经济数学题库

# 线性代数

## 习题集

胡显佑 编著

$$\begin{bmatrix} \alpha_1\alpha_1^T & \alpha_1\alpha_2^T & \cdots & \alpha_1\alpha_n^T \\ \alpha_2\alpha_1^T & \alpha_2\alpha_2^T & \cdots & \alpha_2\alpha_n^T \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n\alpha_1^T & \alpha_n\alpha_2^T & \cdots & \alpha_n\alpha_n^T \end{bmatrix}$$



中国人民大学出版社

经济数学题库

# 线性代数习题集

胡显佑 编著

中国人民大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

线性代数习题集/胡显佑编著
北京:中国人民大学出版社,2004
(经济数学题库)

ISBN 7-300-05446-3/O·57
Ⅰ.线…
Ⅱ.胡…
Ⅲ.线性代数-高等学校-习题
Ⅳ.O151.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 027674 号

经济数学题库
**线性代数习题集**
胡显佑 编著

| | | | |
|---|---|---|---|
| **出版发行** | 中国人民大学出版社 | | |
| **社　　址** | 北京中关村大街 31 号 | **邮政编码** | 100080 |
| **电　　话** | 010-62511242(总编室) 010-62511239(出版部) | | |
| | 010-82501766(邮购部) 010-62514148(门市部) | | |
| **网　　址** | http://www.crup.com.cn | | |
| | http://www.1kao.net (中国 1 考网) | | |
| **经　　销** | 新华书店 | | |
| **印　　刷** | 北京鑫鑫印务有限公司 | | |
| **开　　本** | 787×1092 毫米 1/16 | **版　　次** | 2004 年 5 月第 1 版 |
| **印　　张** | 18 | **印　　次** | 2004 年 5 月第 1 次印刷 |
| **字　　数** | 409 000 | **定　　价** | 25.00 元 |

# 编写说明

为适应广大读者尤其是财金、经济和管理专业的学生学习高等数学的需要，我们选编了经济数学题库。全套书共分三册：微积分习题集、线性代数习题集和概率论与数理统计习题集。

各册习题集的编写主要参考了目前财经、管理等专业数学教学的大纲，同时也兼顾各类招生考试对大学数学的要求。编者根据多年的教学经验，精心选题，力求帮助读者加深对经济数学相关的基本概念、基本定理和基本运算的理解，同时对这些知识点的外延、扩展和综合有一定的了解，并得到必要的训练。

此外，各册习题集还力求反映近几年来经济数学教学改革的变化和发展，在题型结构上适当增加了选择题和填空题的比重，并选编了一定数量的经济应用题型，以弥补目前经济数学教材在这方面的欠缺和不足。为了使读者增强分析问题、解决问题的能力，书中还选有适当比例的具有一定难度的习题，这部分习题更具有抽象性、综合性、灵活性，但尽量避免了偏题以及技巧性过强或计算过于繁杂的题型，通过对这部分习题的练习将有助于读者开拓思路，扩大视野。

考虑到读者自学过程中咨询环境的欠缺，各册习题集对所有习题均附有参考解答，以便对照查询。同时，我们还将在中国 1 考网（www.1kao.net）上定期给读者答疑。衷心感谢中国人民大学出版社的同志为出版这套丛书所付出的努力。欢迎广大读者提出批评和建议。

**编 者**

2004.4

# 目　　录

# 第一章　行列式

## 一、基本要求

1. 了解行列式的概念.

2. 掌握行列式的性质.

3. 会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.

4. 了解拉普拉斯定理及其应用.

## 二、内容简介

1. **排列和逆序**　由自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组$(i_1,i_2,\cdots,i_n)$称为一个 $n$ 级排列. $n$ 级排列共有 $n!$ 个.

在一个排列$(i_1,i_2,\cdots,i_n)$中,若 $i_t>i_s$,则称数 $i_t,i_s$ 组成一逆序.一个 $n$ 级排列$(i_1,i_2,\cdots,i_n)$中逆序的总数称为该排列的逆序数.记为 $\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)$

2. **奇排列和偶排列**　一个 $n$ 级排列的逆序数为奇数时,称该排列为奇排列,逆序数为偶数时,称该排列为偶排列.

