信息与电子学科百本精品教材工程

新编计算机类本科规划教材

离散数学

焦占亚 主编 丁春欣 副主编

http://www.phei.com.cn

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

新编计算机类本科规划教材

离散数学

焦占亚 主 编
丁春欣 副主编

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 · BEIJING

内 容 简 介

本书分4部分。第1部分为数理逻辑，包括命题逻辑和谓词逻辑。第2部分为集合论，包括集合代数，二元关系，函数和基数。第3部分为代数结构，包括代数系统的基本概念，群、环和域，格与布尔代数。第4部分为图论，包含图的基本概念，图的连通性，图的矩阵表示，欧拉图与汉密尔顿图，树，二部图，平面图和图的着色。

本书可作为普通高等学校、职业技术学院、继续教育学院计算机、信息科学专业或其他相关专业本、专科教材，亦可供相关专业的工作人员阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/焦占亚主编．—北京：电子工业出版社，2005.1
新编计算机类本科规划教材
ISBN 7-121-00564-6

Ⅰ．离…　Ⅱ．焦…　Ⅲ．离散数学—高等学校—教材　Ⅳ．O158

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第118759号

责任编辑：冉哲　　特约编辑：黄绍君
印　　刷：北京大中印刷厂
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路173信箱　邮编100036
经　　销：各地新华书店
开　　本：787×1092　1/16　印张：15.25　字数：380千字
印　　次：2005年1月第1次印刷
印　　数：5000册　定价：20.00元

前　言

离散数学是现代数学的一个重要分支，它研究的对象是离散量的结构及相互关系。它在各学科领域，特别是计算机科学和技术、信息科学和工程等领域有着广泛的应用，同时也是许多专业课的重要先导课程。程序设计语言、数据结构与算法、操作系统、数据库技术、编译原理、可计算性与计算复杂性理论、数值与符号计算、计算机图形学、人工智能与机器人等都是以离散数学为基础的。近年发表的 IEEE 2001 计算机科学与技术专业课程计划在世界上引起广泛的反响，这个计划的第一个专题就是离散结构。通过离散数学的学习，不但可以使学生掌握处理离散结构的描述工具和方法，为后续课程的学习创造条件，而且可以提高学生的抽象思维能力和严格的逻辑推理能力，为将来参与创新性研究和开发工作打下坚实的基础。

作者从事离散数学教学已有数十年，在长期的教学实践中积累了较为丰富的教学经验，形成了较成熟的讲义。在此基础上，按照国家教育委员会颁布的计算机专业教学基本要求，认真编写成现在的教材。在写作中，我们不仅考虑理论体系的完整性和一致性，同时也注重理论联系实际，并多次更新和修订教学内容，以适应计算机科学技术的飞速发展。离散数学包括 4 大部分，各部分内容都十分丰富，均可独立成书。本书将最基本、最重要的内容选入，并且努力做到简明扼要、深入浅出。离散数学中有许多抽象概念学生难以接受，本书通过大量例题从不同的角度对这些概念进行说明，帮助学生理解。另外，全书各章节都涉及了要求学生掌握求解问题的一些具体方法，通过典型范例使学生牢固掌握。这些例题起到了示范、引导和开拓的作用。对全书各部分内容的先后顺序，我们进行了认真的研究和精心的安排，使教材的结构更合理，内容更充实，语言更通俗易懂，学生更容易理解。离散数学许多重要定理的证明难度太大，学生难以接受。本书对这些定理的证明也做了特别处理，有的增加了引理，有的分成几个小定理分步证明。本书每节均配有大量习题。

本书包含数理逻辑、集合论、代数结构和图论 4 部分内容。其中，数理逻辑包含命题逻辑和谓词逻辑 2 章；集合论包含集合，二元关系和函数 3 章；代数结构包含代数系统，群、环和域，格与布尔代数 3 章；图论是第 9 章。根据我们的经验，使用本书可在 80～100 学时内完成全部教学任务。

