数学物理方法习题指导

周治宁　吴崇试　钟毓澍　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

数学物理方法习题指导

周治宁　吴崇试　钟毓澍　编著

北京大学出版社
·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法习题指导/周治宁,吴崇试,钟毓澍编著.—北京:北京大学出版社,2004.9

ISBN 7-301-07727-0

Ⅰ.数… Ⅱ.①周… ②吴… ③钟… Ⅲ.数学物理方法-习题 Ⅳ.O411.1-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 081848 号

书　　名:数学物理方法习题指导

著作责任者:周治宁　吴崇试　钟毓澍　编著

责 任 编 辑:瞿　定

标 准 书 号:ISBN 7-301-07727-0/O・0606

出 版 发 行:北京大学出版社

地　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871

网　　址:http://cbs.pku.edu.cn　电子信箱:zpup@pup.pku.edu.cn

电　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　理科编辑部 62752021

排　版　者:北京高新特打字服务社　51736661

印　刷　者:北京神剑印刷厂

经　销　者:新华书店

890mm×1240mm　A5　11.875 印张　342 千字

2004 年 9 月第 1 版　2004 年 9 月第 1 次印刷

定　　价:19.00 元

前　　言

本书是编者在北京大学物理学院等院系长期进行数学物理方法教学（包括课堂讲授和习题课教学）所积累资料的基础上编写的.在教学中，我们使用了郭敦仁教授编著的《数学物理方法》和武仁所编写的《数学物理方法习题集》，以及吴崇试编写的《数学物理方法》.在编写本书过程中，也参考了许多高等院校的相应教材.

多年来，学生也常常问我们为什么不出一本习题解答.我们的想法很简单，我们不希望学生在学习和做习题时受到不必要的束缚，更希望他们能充分发挥自己的主观能动性.在多年的教学实践中，常常能找到这样的例子，一个班甚至同一宿舍的学生，对同一道习题能够给出多种不同的解题方法.这正是学生们在学习中所展现的聪明才智和独立思考的能力.鉴于当前形势的变化，学生面临的新知识面大大增加，而学习时间相对减少；面临的择业面大大增加，所掌握的知识需要更加灵活；另外，从因材施教的角度看，可以对不同的学生有不同的要求.这些就是推动我们编写这本书的原委.我们希望这本书能够起到“抛砖引玉”的作用.

本书各章按内容之间的联系安排了一定的顺序，但也尽量保持各章的独立性.每章的内容包括三个部分：

1．内容提要.这一部分我们尽可能简明扼要地列出本章的主要内容，使其能作为手册使用.

2．典型例题分析.例题的选择有易有难，尽量覆盖本章的主要内容，并尽量提供多种解题方法，不同的方法用仿宋体的方法一，方法二，……引出.有一些例题作了详解，而有一些却只给出解题的主要步骤，给读者留下一定思考余地.

3．习题.大部分沿用了武仁编写的《数学物理方法习题集》中

所收集的题目. 但在编排上基本与吴崇试编写的《数学物理方法》中每章的习题一致. 有一些习题在典型例题分析中已经演算过了, 但在习题中仍然给出, 可供有兴趣的读者自行练习比较.

在内容提要和典型例题分析两部分中用楷书字体排印了三个部分的内容:

1. 讨论. 主要是给出一些需要强调的内容和概念, 一些值得引申和推广的方法, 也有一些是提醒读者注意容易出错的问题.

2. 思考题. 将一些值得引申和推广的方法留给读者自己去思考练习.

3. 有一些解题方法用到了后面章节才会讲到的内容, 为避免读者阅读的困难, 故特殊标出.

本书的内容包含了参加本课程教学的许多教师长期积累的成果, 也有一些来自历届学生的作业. 编者在这里谨向他们致以谢忱.

书中第一至第五章、第七章由钟毓澍编写, 第六章、第八至第十三章由周治宁编写, 第十四至第十九章由吴崇试编写. 全书由周治宁和吴崇试共同修改审定.

本书在选题上尽量照顾到了各种不同读者的需要, 它应能适合广泛的读者使用.

