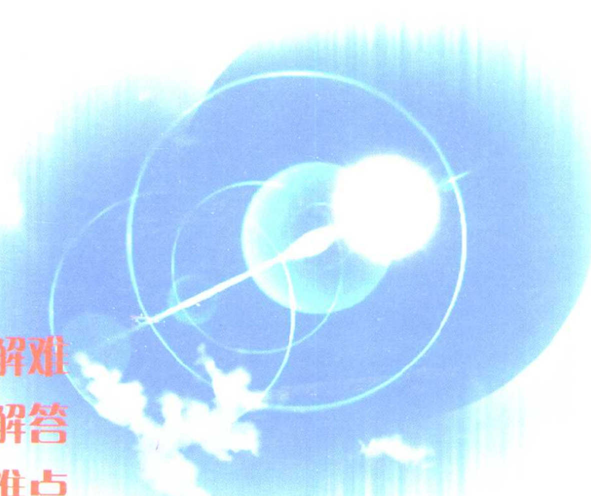
GONGCHENG SHUXUE XUEXI ZHIDAO YU XITI JIEXI

工程数学学习指导与习题解析

（上册）

线性代数·复变函数

黄光谷 邓泽清
谢春娣 李 刚 编



◇学习引导 释疑解难

◇精选例题 归类解答

◇抓住重点 攻破难点

◇顺利过关 决胜考研

华中科技大学出版社

工程数学学习指导与习题解析

（上册）

线性代数·复变函数

黄光谷　邓泽清
谢春娣　李　刚　编

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

工程数学学习指导与习题解析(上册)/黄光谷等编
武汉:华中科技大学出版社,2003年10月
ISBN 7-5609-3003-4

Ⅰ.工…
Ⅱ.①黄… ②邓… ③谢… ④李…
Ⅲ.工程数学-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.TB11

工程数学学习指导与习题解析(上册)

黄光谷 邓泽清 谢春娣 李 刚 编

责任编辑:钟小珉 李立鹏　　封面设计:潘 群
责任校对:吴 晗　　责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87545012

录 排:武汉市彩艺广告工作室
印 刷:华中科技大学印刷厂

开本:850×1168 1/32　印张:15.25　字数:367 000
版次:2003年10月第1版　印次:2003年10月第1次印刷　定价:18.00元
ISBN 7-5609-3003-4/TB·58

内容介绍

本书(上册)是高等学校(主动式教学法教学改革)数学系列教材《线性代数》、《复变函数》的辅导教材,是《高等数学学习指导与习题解析》一书(已连续印刷5次)的姊妹篇. 内容上以教育部颁布的本科《教学基本要求》为依据,各章按讲编写,便于教学与自学. 各讲包括内容提要、答疑辅导、典型例题、教与学建议等栏目,各单元安排了习作课,篇末安排了结业总复习(含模拟试题及参考答案与提示等). 书末还附录了历年全国考研数学一和二的线性代数试题分类精解.

本书保持了《高等数学学习指导与习题解析》一书(上、下册)的结构、风格与特长,可独立成书;又与适用面广的同济大学数学教研室编《线性代数》(第三版)及西安交通大学高等数学教研室编的《复变函数》(第四版)(均由高等教育出版社出版)教材密切同步,并选解了两本教材中较难的习题;在本书例题、习题部分,精选了历年全国考研部分试题并作了解析(或给了答案,其中"(1999,一)"是指1999年全国考研数学一的试题,其余类似),以便读者明确教学、考试要求,使学习有参照系.

本书可供各工科、理科、农林、财经本科或专科各专业"线性代数"、"复变函数"课程作为教、学参考书,还适宜作为自学辅助课本和教师上新课、习作课及复习课的讲义,以及备考和"考研"的复习资料. 本书内容具有通用性,对于使用各种版本《线性代数》、《复变函数》教材的读者都适用.

本书也是湖北省教委审定的A类《湖北省普通高等学校1997年省级教学研究项目》的一部分.

前　言

国家要实现现代化，要参与21世纪的世界性竞争，关键是人才的培养；而人才培养的关键是教育.数学教育是教育事业的重要组成部分，改革数学教育的关键之一是教材的改革.有什么样的教材，就决定了教师采用什么样的教学方式和方法.传统数学教材有逻辑严谨、系统性强等许多优点，对培养人才起了很大的作用.但由于历史的局限性，仍有改进与完善之必要.

本套(新编)高等学校数学系列教材，共三类六门12种，是覆盖高等数学、工程数学等主要基础课程的教材，注意了吸收各门传统教材的优点，又力求转变教育思想，体现教改精神，以适应21世纪科技与信息迅猛发展的新形势，对培养具有知识面广的较高数学修养(或素养、素质)的人才，具有现实意义.

本套教材在内容上以国家教委新颁布的《高等学校工科数学课程教学基本要求》为依据，提倡主动式教学法，力求处理好传授数学知识与培养各种能力和提高素质的关系，把培养学生获取知识、解决问题的能力与开拓、创新的精神作为教材的重要任务之一，变被动式的灌输知识(注入式)为主动的参与、钻研与力行(即主动式、启发式教学法)，实行教与自学双向互动式教学.

