

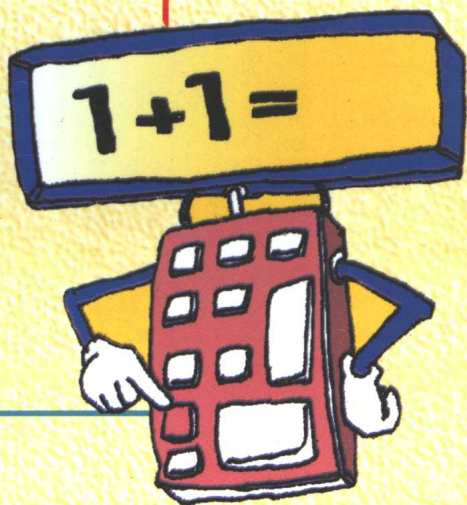
中央教科所 北京师范大学专家指导

中学数学

SHUXUE

创新

教法



主编 ● 毛永聪

思维训练方案

学苑出版社

毛永刚 ◆ 主编

思维训练

S
i
w
e
i
X
u
n
l
i
a
n
F
a
n
g
a
n

方案

中学数学创新教法



学苑出版社—

图书在版编目(CIP)数据

中学数学创新教法/毛永聪主编.-北京:
学苑出版社,1999.6
ISBN7-5077-0747-4

I.中… II.毛… III.数学课-教学法-中学
IV.G633.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 25479 号

学苑出版社出版发行

北京市万寿路西街 11 号 100036

铁十六工程局印刷厂印刷 新华书店经销

850×1168 32 开本 32 印张 500 千字

1999 年 6 月北京第 1 版 1999 年 6 月北京第 1 次印刷

印数:00001-12000 册 定价:48.00 元

目 录

第一章 数学思想与教学的关系

数学素养与数学思想方法.....	(1)
数学思想与数学教学思想.....	(8)
数学思想方法与课堂教学.....	(9)
对中学数学思想方法的认识.....	(14)
中学数学思想方法的教学.....	(16)
数学思想方法与素质教育.....	(20)
初中数学思想方法.....	(22)
如何加强初中数学思想方法的渗透.....	(25)
中学数学思想方法的教学.....	(27)
数学观与数学教学.....	(37)
培养数学观念的必要性.....	(43)
培养数学观念的可行性.....	(46)
培养数学观念的实践性策略.....	(48)
从建构角度看数学观念与数学教学.....	(49)

第二章 数学思想在教学中的运用方法

归纳思想的运用方法	(54)
概括思想的运用方法	(58)
转化思想的运用方法	(59)
化归思想方法训练	(66)
数学模型的概念与特征	(71)
数学模型方法在教学中的应用	(74)
建立数学模型的三种方法	(77)
建立数学模型解题	(82)
学生身边的数学模型	(87)
数学分类思想与方法	(88)
分类讨论思想在教学中的渗透	(93)
分类讨论思想的运用方法	(97)
对比方法在教学中的应用	(102)
比较方法在教学中的运用	(104)
特殊化思想在教学中的应用	(110)
数学反证法的思想与基本形式	(113)
反正法与同一法	(116)
枚举法和隐枚举法	(118)
数学整体思想与方法	(124)
“拆项法”在教学中的应用	(127)
割补法及其应用	(131)

估值法及其应用	(132)
“集合”概念及其教学渗透	(136)
数学“对应”思想及其教学渗透	(139)
“主元法”及其应用	(143)
换元思想及其应用	(146)
数学的结构方法及其运用	(150)
数学构造与联想方法及其运用	(154)
数学分析方法及其应用	(157)
演绎推理和演绎证法	(159)
配方法及其教学应用	(164)
数学还原思想及其教学应用	(167)
运动变化思想及其教学运用	(172)

第三章 科学数学思想的培养

数学意识及其培养	(177)
教学过程中的数学意识培养	(186)
求简意识的教学培养	(189)
应用意识及其培养	(193)
创造性思维及其培养	(198)
猜想与创造性思维能力的培养	(206)
问题的非常规解法与思维品质的培养	(209)
思维定势与中学数学教学	(213)

