成人高校辅导丛书

刘维翰 主编

张旭辉
吴增炽 编著

高等数学简明辅导

上册

广西人民出版社

成人高校辅导丛书

高等数学简明辅导

（上　册）

张旭辉　吴增炽　编

广西人民出版社

高等数学简明辅导
（上册）
刘维翰　主编
张旭辉　吴增炽　编著
☆
广西人民出版社出版
（南宁市河堤路14号）
广西新华书店发行　广西民族印刷厂印刷
*
开本 787×1092 1/32　11.5 印张　256 千字
1986年10月第 1 版　1986年10月第 1 次印刷
印　数：1—10,000 册
书号：7113·732　　定价：1.70 元

内 容 简 介

本书内容共分八章，包括预备知识、极限与连续、导数与微分、中值定理、导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用。每章均包括四个部分：主要内容简述，典型例题分析及解题方法指导，小结，自我检查题与自测题。内容简明完整，重点突出，例题典型、广泛，解题清楚明确。

本书是各类成人高校学员、自学者学习高等数学的辅导用书，亦可供普通高等工科院校、财经院校学生及辅导教师参考使用。

前　　言

本书按照中央广播电视大学编写的《高等数学讲义》（电大工科教材）及《微积分》（电大经济类各专业教材）内容，根据电大工科、经济类开设的“高等数学”“微积分”的教学大纲，结合我们多年来在电大及其它成人高校教学、辅导的体会，针对成人学习的特点而编写的。本书的特点是内容简明，重点突出，例题典型、广泛，解题方法、规律指导明确，复习资料完整。目的是为各类成人高校学员、自学者学习“高等数学”提供一本简明学习辅导书。

本书共八章，每章包括下述四个部分：

一、主要内容简述　归纳了一章的基本概念的定义、重要定理、常用的法则和公式。

二、典型例题分析及解题方法指导　例题包括了概念题、计算题、证明题和应用题，同时也选择了初学者在某些容易弄错的概念和解题过程中易犯错误的澄清题，还有较灵活的综合题。选题广泛、典型。不少例题作了解题前的分析及解题思路指导。解答通俗详尽，解后作了解题小结。

三、小结　这一部分扼要归纳了一章所学内容，明确该章的重点及教学大纲对该章的学习要求，提出学习该章内容的注意事项。

四、自我检查题与自测题　自我检查题着重检查对该章的基本概念，常见计算公式、法则的理解、掌握的程度；自测题除了检查对该章的基本知识的掌握程度外，还检查了分析与处理问题及综合应用知识的能力。

最后，书末附上了历届电大“高等数学”、“微积分”第一学期期考及补考试题(其中期考试题作了详尽的解答)。

本书编写过程中征求了部分电大学员和其它成人高校学员意见，参考了有关杂志、辅导书的资料，并得到一些教师的支持和帮助，在此特向有关人员表示衷心感谢。

由于水平有限，成书仓促，缺点和错误在所难免，欢迎读者指正。

编　者

1986.2.

目　　录

第一章　预备知识

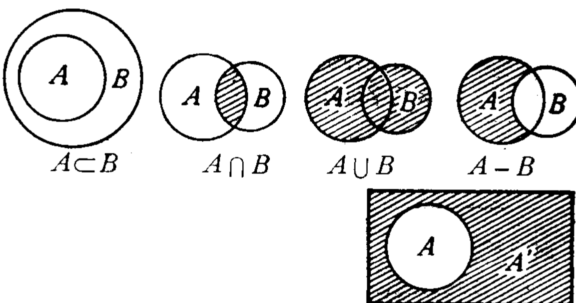
一、主要内容简述

（一）　集合与元素

1. 基本概念

概　念	意　　义
集　合	具有某种属性的全体，形成一个集合(集).集合可用大写字母A、B、C…等表示.
元　素	集合里的各个对象叫做集合里的元素.元素可用小写字母a、b、c…等表示.
属　于	(1) $a\in A$：表示a是集合A的元素，读作“a属于A”； (2) $a\bar{\in} A$：表示a不是集合A的元素，读作“a不属于A”.
子　集	(1) $A\subset B$：表示集合A的每一个元素都是集合B的元素，称A是B的子集，读作“A包含于B”或“B包含A”. (2)若$A\subset B$，又$B\subset A$，称集合A与集合B相等，记作$A=B$.
空　集	ϕ：表示不包含任何元素的集合.它满足：$\phi\subset A$ 注意：$\phi\neq\{0\}$
全　集	U：表示被研究的所有对象构成的集合.注意：全集是相对的。
数　集	N：表示自然数集；Z：表示整数集； Q：表示有理数集；　R：表示实数集.