由于编者水平所限, 错误不妥之处, 欢迎使用本书的师生与读者不吝指正.

编　者

2004 年 8 月于北京大学

目　录

第一章　复数和复变函数

内 容 提 要

一、复数及其运算

1. 定义：若一对有序实数 (a,b) ，遵从下列基本运算规则：

加法　$(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2)$ ，

数乘　$c(a,b)=(ca,cb)$ ， c 为任一实数，

乘法　$(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$ ，

则称这一对有序实数 (a,b) 构成一个复数.

设有复数 $\alpha=(a,b)$ ，有时也记作 $\alpha=a+\mathrm{i}\,b$. 其中， a 称为 α 的**实部**，记作 $a=\mathrm{Re}\,\alpha$ ， b 称为 α 的**虚部**，记作 $b=\mathrm{Im}\,\alpha$ ， $\mathrm{i}=(0,1)$ ，称为虚单位. 有结果 $\mathrm{i}^2=-1$.

2. 复数的三种表示

(1) 代数表示： $\alpha=(a,b)=a+\mathrm{i}\,b$.

(2) 几何表示：

a. 在一平面上取直角坐标系 Oxy ，将平面上的点 (a,b) 与复数 α 相对应，点的横坐标对应复数的实部，点的纵坐标对应复数的虚部，称此平面为**复 (数) 平面** .

b. 在复平面上取极坐标系，代表复数 α 的点 (a,b) 到原点的距离 $r=\sqrt{a^2+b^2}=|\alpha|$ 称为复数的**模**. 该点的极角 $\theta=\arctan b/a=\arg\alpha$ 称为**复数的辐角**. 显然有关系

$$\alpha=r(\cos\theta+\mathrm{i}\,\sin\theta),$$

此式又称为复数的极坐标表示或三角函数表示.

由三角函数的周期性，可知，复数的辐角是多值的. 辐角改变 2π 的整数倍，所代表的复数不变，即

$$\alpha=r(\cos\theta+\mathrm{i}\,\sin\theta)=r[\cos(\theta+2n\pi)+\mathrm{i}\,\sin(\theta+2n\pi)],$$

其中 $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

c. 在复平面上作一自由向量，其长度为 $|\alpha|$，方向为 $\arg\alpha$，起点任意. 它就代表了复数 α. 称之为复数的向量表示.

(3) 指数表示：利用欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，可得复数的指数表示为

$$\alpha=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

3. 零点和无穷远点

这是两个特殊的复数，在复平面上也是两个特殊的点. 0 点表示模为零，辐角任意的一个点，即坐标系的原点. ∞“点”表示模为无穷大，辐角任意的“一个点”.

4. 复数的运算 (略).

二、复数的区域

1. 内点：在一个复数的点集中，以某一点为圆心作圆，只要半径足够小，使得圆内的所有点都属于该点集，则称此点为该点集的内点.

2. 区域：是一个点集，它全部由内点组成，且具有连通性，即点集中的任意两点都可以用一条折线连接起来，折线上的点都属于此点集.

3. 边界点和边界：边界点不属于区域，但以它为圆心作圆，不论半径多小，圆内总含有区域内的点. 边界点的全体构成边界.

4. 开区域与闭区域：区域又称为开区域，区域与边界一起构成闭区域. 设有区域 G，其边界为 C，则 $G+C$ 构成闭区域，记做 $\overline{G}=G+C$.

三、复数序列

1. 复数序列：按一定顺序排列的复数 $z_n=x_n+\mathrm{i}y_n$，$n=1,2,3,\cdots$，称为复数序列，记为 $\{z_n\}$.

2. 聚点 (极限点)：给定序列 $\{z_n\}$，若存在复数 z，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，恒有无穷多个 z_n 满足 $|z_n-z|<\varepsilon$，则称 z 为 $\{z_n\}$ 的一个聚点 (或极限点).

3. 波尔查诺－外尔斯特拉斯定理：一个有界的无穷序列至少有

一个聚点.

