漢譯

龍氏平面三角法

上海新亞書店出版

龍氏平面三角法

Loney: Plane Trigonometry

章彬　譯述

新亞書店出版

龍氏平面三角法　內容提要

本書講述初等平面三角法，從銳角的三角比值開始，依次講到任意角、和差角、倍角、分角的三角函數、三角恆等式、三角方程式等，並及三角法在量度高與距離上的應用。(間有涉及數量的近代理論的處所敍述均力求簡易。)

龍 氏 平 面 三 角 法

章　彬　譯述

吳 靜 山　校訂

新　亞　書　店　出　版

上海市書刊出版業營業許可證出零叁零號

上 海 河 南 中 路 159 號

上海圖書發行公司　總經售

上 海 山 東 路 128 號

華 成 印 刷 所 印 刷

上 海 泰 興 路 523 弄 14 號

1942年4月第一版——第一次印刷

1954年11月第一版——第八次印刷

印數: 20001—21000本　開本: 762×1067 1/29

印張: 11 1/29　　字數: 254千字

本册定價人民幣 8,300 元

原　　　序

著者頗望本書得為初等平面三角法之完善課本,適合一般學校採用.書內較高部分,間有涉及複雜數量之近代理論者,著者於敍述時,靡不力求簡易,俾學者於開始學習較深之一章時,絕不感覺困難.

三角法含有甚多之公式,以及此等公式之應用,故於編首附一重要公式表,學者應熟記之.此等公式之尤較重要者,課文內概以粗體黑字印刷,可以一望而知.其他之僅以普通字體印刷者,多為輔助性質或重要性較少者.

習題之題數極多,初學三角法者得選習之.

又節數前之附有星號者,初學可略.

下略.　　　　　　　　　　　　　　　　S. L. Loney.

再版序言

本書於再版時業經詳慎校訂,不論課文或答案中,當不至有嚴重之謬誤.

對數及對數表等數章,已加以相當之改編,編末並增射影一章.

五版序言

本版係重新排印;課文內新增材料不少,而於書末之附表中並加入弧度量法一表.

主要三角公式

I. 圓周$=2\pi r$. (§ 12)

$\pi=3.14159\cdots\cdots\left[約為\frac{22}{7}及\frac{355}{113}\right]$. (§ 13)

一弳$=57°17'44.8''$ (約). (§ 16)

二直角$=180°=200^g=\pi$弳. (§ 19)

角$=\frac{弧}{半徑}\times$弳. (§ 21)

II. $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$;

$\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$;

$\operatorname{cosec}^2\theta=1+\cot^2\theta$. (§ 27)

III. $\sin 0°=0$; $\cos 0°=1$. (§ 36)

$\sin 30°=\frac{1}{2}$; $\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$. (§ 34)

$\sin 45°=\cos 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}$. (§ 33)

$\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 60°=\frac{1}{2}$. (§ 35)

$\sin 90°=1$; $\cos 90°=0$. (§ 37)

$\sin 15°=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$; $\cos 15°=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$. (§ 106)

$\sin 18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$; $\cos 36°=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$. (§§ 120, 121)

IV. $\sin(-\theta)=-\sin\theta$; $\cos(-\theta)=\cos\theta$. (§ 68)

$\sin(90°-\theta)=\cos\theta$; $\cos(90°-\theta)=\sin\theta$. (§ 69)

$\sin(90^\circ+\theta)=\cos\theta$; $\cos(90^\circ+\theta)=-\sin\theta$. (§ 70)

$\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$; $\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$. (§ 72)

$\sin(180^\circ+\theta)=-\sin\theta$; $\cos(180^\circ+\theta)=-\cos\theta$. (§ 73)

V. 若 $\sin\theta=\sin\alpha$, 則 $\theta=n\pi+(-1)^n\alpha$ (§ 82)

若 $\cos\theta=\cos\alpha$, 則 $\theta=2n\pi\pm\alpha$. (§ 83)

若 $\tan\theta=\tan\alpha$, 則 $\theta=n\pi+\alpha$. (§ 84)

VI. $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$.

$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$. (§ 88)

$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$.

$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$. (§ 90)

$$\sin C+\sin D=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}.$$

$$\sin C-\sin D=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}.$$

$$\cos C+\cos D=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}.$$

$$\cos C-\cos D=2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}. \qquad (§ 94)$$

$2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$.