3. **对换**　在一个 $n$ 级排列$(i_1,i_2,\cdots,i_n)$中,交换两个数 $i_t$ 和 $i_s$ 的位置,称为一次对换,一次对换改变排列的奇偶性.

4. **$n$ 阶行列式的定义**　$n$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdot\cdots\cdot a_{nj_n}.$$

其中 $\sum\limits_{(j_1j_2\cdots j_n)}$ 表示对所有的 $n$ 级排列求和.故 $n$ 阶行列式等于取自不同行、不同列的 $n$ 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdot\cdots\cdot a_{nj_n}$ 的代数和,每一项的符号取决于组成该项的 $n$ 个元素列下标(行下标按自然顺序排列时)的逆序数,即当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列时,取正号;当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列时取负号. $n$ 阶行列式简记为 $D_n=|a_{ij}|$.

5. **行列式的性质**

(1)行列式的行列互换,行列式的值不变.

(2)互换行列式的两行(列),行列式的值反号.

(3)行列式某一行(列)的所有元素都乘以数 $k$,等于 $k$ 乘此行列式.

**推论 1**　行列式一行(列)所有元素的公因子可以提到行列式的外面.

**推论 2** 如果行列式中有一行(列)的元素全为零,则此行列式的值为零.

**推论 3** 如果行列式中有两行(列)的对应元素成比例,则此行列式的值为零.

(4)如果行列式中某一行(列)的所有元素都是两个元素之和,则此行列式等于两个行列式的和.这两个行列式的这一行(列)的元素分别为对应的两个相加元素之一,其余各行(列)的元素与原行列式相同.

(5)把行列式的某一行(列)的所有元素乘以数 $k$ 加到另一行(列)的相应元素上,行列式的值不变.

6. **行列式按行(列)展开**

(1)**余子式和代数余子式** 对于 $n$ 阶行列式 $D_n=|a_{ij}|$,划去第 $i$ 行、第 $j$ 列,即划去元素 $a_{ij}$ 所在的行和列的所有元素,其余元素按原来的顺序所构成的 $(n-1)$ 阶行列式 $M_{ij}$ 称为元素 $a_{ij}$ 的余子式;称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 $a_{ij}$ 的代数余子式.

(2)**定理** $n$ 阶行列式 $D_n=|a_{ij}|$ 等于其某一行(列)的所有元素与它的代数余子式的乘积之和.即

$$D_n=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

或

$$D_n=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

**推论** $n$ 阶行列式 $D_n$ 的任意一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积的和等于零.即

$$a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots+a_{in}A_{sn}=0\quad(i\neq s)$$

$$a_{1j}A_{1t}+a_{2j}A_{2t}+\cdots+a_{nj}A_{nt}=0\quad(j\neq t).$$

7. **拉普拉斯定理** 在 $n$ 阶行列式 $D_n$ 中任意取定 $k$ 行 $(1\leqslant k\leqslant n)$,由这 $k$ 行元素组成的所有 $k$ 阶子式与它们的代数余子式乘积之和等于 $D_n$.即

$$D_n=M_1A_1+M_2A_2+\cdots+M_tA_t\quad(t=C_n^k)$$

其中 $A_i$ 是子式 $M_i(i=1,2,\cdots,t)$ 对应的代数余子式.

## 三、习题

### (一)填空题

1. $\begin{vmatrix}1&-c&-b\\c&1&-a\\b&a&1\end{vmatrix}=$____________.

2. $D=\begin{vmatrix}1&2&1&4\\0&-1&2&1\\1&0&1&3\\0&1&3&1\end{vmatrix}=$____________.

3. $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}=$____________.

4. 设行列式 $D=\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & x & 3 \\ x & x & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -3x \end{vmatrix}$，则 $D$ 的展开式中，$x^4$ 的系数是________，$x^3$ 的系数是________.

5. 设行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$，则第四行各元素余子式之和的值为________.