4. 极限：给定序列 $\{z_n\}$，若存在复数 z，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总能找到一个 $N(\varepsilon)>0$，使当 $n>N(\varepsilon)$ 时，有 $|z_n-z|<\varepsilon$，则称 z 为 $\{z_n\}$ 的极限．或称 $\{z_n\}$ 收敛于 z．记为

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z.$$

极限是序列的唯一聚点．反之亦然，若序列存在唯一聚点，则此聚点就是序列的极限.

5. 序列收敛的柯西充要条件：任意给定 $\varepsilon>0$，存在正整数 $N(\varepsilon)>0$，使对于任意的正整数 P，都有

$$|z_{N+P}-z_N|<\varepsilon.$$

四、复变函数

1. 复变函数的定义：设有复数区域 G，如果对于 G 内的每一个 z 值，都有一个或多个复数值 w 与之对应，则称 w 为 z 的函数，这就是复变函数，记为

$$w=f(z),\quad z\in G.$$

因为 $z=x+\mathrm{i}y$，所以

$$w=f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y),$$

一个复变函数只不过是两个二元实变函数的有序组合.

2. 复变函数的连续性：设函数 $f(z)$ 在 z_0 点的邻域内有定义，且 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$，即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon)>0$，使当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$，则称 $f(z)$ 在 z_0 点连续.

若函数 $f(z)$ 在区域 G 内的每一点都连续，则称函数 $f(z)$ 在区域 G 内连续.

典型例题分析

例 1.1　复数运算

(1) 化简复数 $\dfrac{(1+\mathrm{i})^n}{(1-\mathrm{i})^{n+2}}$；　(2) 求 $\sqrt{\mathrm{i}}$ 的实部、虚部、模及辐角.

解 (1) 方法一：

$$\frac{(1+\mathrm{i})^n}{(1-\mathrm{i})^{n+2}}=\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^n\frac{1}{(1-\mathrm{i})^2}=\left[\frac{(1+\mathrm{i})^2}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}\right]^n\frac{1}{(-2\,\mathrm{i})}$$
$$=\left[\frac{2\,\mathrm{i}}{2}\right]^n\frac{\mathrm{i}}{2}=\frac{\mathrm{i}^{\,n+1}}{2}\,.$$

方法二：

$$\frac{(1+\mathrm{i})^n}{(1-\mathrm{i})^{n+2}}=\frac{\left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi/4}\right)^n}{\left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\pi/4}\right)^{n+2}}=\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\pi/2}=\frac{\mathrm{i}^{\,n+1}}{2}\,.$$

(2) 因 $\mathrm{i}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\pi/2+2\,k\,\pi)}$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$，辐角是多值的，所以

$$w=\sqrt{\mathrm{i}}=\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\pi/2+2\,k\,\pi)}\right]^{1/2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi/4+\mathrm{i}\,k\,\pi},$$

显然，对应于不同的 k 它有两个不同的值，取 $k=0,1$.

当 $k=0$ 时，$w_0=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi/4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})$，有

$$\operatorname{Re}w_0=\frac{\sqrt{2}}{2},\qquad \operatorname{Im}w_0=\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$|w_0|=1,\qquad \arg w_0=\frac{\pi}{4}+2\,n\,\pi,\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

当 $k=1$ 时，$w_1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,5\,\pi/4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})$，有

$$\operatorname{Re}w_1=-\frac{\sqrt{2}}{2},\qquad \operatorname{Im}w_1=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$|w_1|=1,\quad \arg w_1=\frac{5\,\pi}{4}+2\,n\,\pi,\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

例 1.2 证明复数的下列不等式：

(1) $|z_1|-|z_2|\leqslant|z_1\pm z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$；

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(|x|+|y|)\leqslant|z|\leqslant|x|+|y|$，其中 $z=x+\mathrm{i}\,y$.

证 (1) 证法一：直接从复数相加减的平行四边形法则来证明.

如图 1.1，$\overrightarrow{AB}$ 为 z_1，$\overrightarrow{BC}$ 为 z_2，则 $\overrightarrow{AC}$ 为 z_1+z_2，$\overrightarrow{BD}$ 为 $-z_2$，则 $\overrightarrow{AD}$ 为 z_1-z_2 .