思维定势的建立与突破	(218)
思维定势规律的运用	(222)
注重原型启发 突破思维障碍	(229)
突破思维的“怪圈”	(233)
“求解性思维”的障碍与布置对策	(237)
思维训练的误区与纠偏	(243)

第一章

数学思想与教学的关系

●数学素养与数学思想方法

《九年义务教育全日制中学数学教学大纲》指出：“使学生受到必要的数学教育，具有一定的数学素养，对于提高全民族素质，为培养社会主义建设人才奠定基础是十分必要的。”又指出：“初中数学的基础知识主要是初中代数、几何中的概念、法则、性质、公式、公理、定理以及由其内容所反映出来的数学思想和方法。”在对数学学科地位的阐述中使用“数学素养”一词，并把数学思想和方法作为基础知识写进教学大纲，这是过去的大纲所没有的，应该引起数学教育的足够重视。湖北枝江教研室许第二老师从以下三方面进行了研究：

1. 数学思想和方法包含于数学素养

数学素养是“人们在社会活动中，逐渐积累着对于数学关系和空间形式的认识”，它包括知识技能素养、逻辑思维素养、运用数学素养、唯物辩证素养等四个方面的素养。而所谓数学

思想方法是指对数学知识和方法形成的规律性的理性认识,是解决数学问题的根本策略。因此,数学思想方法是数学素养的重要组成部分。

(1)数学思想方法从属于知识技能素养。知识技能素养是指具有“当代社会中每一个公民适应日常生活、参加生产和进一步学习所必需的代数、几何的基础知识与基本技能”。而每一项代数、几何的基础知识与基本技能,都是因为有了数学思想才形成的。例如人们利用符号化的思想,总结出一般的公式和用字母表示的定律,进而发展到用符号表示集合、变换、几何图形、命题等任意具有一定通性的量;利用转化的思想,总结出解多元方程的基本方法,等等。

另一方面,每一项代数、几何的基础知识和基本技能中,几乎都隐含有数学思想和方法。如用代数方法解方程中化未知为已知的思想,几何学科本身就是数形结合思想的体现,以及几何中把复杂图形转变为平面内的基本图形来研究的思想等。同时,数学思想方法又是连结基础知识和基本技能的纽带。如函数的思想将代数中的大部分知识串联在一起,每一个含一个字母的代数式都是这个字母的函数,代数式的值就是函数值,方程可看作是函数值为零的特例,不等式可看作两个函数值的比较,等等。

(2)数学思想方法是逻辑思维素养的基础。逻辑思维素养是指“具有一定的运算能力、运用数学进行逻辑思维的能力和空间想象能力。”运算能力的较高层次是能够根据题目条件寻求合理、简捷的运算途径,要达到这一较高层次,就必须具备“化归”这一导向型的数学思想,掌握“换元、配方、待定系数”等技巧型的数学方法。思维是人们对客观事物本质和规律的概括的反映,而实际对事物本质和规律的认识,从数学高度抽象的要求来看,对直观图形要赋予代数意义,对具有一定通性

的量要利用符号来表示;从思维的过程来看,抽象概括是过程的核心;从思维的形式来看,它包括演绎推理、归纳推理、类比推理等逻辑型的思维方法。

(3)数学思想方法是运用数学素养的基本要素。运用数学素养是指“能把相关学科、生产和日常生活中的实际问题抽象成数学问题,运用数学知识、技能去分析解决它们。”数学概念、公式、定理、法则等,都是从现实世界中为解决各种实际问题而经过抽象概括得到的数学模型,因此,要运用所学知识解决实际问题,一定要使学生受到把实际问题抽象成数学问题的训练,使学生通过理解和掌握数学思想和方法,增强用数学的意识。

2. 教材内容潜在的数学思想方法

(1)符号化与数式通性的思想。用字母表示数,并以数的运算性质为依据来进行数、字母以及字母表达式的运算,这是代数的本质,它体现的是由特殊到一般的抽象。新教材在小学“用字母表示数”的基础上,第一章就将字母的含义扩充为“表示任意的数”和方程中的未知元;第三章开始渗透“把一个多项式看成一个字母”,并用数的运算性质去探索式的同类运算的性质;第七章是通过实例来理解字母的广泛含义,指出“可以向学生说明公式中的字母可以表示具体的数(正数或负数),也可以表示单项式或多项式等代数式”;到了因式分解一章,例题分析采用设辅助元的方法,才明确指出“字母不仅可以表示一个数,还可以表示一个式。”从教材体系看,到初二第一学期,学生必须形成符号化和数式通性的思想。

