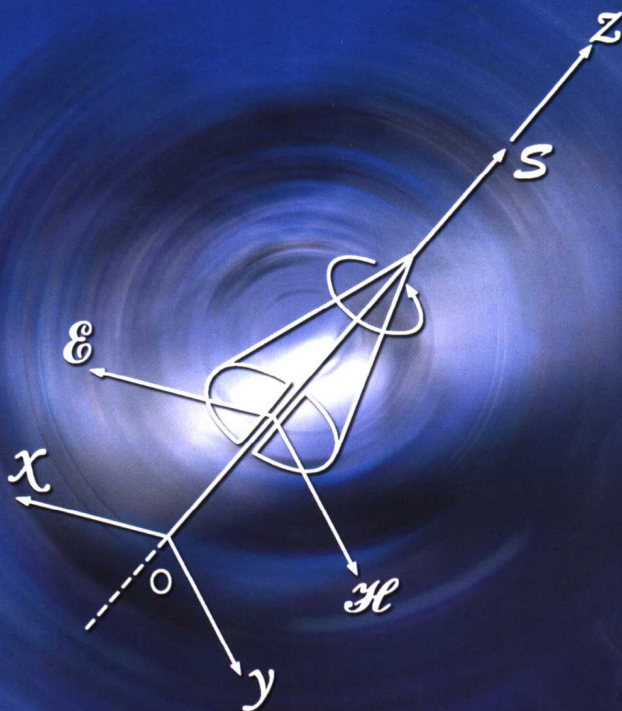


21 世纪高等院校教材

电磁场与电磁波

焦其祥 主编 顾晓仪 主审

李书芳 李 莉 编
张阳安 高泽华



 科学出版社
www.sciencep.com

21 世纪高等院校教材

电磁场与电磁波

焦其祥 主 编
李书芳 李 莉 编
张阳安 高泽华
顾晚仪 主 审

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书参考了国内外较好的同类教科书,并在总结本书第一、二版经验的基础上重新编写而成。全书共分 11 章,主要讲述了电磁场与电磁波的基本理论和计算方法。本书内容丰富,重点突出,在叙述上由浅入深、循序渐进,强调数学与物理概念的结合,思路清晰、适应面广,对一些典型问题和例题采用不同的分析方法,做到分析思路的多样性。书中配有近百道例题,以帮助学生分析问题,引导学生自学。

本书可作为高等院校无线电、电子、通信以及微波专业的本科教材,也可作为有关教学和工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波/焦其祥主编. —北京:科学出版社,2004

(21 世纪高等院校教材)

ISBN 7-03-013752-3

I. 电… II. 焦… III. ①电磁场—高等学校—教材②电磁波—高等学校—教材 IV. O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 061540 号

责任编辑:匡敏 姚庆爽 / 责任校对:钟洋

责任印制:安春生 / 封面设计:陈敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004 年 8 月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2004 年 8 月第一次印刷 印张:28 1/4

印数:1—3 500 字数:552 000

定价:32.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

前 言

电磁场与电磁波是一门重要的专业基础学科。它深刻地揭示了电磁现象的基本规律，其理论性、系统性强，逻辑严谨。学习这门课程不仅能加深对电磁规律的进一步理解，而且有助于培养正确的思维方式，提高分析问题的能力。

就培养学生分析问题的能力而论，本书强调了“分析方法的多样性”。科学的分析方法是工科大学教学的重要内容。“分析方法的多样性”是指对一些问题的分析，既有“简明扼要”的分析方法，又有“较多借重数学”的分析方法，或者是从不同角度、不同概念形成的分析方法。这样做不仅给具有学习潜力的学生提供了进一步探索的空间，对不同专业、不同学时的授课而言，也为教师提供了较多的选择余地。这种考虑合适否，期待同行和读者指教。

电磁场与电磁波是微波、天线、电波传播、光纤传输等专门学科的基本理论，这是大家所熟知的。实际上电磁场的应用已远远超出了这个范围。接触过高频电路的人，都有一个重要的经验：所用电阻、电感、电容的引线越短越好。因为这些引线会引入分布电感、电容、电阻，从而改变元件的参量，造成电路指标下降。这种“分布参量”的概念，说到底还是电磁场问题，可以用电磁场的理论去分析、处理。