本书由大连海事大学计算机科学与技术学院黄健撰写第 1 章，齐齐哈尔大学信息学院计算机系丁春欣撰写第 6 章和第 7 章，陕西科技大学计算机与信息工程学院王建文撰写第 2 章和第 8 章，陕西科技大学计算机与信息工程学院焦占亚撰写第 3 章、第 4 章、第 5 章和第 9 章，并承担了全书的策划、修改和定稿工作。陕西科技大学计算机与信息工程学院刘炜、张小凡绘制了全书的所有图片，陕西科技大学计算机与信息工程学院于晓明对全书的文字进行了校对。在本书编写过程中，得到了电子工业出版社领导和编辑的大力支持，在此表示深深的谢意。

最后，我们诚恳地期待读者对本书的批评指正。

本书的配套电子教案可以从华信教育资源网下载，网址为：www. hxedu. com. cn。

编　者

2004 年 8 月于陕西科技大学

目　　录

第 1 章　命题逻辑

学习要点

数理逻辑是研究推理的数学分支，它引进一套符号体系，从量的侧面研究思维规律。现代数理逻辑分为证明论、模型论、递归函数论、公理化集合论等，这里介绍数理逻辑最基本、最简单的内容——命题逻辑。本章首先介绍命题、命题联结词、命题公式、命题公式的真值表、等价式、蕴含式、重言式、范式和全功能联结词集等基本概念，其次介绍对偶原理和命题逻辑的推论理论。本章不仅是第 2 章谓词逻辑的基础，同时也是以后各章节的基础。本章内容在计算机科学及其相关专业的后继课程中都有广泛的应用，每个学生都要全面熟练地掌握本章的内容。

本章计划安排约 10 个学时，全部 8 节内容均为必修内容。

1.1　命题及联结词

1.1.1　命题的基本概念

在数理逻辑中，把能判断真假的陈述句称为命题，一般用小写英文字母或带下标的小写英文字母表示。

命题的概念包含以下 3 个要素。

①只有陈述句才有可能成为命题，而其他的语句，如感叹句、祈使句、疑问句等，都不是命题。

②一个语句虽是陈述句，但不能判断真假，则不是命题。

③虽然要求命题能判断真假，但不要求现在就能确定真假，将来能够确定真假也可以。

一个命题表达的判断结果称为命题的真值。命题的真值有“真”和“假”两种，分别用 True，T，1(真)和 False，F，0(假)来表示。真值为真的命题称为真命题，真值为假的命题称为假命题。任何命题的真值是惟一的。

在命题逻辑中，对命题不再细分，因而命题是数理逻辑中最基本的也是最小的研究单位。

【例 1.1】 判断以下语句是否为命题。若是命题，则确定其真值。

(1)上海是个小村庄。

(2)存在外星人。

(3)禁止吸烟!

(4)北京是中国的首都。

(5)4 是素数或 6 是素数。

(6)今天你吃了吗?

(7)11+1=100

(8)我正在说谎。

解:(1)是命题,真值为 F。

(2)是命题,真值待定。虽然现在人类还没有搞清是否有外星人,但是随着科学技术的发展总有一天会知道是否有外星人。这是一个将来能判断真假的陈述句。所以,它是命题。

(3)不是命题,因为它是祈使句。

(4)是命题,真值为 T。

(5)是命题,真值为 F。

(6)不是命题,因为它是疑问句。

(7)是命题,只是需要上下文才能确定真值。在二进制中为 T,否则为 F。

(8)不是命题。设该句子是真命题,我说的话是对的,则我正在说谎,因而我说的是谎话,谎话是不正确的,故是假命题;设我说的话是不对的,我没有说谎,因而我说的话是真话,正确的话,故是真命题。因此无法判断该语句的真假,因而不是命题。称这样的陈述句为悖论。

表示命题的小写英文字母或带下标的小写英文字母常称为命题标识符。如果命题标识符表示的是一个具体的、确定的命题,称为命题常量。如果命题标识符表示的是任意一个命题,称为命题变元。命题变元无确定的真值。