6. 如果行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-2$，则行列式 $D=\begin{vmatrix} 4a_{11} & 2a_{12}-3a_{11} & a_{13} \\ 4a_{21} & 2a_{22}-3a_{21} & a_{23} \\ 4a_{31} & 2a_{32}-3a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=$________.

7. 如果 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=m$，则 $\begin{vmatrix} a_1+3b_1 & b_1+2c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+3b_2 & b_2+2c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+3b_3 & b_3+2c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}=$________.

8. 设 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & x & 3 & 4 \\ 1 & 2 & x & 4 \\ 1 & 2 & 3 & x \end{vmatrix}$，则方程 $f(x)=0$ 的根为________.

9. 设行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4-x \\ a_1 & a_2 & a_3-x & a_4 \\ a_1 & a_2-x & a_3 & a_4 \\ a_1-x & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}=f(x)$，则方程 $f(x)=0$ 的根为________.

10. 设 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & x & -1 & 1 \\ 0 & -2 & x+1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$，则 $\frac{d^2}{dx^2}f(x)=$________.

11. 设行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=f(x)$$

则 $f(x)$ 的 4 阶导数 $f^{(4)}(x)=$________.

12. 五阶行列式

$$D_5=\begin{vmatrix}1-a & a & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1-a & a & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1-a & a & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a\end{vmatrix}=\_\_\_\_\_\_.$$

13. $n$ 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n}\\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n}\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn}\end{vmatrix}=\_\_\_\_\_\_.$$

14. $n$ 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & n\end{vmatrix}=\_\_\_\_\_\_.$$

15. $n$ 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0\end{vmatrix}=\_\_\_\_\_\_.$$

16. 设 $n$ 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 3 & 5 & \cdots & 2n-1\\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n\end{vmatrix}$$

则 $D_n$ 的第一行各元素的代数余子式之和 $A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}=\_\_\_\_\_\_$.

17. $n$ 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a\end{vmatrix}=\_\_\_\_\_\_.$$

18. $n$ 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}=\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

19.$(n+1)$阶行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_1 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a_2 & -a_3 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix}=\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

(二)选择题

1.下列行列式中,不等于零的是[　　].

A. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -0.5 & -0.5 & -0.5 \end{vmatrix}$　　B. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0.5 & 1.5 & 2.5 \end{vmatrix}$

C. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0.5 & 4 & 2.5 \end{vmatrix}$　　D. $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix}$

2.四阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ 的值等于[　　].

A. $a_1a_2a_3a_4-b_1b_2b_3b_4$　　B. $a_1a_2a_3a_4+b_1b_2b_3b_4$

C. $(a_1a_2-b_1b_2)(a_3a_4-b_3b_4)$　　D. $(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$

3.行列式 $\begin{vmatrix} y & x & x+y \\ x & x+y & y \\ x+y & y & x \end{vmatrix}=$[　　].

A. $2(x^3+y^3)$　　B. $-2(x^3+y^3)$

C. $2(x^3-y^3)$　　D. $-2(x^3-y^3)$

4.已知 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=m$,则 $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 2a_{31}-a_{11} & 2a_{32}-a_{12} & 2a_{33}-a_{13} \\ 3a_{11}+2a_{21} & 3a_{12}+2a_{22} & 3a_{13}+2a_{23} \end{vmatrix}=$[　　].

A. $6m$　　B. $-6m$　　C. $12m$　　D. $-12m$

5. 多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & x \\ 2 & 2 & 3 & x \\ -7 & 10 & 4 & 3 \\ 1 & -7 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中的常数项是[　　].

A. 3　　B. $-3$　　C. 15　　D. $-15$

6. 设多项式

$$f(x)=\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & a_{13}+x & a_{14}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & a_{23}+x & a_{24}+x \\ a_{31}+x & a_{32}+x & a_{33}+x & a_{34}+x \\ a_{41}+x & a_{42}+x & a_{43}+x & a_{44}+x \end{vmatrix},$$

则 $f(x)$ 的次数至多是[　　].