2．集合的表示法

名称	方法
列举法	把集合中的元素不重、不漏、不计次序列出，放在集合符号“{　}”里，例如：{1,2,3,4}
构造式法（述法描）	在集合符号内，先写出该集合元素的代表符号，在隔开号“|”右边用数学语言描述出该集合中元素的特征。例如：$\{x\mid x>0且x\neq 1\}$；$\{\alpha\mid\alpha=\frac{\pi}{3}+2k\pi或\alpha=\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in z\}$
图示法（韦恩图）	在同一平面内，用一条封闭曲线所围成的图形表示集合。$A\subset B$　$A\cap B$　$A\cup B$　$A-B$

3．集合的运算：交、并、差、补

概念	意义	
交集	由同时属于A和B的一切元素所组成的集合叫做A与B的交集，记为$A\cap B$.即 $A\cap B=\{x\mid x\in A 且 x\in B\}$	$A\cap A=A$ $A\cap\phi=\phi$
并集	由属于A或属于B的一切元素所组成的集合叫做A与B的并集，记为$A\cup B$.即 $A\cup B=\{x\mid x\in A或x\in B\}$	$A\cup A=A$ $A\cup\phi=A$

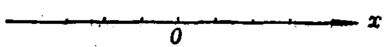
差　集	由属于A而不属于B的所有元素构成的集合称为A与B的差，记为$A-B$.即 $A-B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\overline{\in}B\}$	
补　集	若U为全集，由U中所有不属于A的元素所组成的集合叫做A的补集，记为A'.即 $A'=\{x\mid x\in U$ 且 $x\overline{\in}A\}$	$A\cup A'=U$ $A\cap A'=\phi$

（二）　实数、区间和绝对值

1．实数

数是数学中一个重要的研究对象，在实数范围内，数可归类为：

- 实数
  - 有理数
    - 整数
      - 正整数（自然数）
      - 零
      - 负整数
    - 分数（有限小数和无限循环小数）
      - 正分数
      - 负分数
  - 无理数（无限不循环小数，如：$\sqrt{2}$，π，e，ln3，sin15°等）
    - 正无理数
    - 负无理数

实数轴 

是具有方向、原点和单位长度的有向直线。实数与其数轴上的点是一一对应的，点a和实数a意义相同，无需加以区别。

2．区间

是用来表示某个实数范围的特殊的数集。

开区间(a,b)：表示$a<x<b$的一切实数x；

闭区间$[a,b]$：表示$a\leqslant x\leqslant b$的一切实数x；

半开区间$[a,b)$或$(a,b]$：表示$a\leqslant x<b$或$a<x\leqslant b$的一切实数x；

无穷区间$(-\infty,+\infty)$：表示全体实数，可写为$-\infty<x<+\infty$；$(a,+\infty)$：表示大于a的一切实数，可写为$a<x<+\infty$；

同样可规定$(-\infty,a)$，$[a,+\infty)$，$(-\infty,a]$等记号的意义。

点x_0的ε邻域常以开区间$(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$表示。

3．绝对值

（1）定义 $|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$

它表示x到原点o的距离．由定义知，任何一个实数x的绝对值非负．

（2）绝对值的运算

①$\sqrt{x^2}=|x|$

②$|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$

③$\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$ （$y\neq 0$）

④ $-|x|\leqslant x\leqslant|x|$

（3）绝对值不等式

① $|x|<\varepsilon\Longleftrightarrow-\varepsilon<x<\varepsilon$ （$\varepsilon>0$）

$|x|>\varepsilon\Longleftrightarrow x<-\varepsilon$或$x>\varepsilon$ （$\varepsilon>0$）

② $|x|-|y|\leqslant|x\pm y|\leqslant|x|+|y|$

（4）解含绝对值的方程或不等式时，常用分段讨论法，以便去绝对值符号时不出现错误．

（三） 充分必要条件

若$A \Rightarrow B$，则称A是B的充分条件；反过来，若$B \Rightarrow A$，则称A是B的必要条件。

若$A \Longleftrightarrow B$，则称A是B的充分且必要条件。简称A是B的充要条件（显然B也是A的充要条件）。

（四） 函数概念

1. 常量和变量

在某一过程中，保持一定数值的量叫做常量，可以取不同数值的量叫做变量。注意常量与变量的相对性。

2. 函数定义

设在某一过程中，有两个变量x与y，x的变域是D，如果按照一定的规律，对于x在变域D中的每一个数值，都有唯一确定的y值与之对应，我们就称y是x的一个（单值）函数，记作$y=f(x)$。并称x为自变量，y为函数或因变量，变域D为函数的定义域。

为正确掌握函数定义，应注意以下几点：

（1）$f(x)$是函数的一个记号，字母f表示自变量x与因变量的对应关系。

（2）函数的三因素是指：定义域、对应关系、值域。只有三者都相同时，才叫两个函数相同。

（3）不要将函数符号$f(x)$与函数的解析式相混淆，因为函数$y=f(x)$可以是解析式也可以是表格或图象。

（五） 函数定义域的常见求法

1. 应用问题或几何问题函数定义域应由其实际意义或

几何意义来确定。

2. 函数定义域应使其解析式有意义：

（1）偶次根号内的值应当非负；

（2）对数的真数应为正，底应大于零且不等于1；

（3）分式函数的分母不等于零；

（4）三角函数及反三角函数有其特殊限定。

3. 有限个基本初等函数经过四则运算组成的函数的定义域，是各基本初等函数定义域的交集，并应使新出现的分母不能为零。

4. 函数 $y=f(x)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域是 $y=f(x)$ 的值域。