命题是能判断真假的陈述句。而命题变元代表任意的命题,其真值是不确定的,因而不是命题。

如果一个命题不能再分解成更简单的命题,则称该命题为原子命题。如果一个命题不是原子命题,则称该命题为复合命题。

例 1.1 中的(1)、(2)、(4)、(7)小题均为原子命题。例 1.1 中的(5)小题是复合命题。原子命题是命题逻辑中的基本单位。

如果命题变元表示原子命题时,该命题变元称为原子变元。

在自然语言中,可以通过"如果……,那么……","不但……,而且……"这样的连词将简单的陈述句联结成复合语句。同样,在命题逻辑当中,也可以通过命题联结词将原子变元联结起来表示复合命题。

1.1.2 命题联结词

常用的逻辑联结词有 5 种:否定联结词、合取联结词、析取联结词、条件联结词和双条件联结词。

1. 否定联结词

表 1.1

p	$\neg p$
0	1
1	0

定义 1.1.1 设 p 为命题,则 p 的否定是一个复合命题,记作:$\neg p$,读作"非 p"或"p 的否定"。定义为:若 p 为 T,则$\neg p$ 为 F;若 p 为 F,则$\neg p$ 为 T。

p 和$\neg p$ 的关系如表 1.1 所示,表 1.1 叫作否定联结词"$\neg$"的真值表(下同)。

联结词"$\neg$"也可以看作逻辑运算,它是一元运算。

【例 1.2】 否定下列命题。

(1)p:王强是一名大学生。

(2)q:中国的每一个城市都是沿海城市。

解:

(1)$\neg p$:王强不是一名大学生。

(2)$\neg q$:并非中国的每一个城市都是沿海城市。

或 $\neg q$:中国的每一个城市不都是沿海城市。

而不表示成:中国的每一个城市都不是沿海城市。

2. 合取联结词

定义 1.1.2 设 p 和 q 均为命题,则 p 和 q 的合取是一个复合命题,记作:$p \wedge q$,读作"p 与 q"或"p 合取 q"。定义为:当且仅当 p 和 q 均为 T 时,$p \wedge q$ 才为 T。

表 1.2

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

联结词"$\wedge$"的真值表如表 1.2 所示。

联结词"$\wedge$"也可以看成逻辑运算,它是二元逻辑运算。

【例 1.3】 设 p:2008 年将在北京举办奥运会。

q:中国是世界四大文明古国之一。

则 $p \wedge q$:2008 年将在北京举办奥运会并且中国是世界四大文明古国之一。

需要注意的是,在自然语言当中,$p \wedge q$ 所表示的复合命题是没有实际意义的,因为 p 和 q 之间没有任何的内在联系。但在命题逻辑中,只要 p 和 q 的真值确定,根据联结词合取的定义,$p \wedge q$ 的真值就可以确定,也就是说,$p \wedge q$ 就可以成为一个新的命题,不管这个新命题在自然语言中是否有意义,是否合乎情理。

在例 1.3 中,p 的真值为 T,q 的真值也为 T,则 $p \wedge q$ 的真值就为 T。

3. 析取联结词

表 1.3

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

定义 1.1.3 设 p 和 q 均为命题,则 p 和 q 的析取是一个复合命题,记作:$p \vee q$,读作"p 或 q"或者"p 析取 q"。定义为:当且仅当 p 和 q 均为 F 时,$p \vee q$ 才为 F。

联结词"$\vee$"的真值表如表 1.3 所示。

联结词"$\vee$"也可以看成逻辑运算,它是二元逻辑运算。

"$\vee$"与汉语中的"或"相似,但又不相同。汉语中的"或"有可兼或与不可兼或(排斥或)的区分。请看下面的例子。

【例 1.4】 下列两个命题中的"或",哪个是可兼或?哪个是不可兼或?

