么, 每封挂号信(不超过 60 克)的邮资总额 y (元)与挂号信重(克)的函数关系式是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

[典型例题] 1. (1) $f(x)$ 是定义在 R 上的函数, $f(2x-3) = x^2 + x + 1$, 求 $f(x)$ 的表达式; (2) 已知 $f(x)$ 是一次函数, 且 $f[f(x)] = 4x - 1$, 求 $f(x)$ 的表达式; (3) 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x) + 2f(\frac{1}{x}) = 3x$, 求 $f(x)$ 的表达式.

2. 已知 $y = f^{-1}(x)$ 的图象如图. 写出 $f(x)$ 的解析式, 并画出 $f(x)$ 的图象.



3. 半径为 R 的圆内接等腰梯形 $ABCD$, 它的下底 AB 是圆的直径, 上底 CD 的端点在圆周上, 设梯形腰长为 x , 面积为 y , 求 y 的 x 函数关系式及定义域.

4. 已知正方形 $ABCD$ 边长为 10, 一动点 P 从点 A 出发沿正方形的边运动, 路线是 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$, 设点 P 经过的路程为 x , 设 $AP^2 = y$, 试写出 y 关于 x 的函数, 并画出函数的图象.