5. 奇、偶函数定义域是x轴上关于坐标原点为中心的对称区间（原点可能在也可能不在内）。

6. 分段函数的定义域应是各个对应区间的并集。

7. 复合函数$y=f[\varphi(x)]$的定义域应使$u=\varphi(x)$的值域不超过$y=f(u)$的定义域。

（六） 反函数

在函数 $y=f(x)$ 中，若把y看成自变量，x看成y的函数，则由关系式$y=f(x)$确定的函数$x=g(y)$（或记作$x=f^{-1}(y)$）叫做函数$y=f(x)$的反函数。通常的习惯用x作自变量，故$y=f(x)$的反函数记为 $y=g(x)$（或$y=f^{-1}(x)$）。

注意：互为反函数的两个函数$y=f(x)$与$y=f^{-1}(x)$，其对应关系互逆；定义域、值域互换；图象关于直线 $y=x$ 对称。

（七） 显函数与隐函数

对于反映函数与自变量关系的表达式，若已解出因变量

为自变量的解析表达式，称为显函数；若未能解出因变量而只能由方程$F(x,y)=0$表示x、y之间的关系，这种关系叫隐函数。

例如：函数$y=\sqrt{4-x^2}$是显函数；而$x^2+y^2=4$是隐函数。

（八） 初等函数

1. 基本初等函数

基本初等函数包括：幂函数$y=x^a$（a为常数）、指数函数$y=a^x(a>0, a\neq1)$、对数函数$y=\log_a x(a>0, a\neq1)$、三角函数和反三角函数。

2. 复合函数

若y是u的函数：$y=f(u)$，而u又是x的函数：$u=\varphi(x)$，且$u=\varphi(x)$的值域是$y=f(u)$的定义域的子集，则称y是x的复合函数，记作$y=f[\varphi(x)]$，u称为中间变量。

3. 初等函数

能用一个解析式表示，而且这个解析式是由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算及有限次的复合所构成的函数，称为初等函数．微积分主要研究初等函数。

例如$y=\ln\sqrt{x^2-1}$、$y=e^{-x}\cdot\arccos\frac{1}{x}$均是初等函数；

而分段函数$y=\begin{cases}-x & x<0\\ x^2 & x\geq0\end{cases}$和含绝对值符号的函数$y=|\sin x|$均是非初等函数。

（九） 函数的性质

1．函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 定义在对称区间$(-l,l)$上，若 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数。

偶（奇）函数图形对称于y轴（坐标原点）。

2．函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间(a,b)内有定义，若对(a,b)内任意两点 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$，都有

$$f(x_1)<f(x_2)\qquad (\text{或}f(x_1)>f(x_2))$$

则称 $f(x)$ 为在(a,b)内的单调增（减）函数。区间(a,b)称为单调增（减）区间。

3．函数的有界性

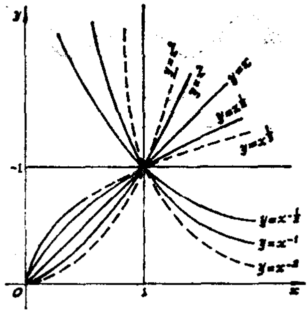
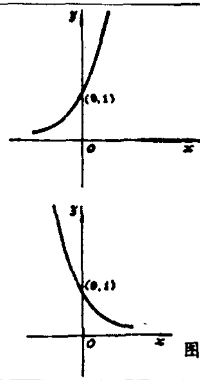
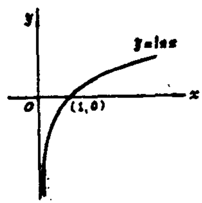
设 I 为某一区间，函数 $f(x)$ 在该区间内有定义，若存在一正数M，使得x取 I 内任一值时，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内有界，否则称 $f(x)$ 在 I 内无界。

例如：函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内有界；函数 $y=\ln x$ 在$(0,1)$内无界，但在区间$[1,e)$内有界。故函数是否有界，不仅与函数有关，而且与区间有关。

4．函数的周期性

设函数 $y=f(x)$，若存在着正数T，对于定义域中的任何x，都有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是以T（T是满足这种关系的最小正数）为周期的周期函数。

基本初等函数图形、简单性质列表如下：

名称	表达式	图形	简单性质
幂函数	$y=x^{a}$	 图1.1	$0<x<+\infty$ 过(1,1)点
指数函数	$y=e^{x}$ $y=e^{-x}$	 图1.2	$-\infty<x<+\infty$ 过(0,1)点，e^{x}随x增大而急速趋向$+\infty$，e^{-x}随x增大而急速衰减到0
对数函数	$y=\ln x$	 图1.3	$0<x<+\infty$ 过(1,0)点，$\ln x$随x增大而缓慢地趋向$+\infty$