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

7. 记行列式 $\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$ 为 $f(x)$，则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为[　　].

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

8. 记 $f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$，则 $f(x)$ 中含 $x^3$ 项的系数为[　　].

A. $-3$　　B. $-2$　　C. $-1$　　D. 1

9. 记 $f(x)=\begin{vmatrix} 2-x & 2 & -2 \\ 2 & 5-x & -4 \\ -2 & -4 & 5-x \end{vmatrix}$，则方程 $f(x)=0$ 的根[　　].

A. 全为正数　　B. 全为负数

C. 有正有负　　D. 不是实数

10. $n$ 阶行列式($n>2$)

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1+1 & a_1+2 & \cdots & a_1+n \\ a_2+1 & a_2+2 & \cdots & a_2+n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+1 & a_n+2 & \cdots & a_n+n \end{vmatrix}=[\quad].$$

A. $n!$　　B. $a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_n$　　C. 0　　D. $-n!$

11. $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=[\quad]$.

A. $a^3+b^3$　　B. $a^3-b^3$　　C. $(a+b)^3$　　D. $(a-b)^3$

12. $n$ 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\2&1&2&\cdots&n-2&n-1\\3&2&1&\cdots&n-3&n-2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n&n-1&n-2&\cdots&2&1\end{vmatrix}=[\quad].$$

A. $(-1)^n2^{n-2}(n+1)$　　B. $(-1)^{n-1}2^{n-2}(n+1)$

C. $(-1)^n2^{n-1}(n+1)$　　D. $(-1)^{n-1}2^{n-2}n$

13. $n$ 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\x_1+1&x_2+1&x_3+1&\cdots&x_n+1\\x_1^2+x_1&x_2^2+x_2&x_3^2+x_3&\cdots&x_n^2+x_n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}+x_1^{n-2}&x_2^{n-1}+x_2^{n-2}&x_3^{n-1}+x_3^{n-2}&\cdots&x_n^{n-1}+x_n^{n-2}\end{vmatrix}=[\quad].$$

A. $x_1x_2\cdot\cdots\cdot x_n$　　B. $(x_1x_2\cdot\cdots\cdot x_n)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

C. $\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)$　　D. $\prod\limits_{i=1}^{n}x_i\cdot\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)$

(三)解答题

1. 计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix}32153&32053\\72284&72184\end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix}103&100&204\\199&200&395\\301&300&600\end{vmatrix}$

2. 计算下列行列式

(1) $D=\begin{vmatrix}2&4&-1&-2\\-3&7&-1&4\\5&-9&2&7\\2&-5&1&2\end{vmatrix}$;　　(2) $D=\begin{vmatrix}2&1&-3&-1\\3&1&0&7\\-1&2&4&-2\\1&0&-1&5\end{vmatrix}$

3. 证明

$$\begin{vmatrix}a-b-c&2a&2a\\2b&b-c-a&2b\\2c&2c&c-a-b\end{vmatrix}=(a+b+c)^3.$$

4. 证明

(1) $\begin{vmatrix}y+z&z+x&x+y\\x+y&y+z&z+x\\z+x&x+y&y+z\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}x&y&z\\z&x&y\\y&z&x\end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix}by+az&bz+ax&bx+ay\\bx+ay&by+az&bz+ax\\bz+ax&bx+ay&by+az\end{vmatrix}=(a^3+b^3)\begin{vmatrix}x&y&z\\z&x&y\\y&z&x\end{vmatrix}$.

5. 设 $f(x)=\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & b & c \\ a & b & x & c \\ a & b & c & x \end{vmatrix}$，求方程 $f(x)=0$ 的根.