$2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)$.

$2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$.

$2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$. (§ 97)

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}.$$

$$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}. \qquad (§ 98)$$

$\sin 2A=2\sin A\cos A$.

$\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A=1-2\sin^2 A=2\cos^2 A-1$. (§ 105)

$$\sin 2A=\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}; \quad \cos 2A=\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}. \qquad (§ 109)$$

$$\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}. \qquad (\S\ 105)$$

$$\sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A.$$

$$\cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A.$$

$$\tan 3A=\frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}. \qquad (\S\ 107)$$

$$\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}};\quad \cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}. \qquad (\S\ 110)$$

$$2\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}\pm\sqrt{1-\sin A}.$$

$$2\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}\mp\sqrt{1-\sin A}. \qquad (\S\ 113)$$

$$\tan(A_1+A_2+\cdots\cdots+A_n)=\frac{s_1-s_3+s_5-\cdots\cdots}{1-s_2+s_4-\cdots\cdots}. \qquad (\S\ 125)$$

VII.

$$\log_a(mn)=\log_a m+\log_a n.$$

$$\log_a\left(\frac{m}{n}\right)=\log_a m-\log_a n.$$

$$\log_a m^n=n\log_a m. \qquad (\S\ 136)$$

$$\log_a m=\log_b m\times\log_a b. \qquad (\S\ 147)$$

VIII.

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}. \qquad (\S\ 163)$$

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}. \qquad (\S\ 164)$$

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\cdots\cdots \qquad (\S\ 165)$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},\cdots\cdots \qquad (\S\ 166)$$

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},\cdots\cdots \qquad (\S\ 167)$$

$$\sin A=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},\cdots\cdots \qquad (\S\ 169)$$

$$a = b\cos C + c\cos B, \cdots\cdots \qquad (\S\ 170)$$

$$\tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}, \cdots\cdots \qquad (\S\ 171)$$

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C \qquad (\S\ 198)$$

IX. $$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C} = \frac{abc}{4S}. \qquad (\S\S\ 200, 201)$$

$$r = \frac{S}{s} = (s-a)\tan\frac{A}{2} = \cdots\cdots = \cdots\cdots \qquad (\S\S\ 202, 203)$$

$$r_1 = \frac{S}{s-a} = s\tan\frac{A}{2}. \qquad (\S\S\ 205, 206)$$

圓之內接四邊形之面積 $= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$. (§ 219)

X. 當 θ 極小時, $\dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1.$ (§ 228)

半徑 r 之圓面積 $= \pi r^2$. (§ 233)

XI. $\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) + \cdots\cdots$ 至 n 項

$$= \frac{\sin\left\{\alpha + \frac{n-1}{2}\beta\right\}\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}. \qquad (\S\ 241)$$

$\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) + \cdots\cdots$ 至 n 項

$$= \frac{\cos\left\{\alpha + \frac{n-1}{2}\beta\right\}\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}. \qquad (\S\ 242)$$

目　次

龍　氏

平面三角法

第一章

角之量度;六十分法,百分法,及弧度法

1. 在幾何學中以直角爲量角之單位,惟其量過大不便使用.

2. **六十分法**者,分一直角爲 90 等分曰**度**,分一度爲 60 等分曰**分**,復分一分爲 60 等分曰**秒**.度,分,秒以 $1^\circ, 1', 1''$ 記之.

於是　60 秒 $(60'')$ 爲 1 分 $(1')$,

60 分 $(60')$ 爲 1 度 (1°),

90 度 (90°) 爲 1 直角.

六十進與九十進雖不便於計算,但此法沿用已久,故三角法中仍採用之.

3. 因此另有**百分法**,或稱法國法者.其法分一直角爲 100 等分曰**百分度**,分一百分度爲 100 等分曰**分**,復分一分爲 100 等分曰**秒**.百分度,分,秒以 $1^g, 1^`, 1^{``}$ 記之.

於是　100 秒 (100``) 爲 1 分 (1`),

100 分 (100`) 爲 1 百分度 (1^g),

100 百分度 (100^g) 爲 1 直角.