根据三角形中两边之和大于第三边，有

$$AB+BC\geqslant AC,\quad AB+BD\geqslant AD.$$

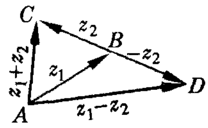

图　1.1

即得

$$|z_1|+|z_2|\geqslant|z_1+z_2|,$$
$$|z_1|+|z_2|\geqslant|z_1-z_2|.$$

根据三角形中两边之差小于第三边，有

$$AB-BC\leqslant AC,\quad AB-BD\leqslant AD.$$

即得

$$|z_1|-|z_2|\leqslant|z_1+z_2|,\quad |z_1|-|z_2|\leqslant|z_1-z_2|.$$

综合起来得证

$$|z_1|-|z_2|\leqslant|z_1\pm z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|.$$

证法二：直接用复数的运算性质来证明.

$$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(z_1+z_2)^*=|z_1|^2+(z_1z_2^*+z_1^*z_2)+|z_2|^2.$$

因 $z_1z_2^*$ 与 $z_1^*z_2$ 互为共轭复数，相加后为实数，即

$$z_1z_2^*+z_1^*z_2=2\,\mathrm{Re}\,(z_1z_2^*),$$

所以

$$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(z_1+z_2)^*=|z_1|^2+2\,\mathrm{Re}\,(z_1z_2^*)+|z_2|^2. \tag{1.1}$$

同理

$$|z_1-z_2|^2=(z_1+z_2)(z_1+z_2)^*=|z_1|^2-2\,\mathrm{Re}\,(z_1z_2^*)+|z_2|^2. \tag{1.2}$$

设 $z_1z_2^*=a+\mathrm{i}\,b$，则 $|z_1||z_2|=\sqrt{a^2+b^2}\geqslant|a|\geqslant a=\mathrm{Re}(z_1z_2^*)$，因此由 (1.1) 式可得

$$|z_1|^2-2|z_1||z_2|+|z_2|^2\leqslant|z_1+z_2|^2\leqslant|z_1|^2+2|z_1||z_2|+|z_2|^2,$$

即
$$(|z_1|-|z_2|)^2\leqslant|z_1+z_2|^2\leqslant(|z_1|+|z_2|)^2\ ,$$

开方后得

$$|z_1|-|z_2|\leqslant||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|.$$

同理，由 (1.2) 式可得

$$|z_1|-|z_2|\leqslant|z_1-z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|.$$

综合起来即有 $\quad |z_1|-|z_2|\leqslant|z_1\pm z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$.

讨论 这一结果很容易推广为

$$|z_1+z_2+z_3+\cdots+z_n|\leqslant|z_1|+|z_2|+|z_3|+\cdots+|z_n|.$$

(2) 首先因

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}\leqslant\sqrt{|x|^2+2\,|x|\,|y|+|y|^2}=|x|+|y|.$$

又因 $$(|x|-|y|)^2=|x|^2-2|x|\,|y|+|y|^2\geqslant 0$$

即 $$|x|^2+|y|^2\geqslant 2\,|x|\,|y|\,.$$

所以

$$2\,|z|^2=2(|x|^2+|y|^2)\geqslant|x|^2+|y|^2+2\,|x|\,|y|=(|x|+|y|)^2\,.$$

即 $$|z|\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\,(|x|+|y|)\,.$$

综上即得证

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,(|x|+|y|)\leqslant|z|\leqslant|x|+|y|.$$

例 1.3 求下列各式在复平面上表示什么区域:

(1) $\operatorname{Im}z+|z|\geqslant 2$ ； (2) $0\leqslant\arg\dfrac{z-1}{z+1}<\dfrac{\pi}{2}$.