(1)在电视上看这场杂技或在剧场里看这场杂技。

(2)灯泡有故障或开关有故障。

解:(1)中的联结词"或",是在排斥意义上使用的,也就是说,或者在家里通过电视看杂技,或者是在剧场里看同一场杂技。但是,同一个人是不可能既在家里同时又在剧场看杂技的。这里的联结词"或"是不可兼或。不可兼或也叫异或,它将在后面介绍。

在(2)中,或者灯泡有故障,或者开关有故障,当然二者都有故障也是可能的。这里的"或",显然是可兼或。

根据定义,"∨"是可兼或,而不是不可兼或。

设p:在电视上看这场杂技。

q:在剧场里看这场杂技。

命题"在电视上看这场杂技或在剧场里看这场杂技。"不能用 $p \vee q$ 表示。

设r:灯泡有故障。

s:开关有故障。

命题"灯泡有故障或开关有故障。"可用 $r \vee s$ 表示。

4. 条件联结词

定义 1.1.4 设 p 和 q 均为命题,其条件命题是个复合命题,记作:$p \to q$,读作"如果 p,那么 q"或"若 p,则 q"。定义为:当且仅当 p 为 T,q 为 F 时,$p \to q$ 才为 F。p 称为条件命题 $p \to q$ 的前件,q 称为条件命题 $p \to q$ 的后件。

表 1.4

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

联结词"→"的真值表如表 1.4 所示。

联结词"→"也可以看成逻辑运算,它是二元逻辑运算。

【例 1.5】 p:小王努力学习。q:小王学习成绩优秀。

$p \to q$:如果小王努力学习,那么他的学习成绩就会优秀。

联结词"→"与汉语中的"如果……,那么……"或"若……,则……"相似,但又是不相同的。

①在自然语言中,"如果……,那么……",常常是有因果关系的,否则无意义;但在条件命题 $p \to q$ 中,只要 p、q 有确定的真值,$p \to q$ 就成为新命题。

②在自然语言中,对于"如果……,那么……",当前件为假时,后件不管真假,这个句子都无法判断真假;在条件命题 $p \to q$ 中,当 p 为 F 时,不管 q 是真还是假,$p \to q$ 总是真的。

5. 双条件联结词

定义 1.1.5 设 p 和 q 均为命题,其复合命题 $p \leftrightarrow q$ 称为双条件命题,读作:"p 双条件 q"或者"p 当且仅当 q"。定义为:当且仅当 p 和 q 的真值相同时,$p \leftrightarrow q$ 为 T。

联结词"↔"的真值表如表 1.5 所示。

联结词"↔"也可以理解成逻辑运算,它是二元逻辑运算。

双条件联结词表示的是一个充分必要关系,与前面所述相同,也可以不必顾及其前因后果,而只根据联结词的定义来确定其真值。

表 1.5

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

【例 1.6】 设 p:张华是三好学生。

q:张华德、智、体全优秀。

$p \leftrightarrow q$:张华是三好学生,当且仅当张华德、智、体全优秀。

习题 1.1

1. 下列句子中,哪些是命题?哪些不是命题?如果是命题,指出它的真值。

(1)中国有四大发明。

(2)计算机有空吗?

(3)不存在最大素数。

(4)$21+3<5$。

(5)老王是山东人或河北人。

(6)2 与 3 都是偶数。

(7)小李在宿舍里。

(8)这朵玫瑰花多美丽呀!

(9)请勿随地吐痰!