在高速集成电路中，在超小、超薄的多层介质板电路中，更是充满了电磁场的问题。诸如相邻电路之间的耦合、多线之间的耦合、不合理的接地（位置不当或接地不理想）所引起的耦合，以及由它们所造成的阻抗改变、电路失配，这些问题轻则影响电路质量，重则造成工作失常。产生这些问题的重要原因是设计者缺乏电磁场的基本知识，不知道应该从场的角度去分析和处理这些问题。

就知识结构而论，电磁场理论应该是电子、通信类专业的大学生所必备的、不可或缺的部分。科学技术的不断发展，将会进一步显示它的重要性。

电磁场与电磁波和其他不少学科具有相通之处，如重力场、应力场等都存在某些与电磁场性质相像的地方，存在着某些相同的数学模型。电磁波与其他学科领域的波（如声波等）也存在着不少的相似之处。学习电磁场理论有助于学生对不同学科的融合和借鉴。

电磁场与电磁波作为一些学科领域的交叉点，衍生出众多的学科门类，诸如

生物医学、高速集成电路、通信类学科等。通信类学科又有移动通信、卫星通信、光纤通信等。除通信之外还有雷达、无线广播、电视等学科，它们无一不是以电磁波携带信息的方式来实现的。

就培养创新能力而论，作为一名合格的电子、通信类专业的大学生，应该学好电磁场理论。因为这门课处于学科交叉点，学习它有助于提高学生对交叉边缘学科的介入和开创能力。

本教材的内容是参照国家教育部电磁场理论指导组制定的教学大纲，参考国内外的优秀教材，以及作者多年的教学经验而确定的。书中配有不少例题，以期帮助读者提高分析问题的能力。

全书共分 11 章，其中 4 章及习题由六位具有博士学位的中青年教师编写。第 1、9、10、11 章依次由高泽华、张阳安、李书芳、李莉编写；习题和答案由王亚峰、张欣编写，第 2 至 8 章由焦其祥编写。全书由焦其祥主编和统稿。全书承博士生导师顾畹仪教授审阅，在此表示衷心的感谢；感谢王华芝、章茂林教授对本书架构和内容所提出的宝贵意见；感谢在读博士、硕士和本科的同学在书稿整理、绘图等工作中所给予的大力支持；感谢北京邮电大学电信工程学院的领导、无线通信中心、光通信中心的领导和同行们所给予的帮助和支持。

感谢科学出版社匡敏编辑为保证本书质量所付出的辛勤劳动。

作者

2004.5

常用参量与常用方程

主要符号

符号	名称	单位
E	电场强度	V/m (伏特/米)
H	磁场强度	A/m (安培/米)
D	电位移 (电通量密度)	C/m ² (安培/米 ²)
B	磁感应强度 (磁通量密度)	T (特斯拉)
φ	电位	V (伏特)
Ψ_e	电通量	C (库仑)
Φ	磁通量	Wb (韦伯)
A	矢量磁位	Wb/m (韦伯/米)
ρ_l	线电荷密度	C/m (库仑/米)
ρ_s	面电荷密度	C/m ² (库仑/米 ²)
ρ	体电荷密度	C/m ³ (库仑/米 ³)
n	折射率	
R	反射系数	
T	传输系数、折射系数	
C_0	单位长度电容	F/m (法拉/米)
L_0	单位长度电感	H/m (亨利/米)
F	力	N (牛顿)
T	力矩	N·m (牛顿·米)
w_e	电场能量密度	J/m ³ (焦耳/米 ³)
w_m	磁场能量密度	J/m ³ (焦耳/米 ³)
S	功率密度 (坡印廷矢量)	W/m ² (瓦特/米 ²)
J_s	面电流密度	A/m (安培/米)
J	电流密度	A/m ² (安培/米 ²)
γ	传播常数	1/m (1/米)
α	衰减常数	Np/m, dB/m (奈培/米, 分贝/米)
β	相移常数	rad/m (弧度/米)
k	波数, TEM 相移常数	rad/m (弧度/米)
η	TEM 波波阻抗	Ω (欧姆)
η_0	真空中 TEM 波波阻抗	Ω (欧姆)
$Z_{W(TE)}$	TE 波波阻抗	Ω (欧姆)