6. 解方程

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & x^2-5 & -2 & 6 \\ -3 & 2 & -1 & x^2+1 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}=0.$$

7. 计算 $n+1$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} \text{（其中 } a_i\neq 0, i=1,2\cdots n.\text{）}$$

8. 计算 $n$ 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1-x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2-x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n-x \end{vmatrix}.$$

9. 计算 $n$ 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

10. 计算 $2n$ 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & a & & & b & \\ & & \ddots & \iddots & & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & & \iddots & \ddots & & \\ & b & & & a & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}$$

11. 证明范德蒙(Van der monde)行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&x_3&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&x_3^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&x_3^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j),(n\geqslant 2)$$

其中 $\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$ 表示所有可能的$(x_i-x_j)(i>j)$的乘积,即

$$\begin{aligned}\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\cdot\\(x_3-x_2)\cdots(x_n-x_2)\cdot\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\(x_n-x_{n-1})\end{aligned}$$

12.利用“加边法”计算下列行列式

(1)$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1^2&a_1a_2&\cdots&a_1a_n\\a_2a_1&2+a_2^2&\cdots&a_2a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_na_1&a_na_2&\cdots&n+a_n^2\end{vmatrix}$

(2)$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1&1&\cdots&1\\2&2+a_2&\cdots&2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n&\cdots&n+a_n\end{vmatrix}$,其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq0$.

13.利用“递推法”计算下列行列式

(1)$D_{n+1}=\begin{vmatrix}a&-1&0&\cdots&0\\ax&a&-1&\cdots&0\\ax^2&ax&a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\ax^n&ax^{n-1}&ax^{n-2}&\cdots&a\end{vmatrix}$

(2)$D_n=\begin{vmatrix}9&5&0&0&\cdots&0&0&0\\4&9&5&0&\cdots&0&0&0\\0&4&9&5&\cdots&0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&4&9&5\\0&0&0&0&\cdots&0&4&9\end{vmatrix}$

(3)$D_n=\begin{vmatrix}a+b&b&&&\\a&a+b&b&&\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&&a+b&b\\&&&a&a+b\end{vmatrix}$

14. 利用“数学归纳法”证明

$$(1) D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & 1+a_n^2 \end{vmatrix}=1+a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$$

$$(2) D_n=\begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.$$

$$(3) D_n=\begin{vmatrix} x+y & xy & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x+y & xy & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x+y \end{vmatrix}$$

$$=x^n+x^{n-1}y+\cdots+xy^{n-1}+y^n.$$

15. 利用拉普拉斯定理计算下列行列式

$$(1) D_6=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & 16 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & 16 & 1 & 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} \quad (2) D_5=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix}$$

16. 利用范德蒙行列式计算下列行列式

$$(1) D_{n+1}=\begin{vmatrix} a^n & (a+1)^n & \cdots & (a+n)^n \\ a^{n-1} & (a+1)^{n-1} & \cdots & (a+n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a+1 & \cdots & a+n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

$$(2) D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \cdots & a_1b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \cdots & a_2b_2^{n-1} & b_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \cdots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}.$$

其中，$a_ib_i\neq0(i=1,2,\cdots,n+1)$.

17. 设 $f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 2+x \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & x+2 & 4-x \end{vmatrix}$，试证明方程 $f'(x)=0$ 有小于 1 的正根.

## 四、习题解答

(一)填空题

1.答案是:$1+a^2+b^2+c^2$.

**分析** 三阶行列式可利用对角线法则直接计算:

$$\begin{vmatrix} 1 & -c & -b \\ c & 1 & -a \\ b & a & 1 \end{vmatrix} = 1\times1\times1+(-c)\times(-a)\times b+(-b)\times c\times a-(-b)\times1\times b$$

$$-(-c)\times c\times1-1\times(-a)\times a$$

$$=1+a^2+b^2+c^2.$$

2.答案是:$-7$.

**分析** 根据行列式的性质,可将行列式按含零元素较多的第一列展开,或化为上(下)三角行列式.

**解法 1** 根据行列式性质,将行列式按第一列展开:

$$D=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}+1\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=13+(-20)$$

$$=-7$$

**解法 2** 利用行列式性质,将 $D$ 化为上三角形行列式:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}\times(-1)$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}\times(-2)\quad\times(1)$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{vmatrix}\times\left(\frac{5}{4}\right)$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -7/4 \end{vmatrix}$$

$$=-7.$$

3.答案是:160.