本套教材总的构思是：按讲编写，循环配合；培养能力，便于自学；提高素质，减少课时，便于备课和电化教学.其中三类书之间既互相配合呼应，又各自分工不同，各显特色；主教材减少课时、内容少而精、便于教与自学；主教材所配习题及习题解答书则用来巩固教材内容，更多地提供方法、加大信息量；教学指导书则用来加深理解、开拓视野、扩大知识面，并介绍有关新概念、新方法和新知识.

使用本套教材时，应以主教材为蓝本，主教材的每一讲，原则上是两学时的教学内容，使用时可更换和补充证法和例题；有些讲

编入的内容较多，可从中挑选、讲授主要内容；其余内容或简单例题可留给学生自学．教学的艺术不在面面俱到，平铺直叙；而在突出重点，解决疑难，抓住关键，留给学生思考和探索的空间．有些讲的内容比较简单，可以合并两讲为一讲以节约教学时数，加强习作课或另补本专业建模、实验等教学内容．教材中所配习题，可点半数左右作为课后作业，其余由学生选做．

教学指导书中所列习作课，应纳入教学日历，作为教学内容的一个重要组成部分．习作课也是一种数学实验课，应引起重视，以便培养学生解题、思考、应用等各种能力．上习作课时应注意引导，启发思维，做到讲练结合．至于教学指导书中所列复习课，各专业可视教学时数是否充裕，或者纳入教学计划，或者由学生自学．教学指导书中的其余内容，均可留给学生自学．

习题解答书与教学指导书是学生自学的两大辅助工具，应让学生学习“摸着石头过河”，应教育学生先自做习题，自己思考；遇有困难，再看解答，并读懂弄通．不要怕学生照抄解答，由于这几门数学课程的考试一般是闭卷考试，在考场上是抄袭不到的，不要“因噎废食”——不准学生看习题解答书．习题解答书全由学生自学．在出版时对学习指导书与习题解答书进行了合并处理，即成本书．

新编的这套教材是改革现行高校数学教材的一种尝试．由于我们水平有限、资料有限、见识有限，加上时间仓促，书中可能存在一些错误、缺点或不妥之处，恳请各位同行和读者多提宝贵意见，以便再版时修改．

另外，书中提到的教材[1]、教材[2]和教材[3]即分别为参考文献[1]、[2]和[3]。

编写这套书，得到武汉科技学院和华中科技大学出版社等单位的大力支持和关心，在此我们表示衷心的感谢！

编　者

2003年5月于武汉

目　录

第一篇　线性代数

第一章　行列式

第一讲　行列式的定义与性质

一　内容提要

1. 二、三阶行列式(对角线法则)

2. 排列及其逆序数、对换及其性质

3. n 阶行列式的定义

n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，t 为这个排列的逆序数，$\sum$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列求和.

n 阶行列式也可定义为 $D=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$，其中 t 为行标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数.

4. 行列式的性质

(1) 行列式与它的转置行列式相等，即 $D = D^{T}$.

(2) 互换行列式的两行(列)，行列式变号.

(3) 如果行列式有两行(列)完全相同，则此行列式等于零.

(4) 行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式.

(5) 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

(6) 行列式中如果有两行(列)元素成比例，则此行列式等于零.

(7) 若行列式的某一列(行)的元素都是两数之和，例如：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i} + a_{1i}') & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i} + a_{2i}') & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni} + a_{ni}') & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 D 可以分解为下列两个行列式之和：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i}' & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i}' & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni}' & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(8) 把行列式的某一列(行)的各元素乘以同一数，然后加到另一列(行)对应的元素上去，行列式不变.

二　答疑辅导

1. 如何计算 n 元排列的逆序数？

答　分别计算出排列中每个元素前面比它大的元素的个数，

即这个元素的逆序数，全体元素的逆序数之总和就是这个排列的逆序数.

2. 为什么通常不用定义计算行列式?

答　n 阶行列式等于所有($n!$个)取自不同行、不同列的 n 个元素乘积的代数和，当 n 较大时，其计算量很大. 如 $n=10$ 时，我们要计算 $10!=3628800$ 项，而每一项都是10个元素的乘积，因此通常不用定义计算行列式. 但对于某些特殊的行列式，如三角形行列式，则不难用定义推出它们的计算公式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \cdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

3. 行列式的性质在行列式的计算中有何作用?

答　利用行列式的性质，特别是性质(2)、(5)、(8)，可以将行列式化为简单的或者可以用公式计算的行列式(如三角形行列式)，从而简化行列式的计算:这是计算行列式的最基本的方法.

4. 行列式的两行(列)相同或两行(列)元素成比例是此行列式等于零的什么条件?

答　充分非必要条件. 如

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}=0,$$

而 D 中任意两行(列)既不相同，也不成比例.

5. 下列等式是否正确?

$$\begin{vmatrix} a_1+c_1 & b_1+d_1 \\ a_2+c_2 & b_2+d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

答　不正确. 由性质(7)，有

$$\begin{vmatrix} a_1+c_1 & b_1+d_1 \\ a_2+c_2 & b_2+d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1+d_1 \\ a_2 & b_2+d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & b_1+d_1 \\ c_2 & b_2+d_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

三　典型例题

例 1　计算排列 $n,(n-1),\cdots,3,2,1$ 的逆序数，并讨论它的奇偶性.