续表

符 号	名 称	单 位
$Z_{W(TM)}$	TM波波阻抗	Ω (欧姆)
Z_C	特性阻抗	Ω (欧姆)
Z_S	表面阻抗	Ω (欧姆)
R_S	表面电阻	Ω (欧姆)
X_S	表面电抗	Ω (欧姆)
R_r	辐射电阻	Ω (欧姆)
λ	波长	m (米)
λ_0	真空中波长	m (米)
λ_g	波导波长	m (米)
λ_c	截止波长	m (米)
ϵ^*	复数介电常数	
p	电偶极矩	$C \cdot m$ (库仑·米)
P_m	磁偶极矩	$A \cdot m^2$ (安培·米 ²)

常用常数

$c \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$	光速 (真空)
$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{ F/m}$	介电常量 (真空)
$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$	磁导率 (真空)
$\sigma_{银} = 6.17 \times 10^7 \text{ S/m}$	电导率 (银)
$\sigma_{铜} = 5.80 \times 10^7 \text{ S/m}$	电导率 (铜)
$\sigma_{金} = 4.10 \times 10^7 \text{ S/m}$	电导率 (金)
$\sigma_{铝} = 3.54 \times 10^7 \text{ S/m}$	电导率 (铝)
$\sigma_{黄铜} = 1.57 \times 10^7 \text{ S/m}$	电导率 (黄铜)
$\sigma_{铁} = 1.00 \times 10^7 \text{ S/m}$	电导率 (铁)
$e = -1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$	电子的电荷量
$m_e = 9.107 \times 10^{-31} \text{ kg}$	电子的静止质量
$R_e = 2.81 \times 10^{-15} \text{ m}$	电子半径
$m_p = 1.673 \times 10^{-27} \text{ kg}$	质子的静止质量
$6.6237 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ (焦耳·秒)	普朗克常数
$1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ (焦耳/绝对温度)	玻尔兹曼常数

梯度、散度、旋度及拉普拉斯方程表示式

直角坐标系 (x, y, z)

$$\begin{aligned}\nabla\varphi &= e_x \frac{\partial\varphi}{\partial x} + e_y \frac{\partial\varphi}{\partial y} + e_z \frac{\partial\varphi}{\partial z} \\ \nabla \cdot \mathbf{a} &= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \\ \nabla \times \mathbf{a} &= e_x \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + e_y \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + e_z \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \\ \nabla^2 \varphi &= \Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\end{aligned}$$

圆柱坐标系 (r, ϕ, z)

$$\begin{aligned}\nabla\varphi &= e_r \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{e_\phi}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\phi} + e_z \frac{\partial\varphi}{\partial z} \\ \nabla \cdot \mathbf{a} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r a_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \\ \nabla \times \mathbf{a} &= e_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial\phi} - \frac{\partial a_\phi}{\partial z} \right) + e_\phi \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \right) + e_z \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r a_\phi) - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial\phi} \right) \\ \nabla^2 \varphi &= \Delta\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\end{aligned}$$

球坐标系 (r, θ, ϕ)

$$\begin{aligned}\nabla\varphi &= e_r \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{e_\theta}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \frac{e_\phi}{r \sin\theta} \frac{\partial\varphi}{\partial\phi} \\ \nabla \cdot \mathbf{a} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta a_\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial a_\phi}{\partial\phi} \\ \nabla \times \mathbf{a} &= e_r \left(\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta a_\phi) - \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial a_\theta}{\partial\phi} \right) + e_\theta \left(\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial a_r}{\partial\phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r a_\phi) \right) \\ &\quad + e_\phi \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r a_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial\theta} \right) \\ \nabla^2 \varphi &= \Delta\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial\phi^2}\end{aligned}$$