解 (1) 设 $z=x+\mathrm{i}y$ ，区域的定义化为 $\sqrt{x^2+y^2}\geqslant 2-y$ ，区域的边界为

$$\sqrt{x^2+y^2}=2-y\,.$$

这表示 z 点到原点的距离与它到直线 $y=2$ 的距离相等. 显然这是一条以 $y=2$ 为准线的抛物线，其方程为

$$x^2=4-4\,y,\quad 或\quad y=1-\frac{1}{4}\,x^2\,.$$

区域 $\sqrt{x^2+y^2}\geqslant 2-y$ ，化简后为 $y\geqslant 1-\frac{1}{4}\,x^2$. 也就是说，该区域位于上述抛物线的上方，并包含了边界.

(2) 设 $z=x+\mathrm{i}\,y$. 根据复数运算规则，区域的定义可化为

$$0\leqslant\arg(z-1)-\arg(z+1)<\frac{\pi}{2}\,.$$

方法一：几何法.

在复平面上任取一点 z，则 $z-1$ 和 $z+1$ 的向量如图 1.2 所示. 分别令其辐角为

$$\arg(z-1)=\beta;\quad \arg(z+1)=\alpha.$$

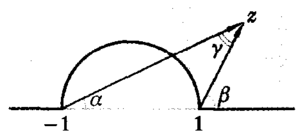

图　1.2

令两向量之间的夹角为 γ，由三角形内外角之间的关系可知

$$\arg(z-1)-\arg(z+1)=\beta-\alpha=\gamma,$$

根据题意有 $0\leqslant\gamma<\pi/2$. 因此, 区域的边界应是 $\gamma=0$ 和 $\gamma=\pi/2$.

$\gamma\geqslant 0$ 即 $\beta\geqslant\alpha$，这表示区域在 $y\geqslant 0$ 的上半平面;

$\gamma=\pi/2$ 表示 γ 是立于直径 $(-1$ 到 $+1)$ 上的圆周角, 因此 $\gamma<\pi/2$ 的区域应在单位圆 $x^2+y^2=1$ 之外, 即 $x^2+y^2>1$.

综合起来, 所定义的区域是由 $y\geqslant 0$ 与 $x^2+y^2>0$ 所限定的区域, 如图 1.2 所示.

讨论　用这一方法不难给出 $0\leqslant\arg\dfrac{z\mp 1}{z\pm 1}<\alpha$，当 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$, $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$, $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ 时所代表的区域.

方法二：代数法一.

将不等式 $0\leqslant\arg\dfrac{z-1}{z+1}=\arg(z-1)-\arg(z+1)=\beta-\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ 取正切, 有 $0\leqslant\tan(\beta-\alpha)<\infty$，即

$$0\leqslant\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan\beta}<\infty.$$

由图 1.2 知　$\tan\beta=\dfrac{y}{x-1}$，$\tan\alpha=\dfrac{y}{x+1}$，代入上式并化简后得

$$0\leqslant\frac{2y}{x^2+y^2-1}<\infty.$$

这表明分子与分母应有相同的符号, 因此得出两个解:

$$\begin{cases}y\geqslant 0,\\ x^2+y^2-1>0,\end{cases}\qquad 和 \qquad \begin{cases}y\leqslant 0,\\ x^2+y^2-1<0.\end{cases}$$

显然, 当 $y<0$ 时有 $\arg(z-1)-\arg(z+1)<0$，这与题设不符. 因此, 所求区域应满足

$$\begin{cases}y\geqslant 0,\\ x^2+y^2-1>0.\end{cases}$$

方法三：代数法二.

因 $\dfrac{z-1}{z+1}=\dfrac{x^2+y^2-1+\mathrm{i}\,2y}{(x+1)^2+y^2}$，所以有

$$0\leqslant \arg\frac{z-1}{z+1}=\arg\frac{x^2+y^2-1+\mathrm{i}\,2y}{(x+1)^2+y^2}<\frac{\pi}{2},$$

即

$$0\leqslant \arctan\frac{\dfrac{2y}{(x+1)^2+y^2}}{\dfrac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2}}=\arctan\frac{2y}{x^2+y^2-1}<\frac{\pi}{2}.$$