4. 此法雖較六十分法便於計算,但於應用時,一切函數表及函數對數表必須重行推算.以此尙未能施諸實用.

5. 六十分法與百分法之換算.

因一直角等於 90° 又等於 100^g,

故
$$90^\circ=100^g.$$

$$\therefore\quad 1^\circ=\frac{10^g}{9},\ \text{又}\ 1^g=\frac{9^\circ}{10}.$$

因此,化度爲百分度,加九分之一,化百分度爲度,減十分之一.

例.
$$36^\circ=(36+\tfrac{1}{9}\times 36)^g=40^g,$$

又
$$64^g=(64-\frac{1}{10}\times 64)^\circ=(64-6.4)^\circ=57.6^\circ.$$

角之含有分與秒者;應先化爲度之小數,然後化爲百分度.實則計算時以先化爲直角之小數爲尤便.玆特示兩例於下:

例 1. 化 $63^\circ14'51''$ 爲百分度單位.

$$51''=\frac{17'}{20}=.85',$$

又
$$14'51''=14.85'=\frac{14.85^\circ}{60}=.2475^\circ,$$

$$\therefore\quad 63^\circ14'51''=63.2475^\circ=\frac{63.2475}{90}\ \text{直角}$$

$$=.70275\ \text{直角}$$

$$=70.275^g=70^g27.5`=70^g27`50``.$$

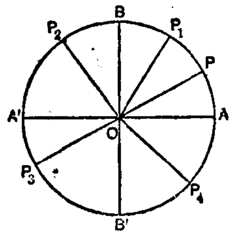
例 2. 化 $94^g23`87``$ 爲六十分度單位.

$$
\begin{array}{rl}
94^{g}23^{\backprime}87^{\backprime\backprime}=.942387 & \text{直角} \\
90 & \\
\hline
84.81483 & \text{度} \\
60 & \\
\hline
48.8898 & \text{分} \\
60 & \\
\hline
53.3880 & \text{秒}
\end{array}
$$

$\therefore\ 94^{g}23^{\backprime}87^{\backprime\backprime}=84^{\circ}48'53.388''.$

6. 任意角

設 AOA' 及 BOB' 兩直線正交於 O,又設一直線 OP 由 OA 開始依反時針方向繞定點 O 而轉動.此轉動之線(或稱動徑)轉至 OA 與 OB 之間如 OP_1,則得小於一直角之角 AOP_1.



此線繼續轉動至 OP_2 在 OB 與 OA' 之間,則得角 AOP_2 大於一直角.

OP_3 爲 OA' 與 OB' 間之任一位置,線轉至此,則得角 AOP_3,即 $AOB+BOA'+A'OP_3$,亦即 2 直角 $+A'OP_3$,故所得之角大於二直角.

若轉至 OB' 與 OA 間之任一位置 OP_4,則此角大於三直角.

此線轉動一周復與 OA 相合,則已轉四直角.

倘 OP 繼續轉動第二次至 OP_1,則所得之角非復 AOP_1 而爲 4 直角 $+AOP_1$.

同理,此線已轉二周,復至 OP_2,則所得之角爲 8 直角 $+AOP_2$.

7. 設 OP 轉至 OA 與 OB 之間,謂爲在第一象限;至 OB 與 OA' 間,則在第二象限;至 OA' 與 OB' 間,則在第三象限;至 OB' 與 OA 之間,則在第四象限.

8. 例　一線已轉過 (1) 225°, (2) 480°, (3) 1050°;問此線之位置應在何處?

(1) 因 $225° = 180° + 45°$, 此線已轉過二直角又 $45°$, 應在第三象限,且平分 OA' 與 OB' 所成之角.

(2) 因 $480° = 360° + 120°$, 此線已轉一周又 $120°$, 故在第二象限, 卽 OB 與 OA' 之間,而與 OB 成 $30°$ 之角.

(3) 因 $1050° = 11 \times 90° + 60°$, 此線已轉過十一直角又 $60°$, 故在第四象限, 卽 OB' 與 OA 之間,而與 OB' 成 $60°$ 之角.

習 題 一

下列諸角,用直角表之:

1. $60°$.　　2. $75°15'$.　　3. $63°17'25''$.

4. $130°30'$.　　5. $210°30'30''$.　　6. $370°20'48''$.