目 录

前言

常用参量与常用方程

第 1 章 矢量分析	1
1.1 标量场与矢量场	1
1.2 矢量的运算 (加法、点乘、叉乘)	3
1.3 矢量的通量、散度	7
1.4 高斯定理.....	10
1.5 矢量的环流量、旋度.....	11
1.6 斯托克斯定理.....	14
1.7 标量场的梯度.....	15
1.8 亥姆霍兹定理.....	17
习题	18
第 2 章 静电场	21
2.1 静电场的散度方程及旋度方程.....	21
2.2 电位及电位梯度.....	31
2.3 拉普拉斯方程及泊松方程.....	34
2.4 电偶极子.....	36
2.5 静电场中的导体.....	39
2.6 静电场中的介质.....	40
2.7 静电场的边界条件.....	44
2.8 导体系统的电容.....	48
2.9 静电场能量与静电力.....	54
2.10 δ 函数及其相关性质	62
习题	64

第 3 章 恒定磁场	68
3.1 恒定磁场的散度方程及旋度方程	68
3.2 矢量磁位 A	75
3.3 磁偶极子	78
3.4 恒定磁场中的介质	80
3.5 恒定磁场的边界条件	83
3.6 自电感和互电感	86
3.7 磁场能量和磁场力	91
习题	96
第 4 章 恒定电场	102
4.1 电流密度	102
4.2 电流连续性方程	103
4.3 导电媒质中的恒定电场	104
4.4 导电媒质中的能量损耗	106
4.5 恒定电场的边界条件	107
4.6 恒定电场与静电场的比拟	107
4.7 考虑介质损耗的电容器	112
习题	113
第 5 章 静态场边值型问题的解法	115
5.1 静电场的边值型问题	115
5.2 唯一性定理	115
5.3 直接积分求解一维场	118
5.4 分离变量法求解二维、三维场的拉普拉斯方程	121
5.5 镜像法	145
5.6 保角变换法	161
5.7 有限差分法——数值算法	170
5.8 格林函数及格林第一、第二恒等式	172
习题	174
第 6 章 交变电磁场	180

6.1	关于麦克斯韦方程	180
6.2	电磁感应定律与麦克斯韦第二方程	180
6.3	安培环路定律与麦克斯韦第一方程	182
6.4	高斯定律与麦克斯韦第三方程	186
6.5	麦克斯韦第四方程	186
6.6	麦克斯韦方程组和辅助方程	188
6.7	复数形式的麦克斯韦方程	189
6.8	边界条件	192
6.9	坡印廷定理及坡印廷矢量	197
6.10	交变场的位与场	205
6.11	关于洛伦兹规范	208
	习题	210
第 7 章	平面波在无界媒质中的传播	213
7.1	波动方程及其解	213
7.2	理想介质中的平面波	217
7.3	电磁波的极化 (偏振)	227
7.4	导电媒质中的平面波	232
7.5	损耗角正切 $\tan\delta$ 及媒质分类	236
7.6	良介质中的平面波	237
7.7	良导体中的平面波	239
7.8	趋肤效应	241
7.9	良导体的表面阻抗	243
7.10	导电媒质的损耗功率	248
7.11	色散媒质、色散失真及正常色散、反常色散	249
7.12	铁氧体中的电磁波	253
	习题	260
第 8 章	电磁波的反射与折射	264
8.1	平面波垂直入射到理想导体表面	264
8.2	平面波垂直入射到理想介质分界面	267

8.3	平面波斜射到理想导体表面	272
8.4	平面波斜射到理想介质分界面	278
8.5	导电媒质分界面上波的反射和折射	300
8.6	平面波垂直入射到多层介质分界面	303
8.7	关于费涅尔公式 (R 、 T) 定义的多样性	305
	习题	311
第 9 章	双导体传输线——TEM 波传输系统	315
9.1	引言	315
9.2	TEM 波波动方程的特点	316
9.3	平行导体板传输系统	319
9.4	双线传输线	323
9.5	同轴线	343
9.6	有损耗传输线中的“伪”TEM 波	347
	习题	349
第 10 章	TE 波、TM 波传输系统——波导	351
10.1	矩形波导	351
10.2	圆波导	372
10.3	同轴线中的高次模	384
	习题	386
第 11 章	电磁波辐射	389
11.1	交变场的滞后位	389
11.2	电偶极子	394
11.3	磁偶极子	406
11.4	对偶定理	410
	习题	414
	参考文献	419
	附录 A 常用公式	420
	习题答案	425

第 1 章 矢量分析

本章介绍了电磁场与电磁波中所用到的数学工具矢量分析理论,内容包括标量、矢量及标量场、矢量场的概念,矢量的运算,矢量的通量、散度,高斯定理,矢量的环流量、旋度,斯托克斯定理,标量场的梯度,最后介绍了亥姆霍兹定理。