(2)化归的思想。化归的实质是把新问题转化成已经解决的问题来解决,把复杂问题转变为简单问题来解决,是处理数学问题时的一种基本思路。在基本运算中,将减法化成加法,

除法化成乘法;在方程中,化未知为已知、化复杂为简单是解方程和方程组的基本思想,具体表现为把“多元”变成“一元”,“高次”变为“低次”,分式方程变为整式方程,无理方程变为有理方程;在平面几何中,把复杂图形转变为平面内的基本图形,把多边形转化为三角形或特殊四边形。在化归的思想指导下,还必须掌握一些具体的数学方法,如消元法、换元法、配方法,等等。

(3)数形结合的思想。数形结合是从感知向思维过渡的中间环节,是帮助学生理解掌握教材的重要手段。教材集中体现为两个方面,一是对直观图形赋予代数意义,要求学生能根据直观图形将实际问题抽象为数学问题;二是对抽象的数学问题赋予直观图形的意义,以形帮数。如用数轴上的点表示数,用数轴上线段的长度表示数的绝对值,用图形表示有理数的四则运算,依靠图形来分析应用题中已知数与未知数的关系,利用方程解决平面几何中的计算问题等等。

(4)归纳的思想。归纳是一种逻辑型的思维形状,教材中给予归纳的材料很多,均是从一个或几个(但不是全部)特殊情形作出一般结论的不完全的归纳法。一类是性质和法则的归纳,如等式、不等式的基本性质,有理数四则运算的法则,同底数幂乘法性质等的归纳过程;另一类是解题方法的归纳,如解一元一次方程、一元一次不等式的一般步骤;第三类是归纳猜想,如由表格所给数据归纳几个连续奇数的和等。

(5)演绎的思想。演绎推理是培养学生逻辑思维能力的主要内容,它着重反映在平面几何的教材之中。教材对推理证明训练的编排和要求分为四个阶段,即推理训练的渗透和准备阶段,推理证明的正式训练阶段,推理证明训练的巩固和提高阶段,推理证明方法的灵活运用阶段,最后达到初步掌握并会运用的目标。

(6)概括的思想。概括是在思维中将同一种类的对象的共同的本质属性集中起来,结合为一般的类的属性。教材集中体现在概念学习中。

另外,教材还适当渗透了集合与对应、分类与类比等数学思想方法,把基本数学思想、方法和知识、技能融为一体,充分体现了九年义务教材素质教育的功能。

3. 渗透数学思想方法,提高数学素养

传统的数学教学注重知识的传授,但忽视知识发生过程中数学思想方法的教学。在近三年新教材的使用过程中,多数教师也只是把数学思想方法的教学作为一种形式,不利于学生数学素养的形成。如何改变这一状况,已形成一个数学教育工作者亟待思考的问题。

(1)强化数学思想方法教学的意识。“在学校课程中,数学的思想方法应占有中心地位,占有把教学大纲中所有的为数很多的概念,所有的题目和章节联结成一个统一的学科的核心地位”。从这一思想出发,新大纲第一次明确在基础知识指出数学思想方法这个精髓,就对数学教育工作者提出了更高的要求。一方面要明确数学思想方法是数学素养的重要组成部分,突出素质教育就不仅要掌握知识、技能,而且要达到掌握、领悟数学思想方法的程度,这是新大纲的基本要求;另一方面,数学思想方法是渗透在知识的发生过程之中,教材中并没有明确指出,这就要求教师在吃透教材的基础上去领悟教材内容隐含的思想方法,从而把握教材的实质,使数学思想方法的教学成为一种有意识的教学活动。