下列諸角,用百分度之諸單位表之:

7. $30°$.　　8. $81°$.　　9. $138°30'$.

10. $35°47'15''$.　　11. $235°12'36''$.　　12. $475°13'48''$.

下列諸角,用直角及六十分度之諸單位表之:

13. 120^g.　　14. $45^g35^{`}24^{``}$.　　15. $39^g45^{`}36^{``}$.

16. $255^g8^{`}9^{``}$.　　17. $759^g0^{`}5^{``}$.

下列諸角,求其動徑之位置:

18. $\frac{4}{7}$ 直角.　　19. $3\frac{1}{2}$ 直角.　　20. $13\frac{1}{8}$ 直角.

21. $120°$.　　22. $315°$.　　23. $745°$.　　24. $1185°$.

25. 150^g.　　26. 420^g.　　27. 875^g.

28. 問時間經過 $11\frac{1}{5}$ 分鐘,則時鐘之分針與時針各轉過幾度,分,秒?

29. 直角三角形之一銳角,所含六十分度之度數等於他一銳角所含百分度之度數;此兩角試各以六十分度表之:

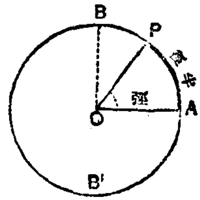
30. 求證任何角所含六十分度之分數與百分度之分數相比爲 $27 : 50$.

31. 分 $44°8'$ 爲兩分,其一分所含六十分度之秒數等於他一分所含百分度之秒數.

弧 度 法

9. 弧度法爲第三種量角法,高等數學中皆採用之.其單位之求法如下:

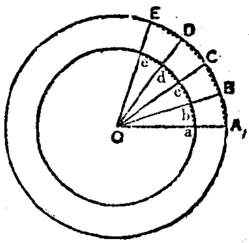
取任意圓 $APBB'$，其圓心爲 O，於圓周上截取弧 AP 與半徑等長．連接 OA 與 OP．則角 AOP 爲量角之單位．此單位名曰一弳，或曰弧度，以 1^c 記之．



10. 凡單位必須爲定量，則弧度亦應爲定量之角，茲證明於下：

11. 定理　任一圓之圓周與其直徑之比爲常數．

取任意兩同心圓其圓心爲 O．作大圓之內接 n 邊正多邊形 $ABCD\cdots\cdots$



設 $OA, OB, OC, \cdots\cdots$ 交小圓於 $a, b, c, d, \cdots\cdots$；連接 $ab, bc, cd, \cdots\cdots$

依幾何學定理，$abcd\cdots\cdots$ 爲小圓之內接 n 邊正多邊形．

因 $Oa=Ob$，又 $OA=OB$，則 ab 與 AB 平行，

於是 $$\frac{AB}{ab}=\frac{OA}{Oa}.$$

次因外多邊形 $ABCD\cdots\cdots$ 爲正多邊形，其周界爲各等邊之和，等於 $n\cdot AB$．

同理內多邊形之周界爲 $n\cdot ab$．因此

$$\frac{\text{外多邊形之周界}}{\text{內多邊形之周界}}=\frac{n\cdot AB}{n\cdot ab}=\frac{AB}{ab}=\frac{OA}{Oa} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

此式不論多邊形之邊數爲任何值時均能成立．

設多邊形之邊數無限增加（即 n 增至無窮大），則外多邊形之周界將等於外圓之圓周，而內多邊形之周界將等於內圓之圓周．

由是式(1)變爲

$$\frac{\text{外圓圓周}}{\text{內圓圓周}}=\frac{OA}{Oa}=\frac{\text{外圓半徑}}{\text{內圓半徑}}.$$

即
$$\frac{\text{外圓圓周}}{\text{外圓半徑}}=\frac{\text{內圓圓周}}{\text{內圓半徑}}.$$

因兩圓之大小不受任何之限制,故

$$\frac{\text{任何圓之圓周}}{\text{同圓之半徑}}$$

在一切圓內均相等.

於是,圓周與半徑之比,或圓周與直徑之比,爲一定量.

12. 由上節之結果,知圓周與直徑之比爲一定量.此定量稱爲圓周率,以希臘字母 π 表之,故 π 爲一數.