1.1 标量场与矢量场

1.1.1 标量

仅由数量确定的物理量,或由一个具有实数值的、空间一点的函数所确定的物理量,称为标量。若标量与坐标系的选择无关,则称为绝对标量。如任何实数、质量、长度、面积、时间、温度、电压、电荷量、电流、能量等。

1.1.2 矢量

用数值(大小)和方向表示的物理量称为矢量(或向量)。矢量用黑体 \mathbf{a} 表示(也可用有向线段 \overrightarrow{OA} 来表示),数值大小用 a 表示,称为矢量 \mathbf{a} 的模,记为

$$|\mathbf{a}| = a$$

矢量 \mathbf{a} 可以用三维空间中有方向的线段表示(如图 1.1),有向线段的长度表示矢量 \mathbf{a} 的模,箭头指向表示矢量 \mathbf{a} 的方向。

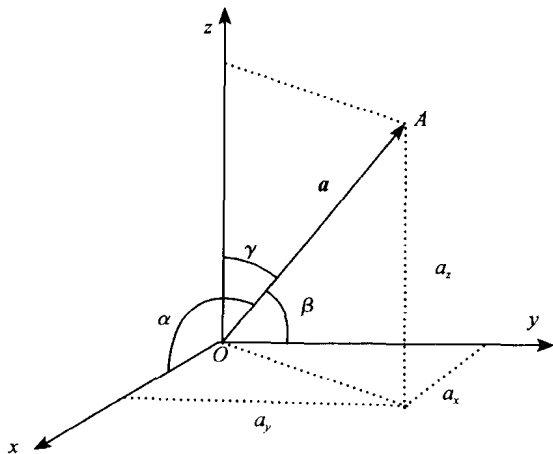


图 1.1 直角坐标系中的矢量 \mathbf{a}

由图看出矢量 \mathbf{a} 的模为

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

矢量 \mathbf{a} 与 x 轴、 y 轴、 z 轴的正向所成的夹角 α 、 β 、 γ 称为矢量 \mathbf{a} 的方向角, 方向角的余弦 $\cos\alpha$ 、 $\cos\beta$ 、 $\cos\gamma$ 称为矢量 \mathbf{a} 的方向余弦, 由图可见

$$a_x = |\mathbf{a}| \cos\alpha, \quad a_y = |\mathbf{a}| \cos\beta, \quad a_z = |\mathbf{a}| \cos\gamma \quad (1.1)$$

因此方向余弦满足

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \quad (1.2)$$

模为 1 的矢量称为单位矢量, 单位矢量用 \mathbf{e} 来表示。此处“1”含有 1 单位的意思, 也就是说, 给定单位(如米)后, “1”就是 1 单位(1 米)。与模 $a \neq 0$ 矢量 \mathbf{a} 的方向相同的单位矢量记为

$$\mathbf{e} = \mathbf{a}/a \quad (1.3)$$

与直角坐标系中 x 、 y 、 z 轴的正方向一致的单位矢量称为基本单位矢量, 分别用 \mathbf{e}_x 、 \mathbf{e}_y 、 \mathbf{e}_z 表示。矢量 \mathbf{a} 还可按基本单位矢量分解为

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z$$

起点和终点重合的矢量称为零矢量, 零矢量长度为零, 方向是任意的。如果两个矢量模相等方向相反, 这两个矢量互称相反矢量。矢量 \mathbf{a} 的相反矢量记为 $-\mathbf{a}$ 。

两个矢量如果满足: ①位于同一直线上或相互平行, 并且方向相同; ②模的大小相等, 则这两个矢量即为相等的矢量。

1.1.3 标量场

如果某个标量 φ 是空间位置和时间的函数, 即它可以用函数 $\varphi(x, y, z, t)$ 表示, 其中 x, y, z 表示空间位置, t 表示时间。若标量函数的值域是一个无穷集合, 这个无穷集合即表示这个标量的场(简称标量场)。例如, 空间中温度分布是一个温度场 $T(x, y, z, t)$, 电位分布是一个电位场 $\varphi(x, y, z, t)$ 。