(2)把握数学思想方法的教学目标。教材是按知识的逻辑体系编排的,而数学思想方法植根于知识的发生、发现、发展之中,有的数学思想方法在某一阶段就能达到掌握、领悟的程

度,如消元法、换元法、配方法、待定系数法等一些基本的数学方法,有的数学思想方法从初一到初三贯穿始终,如果阶段性教学目标不明确,就会陷入教学的盲目性和随意性之中。根据新大纲的要求,终极目标是“掌握、领悟”,即“能应用最基本的数学思想方法思考 and 解决简单的问题”。按阶段可分为“初步领悟、基本形成、初步应用”三个目标水平层次。以化归思想方法为例,初一年级,要使学生知道在一定条件下把未知转化为已知,把新知识化归为已掌握的知识来解决的思想方法;初二年级,就应充分发挥化归思想在解决问题中的思维导向功能,并能根据一定的模式去探索解决问题的方法;初三年级,能运用已经形成的化归的思想方法去独立探索新的知识。事实上,新教材的编排体系基本上是按照分步骤、缓坡度的循序渐进的原则,关键在于教师必须对教材有一个从数学思想方法上的整体认识。

(3)掌握渗透数学思想方法的途径。数学思想方法作为基础知识的重要组成部分,但又有别于基础知识。除基本的数学方法以外,其它思想方法都呈隐蔽形式,渗透在学习新知识和运用知识解决问题的过程之中,这就要靠教师在教学过程中,把握渗透的时机,选择适当的方法,使学生能够领悟并逐步学会运用这些思想方法去解决问题。

①在知识的形成过程中渗透。新大纲明确指出:“数学教学不仅要教给学生数学知识,而且还要揭示获取知识的思维过程。”这一思维过程就是科学家对数学知识和方法形成的规律性的理性认识的过程。任何一个概念,都经历着由感性到理性的抽象概括过程;任何一个规律,都经历着由特殊到一般的归纳过程。如果我们把这些认识过程返朴归真,在教师的引导下,让学生以探索者的姿态出现,去参与概念的形成和规律的揭示过程,学生获得的就不仅是数学概念、定理、法则,更重要

的是发展了抽象概括的思维和归纳的思维,还可以养成良好的思维品质。因此,概念的形成过程、结论的推导过程、规律的被揭示过程都是渗透数学思想方法的极好机会和途径。

②在解题思路的探索过程中渗透。新大纲指出:“要加强对解题的正确指导,应引导学生从解题的思想方法上作必要的概括”。而化归、数学模型、数形结合、类比、归纳猜想等思想方法,还是解题思路分析中必不可少的思想方法,是一种思维导向型的思想方法。其中,化归是解题的一种基本思路,学生一旦形成了化归的意识,就能化未知为已知、化繁为简、化一般为特殊,优化解题方法;数形结合是充分利用图形直观,帮助学生理解题意的重要手段,它可以使抽象的内容变为具体,从而化难为易。数学思想方法在解题思路探索中的渗透,可以使学生的思维品质更具合理性、条理性和敏捷性。

③在解决实际问题中内化数学思想方法。课堂教学中渗透数学思想方法,可以提高学生独立获取知识的能力。反之,鼓动学生运用数学知识去分析、解决有实际意义的和相关学科的数学问题,以及解决生产和日常生活中的实际问题,可以使学生在把实际问题抽象成数学问题的过程中,进一步领悟数学思想方法,促进数学素养的提高。

(4)遵循数学思想方法教学的渗透性原则。初中数学中的一些基本数学方法,教材大都给出了描述性概念,而化归、演绎、归纳、概括、分类、类比等思想方法,只是渗透在学习新知识和运用知识解决问题里,因此对这一类数学思想方法的教学,就只能是渗透性教学。我们所讲的渗透,并不是添加数学思想方法的内容,更不是对这些数学思想方法给予概念上的界定,而是要把教材内容本身的数学思想方法因素与其本身有机地结合起来,在教学过程中使处于自发状态的隐性的思想方法的渗透转化为自觉状态的隐性的思想方法的渗透,使