(10)圆的面积等于半径的平方乘以 π。

(11)只有 6 是偶数,3 才能是 2 的倍数。

(12)雪是黑色的当且仅当太阳从东方升起。

(13)如果天下大雨,他就乘班车上班。

2. 将下列复合命题分成若干原子命题。

(1)李辛与李末是兄弟。

(2)因为天气冷,所以我穿了羽绒服。

(3)天正在下雨或湿度很高。

(4)刘英与李进上山。

(5)王强与刘威都学过法语。

(6)如果你不看电影,那么我也不看电影。

(7)我既不看电视也不外出,我在睡觉。

(8)除非天下大雨,否则他不乘班车上班。

3. 将下列命题符号化。

(1)他一面吃饭,一面听音乐。

(2)3 是素数或 2 是素数。

(3)若地球上没有树木,则人类不能生存。

(4)8 是偶数的充分必要条件是 8 能被 3 整除。

(5)停机的原因在于语法错误或程序错误。

(6)四边形 $ABCD$ 是平行四边形,当且仅当它的对边平行。

(7)如果 a 和 b 是偶数,则 $a+b$ 是偶数。

4. 将下列命题符号化,并指出各复合命题的真值。

(1)如果 $3+3=6$,则雪是白的。

(2)如果 $3+3\neq6$,则雪是白的。

(3)如果 $3+3=6$,则雪不是白的。

(4)如果 $3+3\neq6$,则雪不是白的。

(5)$\sqrt{3}$是无理数,当且仅当加拿大位于亚洲。

(6)$2+3=5$ 的充要条件是$\sqrt{3}$是无理数(假定是 10 进制)。

(7)若两圆 O_1,O_2 的面积相等,则它们的半径相等,反之亦然。

(8)当王小红心情愉快时,她就唱歌;反之,当她唱歌时,一定心情愉快。

1.2 命题公式与翻译

上一节讨论了命题常量、命题变量和命题联结词。把命题常量、命题变量按照一定的逻辑顺序用命题联结词连接起来就构成了命题演算的合式公式，也叫命题公式。当使用联结词集$\{\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$时，合式公式定义如下。

定义 1.2.1 按下列规则构成的符号串称为命题演算的合式公式，也称为命题公式，简称公式。

(1)单个命题变元和常元是合式公式。

(2)如果 A 是合式公式，那么$\neg A$ 是合式公式。

(3)如果 A 和 B 是合式公式，那么$(A\wedge B)$、$(A\vee B)$、$(A\rightarrow B)$和$(A\leftrightarrow B)$是合式公式。

(4)当且仅当有限次地应用了(1)、(2)、(3)所得到的符号串是合式公式。

命题公式一般用大写的英文字母 $A,B,C\cdots$表示。

依照这个定义，下列符号串是合式公式：

$$\neg(p\wedge q),\neg(p\vee q),(p\rightarrow(p\vee\neg q)),(((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r))\leftrightarrow(s\leftrightarrow t))$$

下列符号串不是合式公式：

$$(p\rightarrow q)\rightarrow(\wedge q),(p\rightarrow q,(p\wedge q)\rightarrow q)$$

定义 1.2.1 给出合式公式定义的方法称为归纳定义，它包括三部分：基础、归纳和界限。定义 1.2.1 中的(1)是基础，(2)和(3)是归纳，(4)是界限。下文中还将多次出现这种形式的定义。

为方便起见，对命题公式约定如下：

①最外层括号可以省略。

②规定联结词的优先级由高到低依次为$\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow$。按此优先级别，如果去掉括号，不改变原公式运算次序，就可以省掉这些括号。

一般地说，命题公式中包含命题变元，因而无法计算其真值，所以不是命题。

命题公式中的命题变元，也叫命题公式的分量。

有了命题公式的概念，就可以用命题公式表示复合命题，常将这个过程称为命题的符号化。命题的符号化可按如下步骤进行：

①找出复合命题中的原子命题。

②用小写英文字母或带下标的小写英文字母表示这些原子命题。

③使用命题联结词将这些小写英文字母或带下标的小写英文字母连接起来。

【例 1.7】 将下列命题符号化：

(1)苹果虽然红但是不甜。

(2)如果明天不是雨夹雪，那么我去学校。

(3)除非明天下雨，否则他就去学校。

(4)他或者骑自行车去学校，或者乘公共汽车去学校。

解：

(1)令p：苹果是红的。

q：苹果是甜的。

$p\wedge\neg q$：苹果虽然红但是不甜。

(2)令p:明天下雨。

q:明天下雪。

r:我去学校。

$\neg(p \wedge q) \rightarrow r$:如果明天不是雨夹雪,那么我去学校。

(3)令p:明天下雨。

q:他去学校。

此命题理解为:如果明天不下雨,则他就去学校。

$\neg p \rightarrow q$:除非明天下雨,否则他就去学校。

(4)令p:他骑自行车去学校。

q:他乘公共汽车去学校。

此命题中的或是不可兼或,所以不能符号化为:$p \vee q$,而要符号化为:$\neg(p \leftrightarrow q)$。稍后会看到这个表示是正确的。