如果标量场与时间无关, 则 $\varphi(x, y, z)$ 表示静态场或稳态场, 如果标量场与时间有关, 则 $\varphi(x, y, z, t)$ 表示动态场或时变场。

1.1.4 矢量场

如果某个矢量 \mathbf{F} 是空间位置和时间的函数, 即它可以用函数 $\mathbf{F}(x, y, z, t)$ 表示, 其中 x, y, z 表示空间位置矢量, t 表示时间。若矢量函数的值域是一个无穷集合, 这个无穷集合即表示这个矢量的场(简称矢量场)。例如, 空间中电场强度分布是一个电场矢量 $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ 。

在三维空间中一个矢量可以用三维坐标的三个分量表示, 这三个分量去掉方向即为三个标量, 因此一个矢量场可以分解为三个分量场(标量场)表示。矢量可以写为

$$F(x, y, z) = F_x(x, y, z)e_x + F_y(x, y, z)e_y + F_z(x, y, z)e_z$$

其中 $F_x(x, y, z)$, $F_y(x, y, z)$ 和 $F_z(x, y, z)$ 分别对应三个标量场。

1.2 矢量的运算(加法、点乘、叉乘)

1.2.1 矢量的加法

在物理学中我们知道,两个力或两个速度均能合成,合成后得到合力或合速度,同时合力或合速度均遵循平行四边形法则,由此我们定义矢量加法如下:

设有两个矢量 a 和 b (如图 1.2), 它们的起点为 O , 以矢量 a 和 b 为邻边作平行四边形, 平行四边形的对角线 OC 对应的矢量 c 称为矢量 a 和 b 的和, 记为 $c = a + b$ 。这个规则称为矢量相加的平行四边形法则。求矢量和的运算称为矢量的加法。

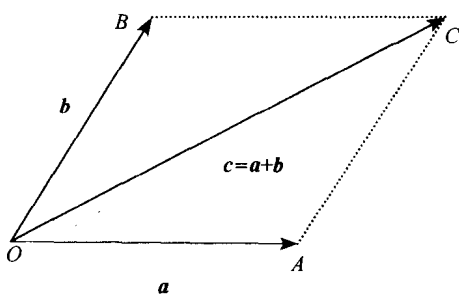


图 1.2 矢量相加的平行四边形法则

矢量的加法还可用基本单位矢量分解表达式表示。

若 $a = a_x e_x + a_y e_y + a_z e_z$, $b = b_x e_x + b_y e_y + b_z e_z$, 则

$$a + b = (a_x + b_x)e_x + (a_y + b_y)e_y + (a_z + b_z)e_z$$

由上式可见,矢量的加法的坐标分量是两矢量对应坐标分量之和。

矢量的减法是矢量加法的逆运算。设 $a + b = c$, 则

$$a = c - b = c + (-b)$$

矢量的加法满足加法的交换律和结合律, 即

$$a + b = b + a \quad (1.4)$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad (1.5)$$

1.2.2 矢量的数乘(矢量与数的乘法)

实数 λ 与矢量 a 的乘积定义为实数 λ 与矢量 a 的数乘, 结果也是一个矢量, 写成 λa , 其模为

$$|\lambda a| = |\lambda| |a| \quad (1.6)$$

其方向为: 当 $\lambda > 0$ 时, λa 与 a 同方向; 当 $\lambda < 0$ 时, λa 与 a 方向相反; 当 $\lambda = 0$ 时, $\lambda a = 0$ 。

当 $\lambda = -1$ 时, $\lambda a = -a$ 称为矢量 a 的反向矢量。

矢量 a 的数乘按基本单位矢量分解表达式表示为

$$\lambda \mathbf{a} = \lambda a_x \mathbf{e}_x + \lambda a_y \mathbf{e}_y + \lambda a_z \mathbf{e}_z$$

设 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 是矢量, λ_1 和 λ_2 是标量, 则

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{a}$$

$$\lambda_1 (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_1 \mathbf{b}$$

1.2.3 矢量的标量积(数量积、内积)