这表明复数 $\dfrac{x^2+y^2-1+\mathrm{i}\,2y}{(x+1)^2+y^2}$ 的辐角在第一象限．也就是说其实部和虚部都应是非负的，即有

$$\frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2}>0,\qquad \frac{2y}{(x+1)^2+y^2}\geqslant 0,$$

因分母 $(x+1)^2+y^2>0$，所以可得出

$$\begin{cases} y\geqslant 0,\\ x^2+y^2-1>0. \end{cases}$$

例 1.4 证明

(1) 棣莫弗公式 $(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta$；

(2) 代数方程的一个基本性质：若 $z=p+\mathrm{i}q$ 是实系数方程

$$a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0=0$$

的根，则其共轭复数 $z^*=p-\mathrm{i}q$ 也必为此方程的根.

证 (1) 由欧拉公式得知

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}.$$

再用欧拉公式得

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta.$$

即得证 $\qquad (\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta$.

(2) 因为 $z=p+\mathrm{i}q$ 是方程的根，因此有

$$a_n(p+\mathrm{i}q)^n+a_{n-1}(p+\mathrm{i}q)^{n-1}+\cdots+a_1(p+\mathrm{i}q)+a_0=0.$$

将上式取共轭，考虑到系数 $\{a_k\},(k=1,2,\cdots,n)$ 均为实数，所以有

$$a_n(p-\mathrm{i}\,q)^n+a_{n-1}(p-\mathrm{i}\,q)^{n-1}+\cdots+a_1(p-\mathrm{i}\,q)+a_0=0\,.$$

即得证 $z^*=p-\mathrm{i}\,q$ 也是方程的根.

例 1.5 求下列和式的有限表达式:

(1) $\sin\phi+\sin2\phi+\cdots+\sin n\phi$;

(2) $\cos\phi+\cos2\phi+\cdots+\cos n\phi$.

解 利用欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,\phi}=\cos k\phi+\mathrm{i}\sin k\phi$，得到

$$\begin{aligned}
&[\cos\phi+\cos2\phi+\cdots+\cos n\phi]+\mathrm{i}\,[\sin\phi+\sin2\phi+\cdots+\sin n\phi]\\
&\quad=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\,\phi}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi}+\cdots+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\,\phi}=\frac{\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\,\phi}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi}}\\
&\quad=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(n+1)\,\phi/2}\left(\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,n\,\phi/2}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\,\phi/2}\right)}{\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\phi/2}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi/2}}\\
&\quad=\frac{\sin n\,\phi/2}{\sin\phi/2}\left[\cos(n+1)\,\phi/2+\mathrm{i}\,\sin(n+1)\,\phi/2\right].
\end{aligned}$$

将实部和虚部分开，则得

$$\sin\phi+\sin2\phi+\cdots+\sin n\phi=\frac{\sin n\,\phi/2}{\sin\phi/2}\sin(n+1)\,\phi/2\,,$$

$$\cos\phi+\cos2\phi+\cdots+\cos n\phi=\frac{\sin n\,\phi/2}{\sin\phi/2}\cos(n+1)\,\phi/2\,.$$

例 1.6 求序列 $\left\{\dfrac{2n+5\,\mathrm{i}}{3n}\cos\dfrac{n\pi}{4}\right\},(n=1,2,3,\cdots)$ 的极限、聚点或上下极限.

解 序列的每个项中有两个因子 $\dfrac{2n+5\,\mathrm{i}}{3n}$ 和 $\cos\dfrac{n\pi}{4}$，当 $n\to\infty$ 时，第一个因子有极限 $2/3$，而第二个因子将会不断的重复取以下的值:

$$\cos\pi/4=\sqrt{2}/2;\qquad\cos2\pi/4=0;\qquad\cos3\pi/4=-\sqrt{2}/2;$$

$$\cos4\pi/4=-1;\qquad\cdots;\qquad\cos8\pi/4=1;\qquad\cdots.$$

可见该序列有 5 个聚点: $0,\ \pm\sqrt{2}/3,\ \pm2/3$.

只当聚点唯一时才有极限存在，因此此序列不存在极限.