从例1.7可以看出,具有否定意义的命题一定是复合命题,而不是原子命题。例如,"明天不下雨"是复合命题,而不是原子命题。因为它包含了一个更小的命题"明天下雨"。令p:明天下雨,命题"明天不下雨"符号化为:$\neg p$。

习题1.2

1.判别下列公式哪些是合式公式,哪些不是合式公式。

(1)$(p \wedge q \rightarrow r)$

(2)$(p \wedge (q \rightarrow r)$

(3)$((\neg p \rightarrow q) \leftrightarrow (r \vee s))$

(4)$(p \wedge q \rightarrow rs)$

(5)$((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((q \rightarrow p) \leftrightarrow q \vee r))$。

2.设p:天下雪。

q:我将进城。

r:我有时间。

将下列命题形式化:

(1)天没有下雪,我也没有进城。

(2)如果我有时间,我将进城。

(3)如果天不下雪而我又有时间的话,我将进城。

3.设p、q、r所表示的命题与上题相同,试把下列公式译成自然语言。

(1)$r \wedge q$

(2)$\neg(r \vee q)$

(3)$q \leftrightarrow (r \wedge \neg p)$

(4)$(q \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow q)$

4.试把原子命题表示为p、q、r等,将下列命题符号化。

(1)或者你没有给我写信,或者它在途中丢失了。

(2)如果张三和李四都不去,他就去。

(3)我们不能既划船又跑步。

(4)如果你来了，那么他唱不唱歌将看你是否伴奏而定。

5．用符号形式写出下列命题。

(1)假如上午不下雨，我去看电影，否则就在家里读书或看报。

(2)我今天进城，除非下雨。

(3)仅当你走，我将留下。

1.3 真值表和等价公式

1.3.1 命题公式的真值表

定义 1.3.1 设 $p_1,p_2,\cdots,p_n$是出现在公式 A 中的全部命题变元，给 $p_1,p_2,\cdots,p_n$各指定一个真值，称为对公式 A 的一个赋值或解释。若指定的赋值使 A 的真值为 T，则称这个赋值为 A 的成真赋值；若使 A 的真值为 F，则称这个赋值为 A 的成假赋值。

在本书中，若公式 A 中出现的命题变元为 $p_1,p_2,\cdots,p_n$，给 A 赋值 $a_1,a_2,\cdots,a_n$是指将 a_1赋给 p_1，a_2赋给 p_2，……，a_n赋给 p_n。若 A 中出现的命题变元为 $p,q,r,\cdots$，给 A 赋值 $a_1,a_2,\cdots,a_n$是指将 a_1赋给 p，a_2赋给 q，a_3赋给 r，……，a_n赋给最后的字母。

例如，给公式$(p\vee q\rightarrow r)$赋值 011 是指 $p=0,q=1,r=1$，它是该公式的成真赋值；赋值 110 是指 $p=1,q=1,r=0$，它是该公式的成假赋值。

定义 1.3.2 在命题公式 A 中，对 A 的每一个赋值，确定 A 的一个真值，把它们汇列成表，称该表为命题公式 A 的真值表。

依据定义 1.3.2 可以构造任何公式的真值表。在构造真值表时，先找出公式中所含的全体命题变元 $p_1,p_2,\cdots,p_n$(若有下标，则按下标由小到大的顺序排列；若无下标，则按字典顺序排列)。本书规定，赋值从 00…0 开始，依次递增，直到 11…1 为止。对应各个赋值，计算出公式各部分的真值，直到最后计算出公式的真值。

【例 1.8】 构造命题公式$\neg p\vee q$的真值表，并求成真赋值和成假赋值。

解：命题公式$\neg p\vee q$的真值表如表 1.6 所示。00，01，11 是成真赋值，10 是成假赋值。

【例 1.9】 构造命题公式$(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$的真值表，并求成真赋值和成假赋值。

解：命题公式$(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$的真值表如表 1.7 所示。00，11 是成真赋值，01，10 是成假赋值。