在物理学中知道, 物体在力 \mathbf{F} 的作用下产生位移 \mathbf{l} , 若 \mathbf{F} 与 \mathbf{l} 的夹角为 θ , 则力 \mathbf{F} 对物体所做的功为

$$W = |\mathbf{F}| |\mathbf{l}| \cos\theta \quad (1.7)$$

根据上述运算我们定义矢量的一种乘法运算: 设有两个矢量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} , 它们的夹角为 θ , 定义矢量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 的标量积 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, 等于这两个矢量的模与其夹角余弦的乘积, 即

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos\theta \quad (1.8)$$

矢量的标量积又称为数量积、点积或内积。

根据以上定义, 力 \mathbf{F} 所做的功 W 可以表示为

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{l}$$

矢量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 的标量积 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 按基本单位矢量分解表达式表示为

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (1.9)$$

由上式可见, 矢量的标量积等于两矢量对应坐标分量的乘积之和。

根据 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos\theta$, 所以有

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$$

考虑式 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$, 所以

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

标量积满足如下关系:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \\ \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \\ \lambda_1 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) &= (\lambda_1 \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\lambda_1 \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \lambda_1 \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

1.2.4 矢量的矢量积(叉积、外积)

在研究物体的转动时, 有一个经常用到的物理量是力矩, 设力 \mathbf{F} 作用于某物体的点 A , 对于该物体上的支点 O 来说, 力 \mathbf{F} 产生了一个力矩 \mathbf{T} , 其大小等于力 \mathbf{F} 的大小乘以点 O 到 \mathbf{F} 的作用线的距离, 如图 1.3, 设力 \mathbf{F} 与 \mathbf{OA} 的夹角是 θ , 所以力矩为

$$\mathbf{T} = \mathbf{OA} \times \mathbf{F} \quad (1.11)$$

力矩是一个矢量,它的方向垂直于 \mathbf{F} 与 \mathbf{OA} 所确定的平面,且 \mathbf{OA} 、 \mathbf{F} 与 \mathbf{T} 三者的方向遵循右手法则,即当右手的四指从 \mathbf{OA} 朝手心方向以不超过 π 的转角转向 \mathbf{F} 时,竖起的大拇指的指向即为 \mathbf{T} 的方向。

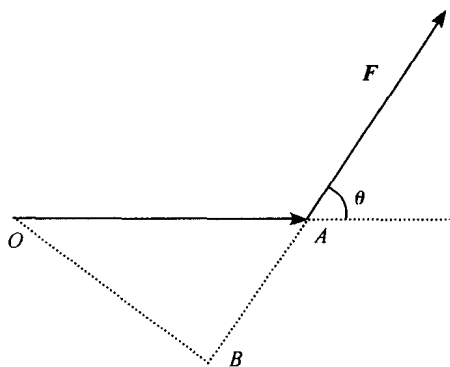


图 1.3 力与力矩

根据上述运算,我们定义矢量的另一种乘法运算:设有两个矢量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} ,它们的夹角为 θ ,定义矢量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 的矢量积为一个矢量 \mathbf{c} ,记为 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$,其大小等于这两个矢量的模与其夹角的正弦的乘积,即

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin\theta$$

矢量 \mathbf{c} 的方向同时垂直于矢量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} ,并且矢量 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 、 \mathbf{c} 遵循右手法则。

矢量的矢量积又称为叉积或外积。

根据以上定义,力 \mathbf{F} 产生的力矩 \mathbf{T} 可以表示为

$$\mathbf{T} = \mathbf{OA} \times \mathbf{F}$$

由矢量积的定义可看出

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{a} &= 0 \\ \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \\ (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} \\ \lambda_1 (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= (\lambda_1 \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda_1 \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \lambda_1 \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

下面推导矢量积按基本单位矢量分解表达式:

按矢量的运算规律有

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z) \times (b_x \mathbf{e}_x + b_y \mathbf{e}_y + b_z \mathbf{e}_z)$$

展开后得

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{e}_x + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{e}_y + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{e}_z \quad (1.13)$$

写成行列式

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \mathbf{e}_x + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} \mathbf{e}_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \mathbf{e}_z$$

或

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (1.14)$$

例 1.1 矢量 $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_x - 6\mathbf{e}_y - 3\mathbf{e}_z$ 和矢量 $\mathbf{b} = 4\mathbf{e}_x + 3\mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z$ 确定一个平面,求此平面的法向单位矢量。