解　$n,n-1,\cdots,3,2,1$ 的逆序数分别为 $0,1,\cdots,n-3,n-2,n-1$，此排列的逆序数

$$t = 0+1+\cdots+(n-3)+(n-2)+(n-1)$$
$$= \frac{n(n-1)}{2},$$

当 $n=4k,4k+1$ 时，此排列为偶排列；

当 $n=4k+2,4k+3$ 时，此排列为奇排列.

例 2　用定义计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解　由行列式定义知

$$D = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} a_{4p_4} a_{5p_5},$$

其中 p_1,p_2,p_3,p_4,p_5 是 $1,2,3,4,5$ 的任一排列，因此 p_3,p_4,p_5 中至少有一个必取 $3,4,5$ 中的一个，即 $a_{3p_3},a_{4p_4},a_{5p_5}$ 中至少有一个必须为 0，所以 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}a_{5p_5}=0$，从而 $D=0$.

例 3　设 n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$，把 D 上下翻转得

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix},$$

证明 $D_1 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D$.

证 将 D 的第 1 行依次与第 2,3,…,n 行互换，使其位于第 n 行，再将新的第 1 行（D 的第 2 行）依次与第 2,3,$n-1$ 行互换，重复上述步骤，直至将 D 化为 D_1，互换次数为

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{n(n-1)}{2},$$

根据性质(2)得 $$D_1 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D.$$

注 将本题结论应用于副对角线下（上）方的元素全为 0 的三角形行列式，得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \begin{smallmatrix} & & \cdot \\ & \cdot & \\ \cdot & & \end{smallmatrix} & \\ a_{n1} & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1},$$

$$\begin{vmatrix} & & a_{1n} \\ & \begin{smallmatrix} & & \cdot \\ & \cdot & \\ \cdot & & \end{smallmatrix} & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1},$$

请读者记住这两个公式.

例 4 计算四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & -4 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

解 反复利用行列式的性质，将 D 化为上三角形行列式.

$$D \xlongequal[r_4 + 3r_1]{\substack{r_2 - 2r_1 \\ r_3 + r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4 - r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4 + \frac{2}{3}r_3} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10}{3} \end{vmatrix}$$

$$= -1 \times 2 \times 3 \times \frac{10}{3} = -20.$$

例 5 试证

$$D = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 + c_1 & c_1 + a_1 \\ a_2 + b_2 & b_2 + c_2 & c_2 + a_2 \\ a_3 + b_3 & b_3 + c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

证 利用行列式的性质，有

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 + c_1 & c_1 + a_1 \\ a_2 & b_2 + c_2 & c_2 + a_2 \\ a_3 & b_3 + c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_1 + c_1 & c_1 + a_1 \\ b_2 & b_2 + c_2 & c_2 + a_2 \\ b_3 & b_3 + c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 + c_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 + c_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 + c_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 + c_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 + c_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 + c_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 + a_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 + a_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & c_1 + a_1 \\ b_2 & c_2 & c_2 + a_2 \\ b_3 & c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 & c_3 \end{vmatrix} + 0$$

$$+0+\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+0+0+0+0+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

例 6 将行列式D的第i行乘以2，再减去第j行的3倍（$2r_i-3r_j$）后得到D_1，问D_1与D有何关系？

答 $D_1=2D$. 因为将D的第i行乘以2后所得行列式等于$2D$，再减去第j行的3倍，行列式不变，所以$D_1=2D$.

四 教、学建议

1. 基本要求

了解行列式的定义，掌握行列式的性质.

2. 重点、难点与关键

重点 行列式的性质.

难点 n阶行列式的定义.

关键 会利用行列式的性质计算行列式和证明有关问题.

3. 教学建议

(1) 讲n阶行列式定义时，应指出二、三阶行列式的对角线法则对于n阶($n\geqslant 4$)不再适用. 从三阶行列式的结构分析入手，引出n阶行列式定义时，教师应引导学生发现那些带规律性的东西（每一项的特点、符号与列标排列的关系、项数）.

(2) 讲行列式的性质时，要指出利用这些性质化简行列式时

容易犯的错误.

4. 学习方法指导

(1) n 阶行列式的定义很抽象,学生只要能够知道定义式 $D=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 各符号的意义并能用语言准确地表达此定义就可以了.

(2) 学生应掌握行列式的性质,并能运用这些性质进行行列式的计算和证明,要通过练习加深对它们的理解,对计算行列式中常犯的错误要认真地加以总结.

第二讲　行列式的计算与应用

一　内容提要

1. 余子式和代数余子式

在 n 阶行列式中,把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后,留下来的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij},则

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

其中 A_{ij} 叫做元素 a_{ij} 的代数余子式.

2. 行列式按行(列)展开法则

定理　行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

或 $$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(j=1,2,\cdots,n).$$

推论　行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad i\neq j,$$