故
$$\frac{\text{圓周}}{\text{直徑}}=\text{常數}\,\pi.$$

因得定理如下;圓周等於其直徑之 π 倍或半徑之 2π 倍.

13. 惜 π 之值非整數,亦非一普通之分數,故不能以有限小數或循環小數表之.π 爲一不可度量之數,其量不能以兩整數之比表出者.

其值,若準確至小數點下八位,則爲

$$3.14159265\cdots\cdots$$

分數 $\frac{22}{7}$ 有時亦用以表 π 之值,惟準確至小數點下二位,因 $\frac{22}{7}=3.14285\cdots\cdots$

若以 $\frac{355}{113}$ 表示 π,則所得之值較爲準確,以其準確至小數點下6位也;$\frac{355}{113}=3.14159203\cdots\cdots$

[附註　爲便利記憶此分數$\frac{355}{113}$起見,可將最初之連續三奇數重複寫出,爲113355;等分爲兩節,而以左節除右節,如113)355(卽得.]

總之.　π之近似值,如準確至小數點下二位則爲$\frac{22}{7}$,較精密之値則爲3.14159……

應用除法,得

$$\frac{1}{\pi}=.3183098862\ldots\ldots$$

14.　例 1.　自行車輪之直徑爲28吋;輪轉一次,則軸行幾何?

半徑r爲14吋.

故圓周$=2\cdot\pi\cdot14=28\pi$吋.

若取$\pi=\frac{22}{7}$,則圓周$=28\times\frac{22}{7}$吋$=7$呎4吋(約).

若取較精密之值　$\pi=3.14159265\ldots\ldots$,　則圓周　$=28\times3.14159265\ldots\ldots\ldots\ldots$吋$=7$呎$3.96459\ldots\ldots$吋.

例 2.　設運動場之跑道爲圓形一運動員跑五周卽得一哩,求此圓形之半徑.

圓周爲$\frac{1}{5}\times1760$,卽352碼.

設r爲跑道之半徑,則$2\pi r=352$,

卽
$$r=\frac{176}{\pi}\text{碼}.$$

若取$\pi=\frac{22}{7}$,則得$r=\frac{176\times7}{22}=56$碼.

若取較精密之值$\frac{1}{\pi}=.31831$,則得

$$r=176\times.31831=56.02256\text{碼}.$$

習　題　二

1.　若地球之半徑爲4000哩,則其周長幾何?

2.　客車車輪直徑3呎,每秒鐘轉3次,則客車之速度如何?

3.　風車翼長18呎,每分鐘轉10次,問翼尖每時行程幾何?

4.　有圓形之銅幣直徑1吋;一線繞此幣邊緣適無餘,求線長.

5.　地球繞日而行,設軌道爲一半徑92500000哩之圓,問地球每年行程幾哩?

6. 客車車輪之半徑爲1呎9吋,於$\frac{1}{5}$秒鐘內轉過80°之中心角;問輪綠上之一點每時行路幾哩?

15. 定理　弳爲一定量之角.

取第9節之圖.設弧AB之長爲一象限,即圓周之四分之一.則AB之長爲$\frac{\pi r}{2}$.

依幾何學定理,兩圓心角之比如其所對弧之比.

故
$$\frac{\angle AOP}{\angle AOB}=\frac{\widehat{AP}}{\widehat{AB}}=\frac{r}{\frac{\pi r}{2}}=\frac{2}{\pi},$$

$$\therefore\quad \angle AOP=\frac{2}{\pi}\angle AOB.$$

茲命角AOP爲一弳.

則一弳 $=\frac{2}{\pi}\cdot\angle AOB$

$=\frac{2}{\pi}$直角.

今直角爲一定量之角,π復爲一常數,故弳爲一定量之角,在任何圓內均相等.

16. 弳之值

由上節,知1弳 $=\frac{2}{\pi}\times 1$直角 $=\frac{180^\circ}{\pi}$

$=180^\circ\times.3183098862\cdots\cdots=57.2957795^\circ$

$=57^\circ17'44.8''$(約).

17. 因 1弳 $=\frac{2}{\pi}$直角,

故　1直角 $=\frac{\pi}{2}$弳,

因此　$180^\circ=2$直角 $=\pi$弳,

$360^\circ=4$直角 $=2\pi$弳.