学生在潜移默化的过程中逐步领悟并学会运用这些思想方法去解决问题,使数学思想方法逐步内化为学生个体的思维品质。

●数学思想与数学教学思想

数学教学思想指导数学教学的外在组织形式,而数学思想指导数学知识的内在组织形式,它们都是数学教学理论的重要组成部分。

第一,数学思想是数学教学思想的内核

数学思想与数学教学思想都具有内隐性。数学学科有着丰富的思想,以数学思想为内核的数学教学思想更科学,优选教学方法更有效。如在方程(组)教学中,强化消元与降次的思想,可采用国外很普通的单元教学法(anit teaching)。这样,能充分体现充满在整个数学中的“思想经济化”的精神,变“板块式”教材为“螺旋式”教学。斯托利亚尔在他所著的《数学教育学》中指出:“实际上,与其说是在中学教学现代数学,倒不如说是数学的现代教学”,又指出:“数学教育现代化首先的意思是教学的思想接近于现代数学,即把中学数学教学建立在现代数学的思想基础上”。波利亚也强调把数学中“有益的思考方式,应有的思维习惯”放在教学的首位,“把数学教给所有的人”。这些名家的论述都说明了数学思想应作为数学教学思想的内核。

第二,数学思想能活化为数学教学思想

这里的活化指对数学思想的消化、验证、概括和具体迁

移。教学的基本要求是重点突出,难点分散,重点往往要运用数学思想或揭示新的数学思想,数学思想史上的里程碑常常都是教学的难点。数学思想表现为一种意识或观念,很容易迁移到对象情景相似的场合中去。 $F \cdot$ 克莱因曾提出“用函数来思考”,奥加涅相提出“函数思维”,都强调了函数思想能活化为一种教学思想。这种函数教学思想能有效地帮助学生理解代数式、方程、曲线、函数、图象、不等式、数列等的内在联系,并且是一种“技术性”的教学思想,具有一般性、程序性和构造性的特征,有章可循,对数学教学有着直接而现实的指导意义。刘徽在《九章算术注》中注释的方法是“析理以辞,解体用图”。赵爽注释《周髀算经》时也说:“辄依经为图,以披露堂之奥”。数形结合思想贯穿中学数学与数学教学的始终,它在我国从古至今一直是一种教学思想。强调数学应用的“培利运动”,强化现代数学思想教学的“新数运动”,波利亚的“合情推理”的教学思想,汉斯·弗赖登塔尔的“数学现实”、“数学再创造”的教学思想,本质上都是某种数学思想活化的结果。

第三,数学教学思想体现着数学教学规律的本质要求

教学过程的基本程序是:感知——理解——巩固——应用,而要领悟数学思想,则更需要渗透、提炼与反思。数学学科经过了教学法加工,数学教学思想必须充分反映数学的特点,没有数学思想的数学教学思想,是一碗“没有肉的淡汤”,没有先进的数学教学思想指导数学教学,数学思想可能会成为一块“嚼不动的牛肉”。目前的数学教学中,有人在苦口婆心地灌输大量公式和呆板的例题,有人依循一种有条不紊却异常乏味的“定义——公理——定理”的方式进行马拉松式地讲授,也有人特别偏爱魔术般地板演刁钻难题而忽视基础知识与技能,淡化数学思想的教学,不尽快克服这些弊端,后果实在堪

忧。

●数学思想方法与课堂教学

现代义务教育的初中数学究竟如何教怎样教?许多教育工作者为之探索和实践,提出了种种的教学改革措施。诸如心理启导自学教学法,结构教学,目标教学,青浦经验等。但笔者在深入研究新大纲,吃透新教材,通过课堂教学,实践认为:在数学课堂教学中,注意渗透数学思想方法,用数学思想方法去揭示知识的实质,是一项值得探讨的教学方法。江西省新余市马洪中学傅安高老师总结介绍了用数学思想方法指导课堂教学的概念发生过程、知识的关联、问题的变式、问题的变通几个重要方面的教学方法:

1. 用数学思想方法揭示概念的内容,体现知识的发生过程,培养学生准确建立概念的能力

理解概念是学好数学的基础,是能力培养的先决条件,学生数学能力的差异,后进生的分化,也往往从学习基本概念开始。因此,首先要教好概念,让学生学好概念,教材中许多概念都是用大字叙述的,若照本宣科给出概念的意义,学生往往难以理解其概括性和抽象性。由此,教学中要淡化概念,根据教材特点,采取相应的数学思想去揭示概念的发生过程,呈现概念的本质含义。

例如因式分解这个重要概念,不是直接给出定义,让学生去朗读和机械记忆,而是引导学生将因式分解与因数分解作如下类比。

(1)从学习因式分解的目的性上类比,算术里学习分数时,为了约分与通分的需要,必须学会把一个整数分解因数。类似的,代数里学完