【例 1.10】 构造命题公式$(p\wedge q)\wedge\neg q$的真值表，并求成真赋值和成假赋值。

表 1.6

p	q	$\neg p$	$\neg p\vee q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

表 1.7

p	q	$p\wedge q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p\wedge\neg q$	$(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0	1

解：命题公式$(p\wedge q)\wedge\neg q$的真值表如表1.8所示。公式的所有赋值都是成假赋值。下面会讲到，这样的公式叫作矛盾式或永假式。

【例 1.11】 求公式 $p\wedge(p\vee q)\leftrightarrow p$ 的真值表，并求成真赋值和成假赋值。

解:命题公式 $p\wedge(p\vee q)\leftrightarrow p$ 的真值表如表1.9所示。公式的所有赋值都是成真赋值。下面会讲到,这样的公式叫作重言式或永真式。

表 1.8

p	q	$p\wedge q$	$\neg q$	$(p\wedge q)\wedge\neg q$
0	0	0	1	0
0	1	0	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0

表 1.9

p	q	$p\vee q$	$p\wedge(p\vee q)$	$p\wedge(p\vee q)\leftrightarrow p$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	1	1	1

从以上例子可以看出,公式真值表的行数与公式中变元的个数有关,含 2 个变元的命题公式有 $4(=2^2)$行,含 3 个变元的命题公式有 $8(=2^3)$行,……,含 n 个变元的命题公式的真值表有 2^n行。

下文中提到公式 A 与 B 具有相同的或不同的真值表,是指真值表的最后一列是否相同,而不考虑构造真值表的中间过程。

1.3.2 命题公式的等价

定义 1.3.3 设 A 和 B 是两个命题公式,对 A 和 B 的任一赋值,A 和 B 的真值都相同,则称 A 和 B 是等价的或逻辑相等的,记为 $A\Leftrightarrow B$。

可以证明,命题公式等价有下列三条性质:

①自反性,即对任意命题公式 A,$A\Leftrightarrow A$。

②对称性,即对任意命题公式 A 和 B,若 $A\Leftrightarrow B$,则 $B\Leftrightarrow A$。

③传递性,即对任意命题公式 A,B 和 C,若 $A\Leftrightarrow B$,$B\Leftrightarrow C$,则 $A\Leftrightarrow C$。

根据定义 1.3.3,可以用真值表证明命题公式是等价的,请看下面的例题。

【例 1.12】 根据等价的定义,用真值表证明 $p\rightarrow(q\rightarrow p)\Leftrightarrow\neg p\rightarrow(p\rightarrow\neg q)$。

证明:构造 $p\rightarrow(q\rightarrow p)$和$\neg p\rightarrow(p\rightarrow\neg q)$的真值表,如表 1.10 所示。$p\rightarrow(q\rightarrow p)$和$\neg p\rightarrow(p\rightarrow\neg q)$所在的列完全相同,它们具有相同的真值表,所以 $p\rightarrow(q\rightarrow p)\Leftrightarrow\neg p\rightarrow(p\rightarrow\neg q)$。

表 1.10

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$q\rightarrow p$	$p\rightarrow(q\rightarrow p)$	$p\rightarrow\neg q$	$\neg p\rightarrow(p\rightarrow\neg q)$
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	1

虽然用真值表可以判断任何两个命题公式是否等价,但当命题变元较多时,工作量是很大的,证明起来就比较困难。为此引入另外一种证明方法,这种方法叫作等价演算法。其基本思想是:先用真值表证明一组基本的、但又是重要的等价式,以它们为基础进行公式之间的演算,来判断公式是否等价。在数理逻辑中,常把基本等价式叫作命题定律。下面是常用的命题定律。

(1)双重否定律　　$A\Leftrightarrow\neg\neg A$

(2)交换律　　$A\vee B\Leftrightarrow B\vee A$,$A\wedge B\Leftrightarrow B\wedge A$

(3)结合律　　$(A\vee B)\vee C\Leftrightarrow A\vee(B\vee C)$