

体育与科学研究丛书

运·动 数 学

程时矗 程志理编

505
64

263241

高中数学必修1-5

高中数学

必修1-5



2013年1月

封面设计：海 生

体 育 与 科 学 研 究 丛 书
运 动 数 学

程 时 矗 程 志 理 编

编辑者：江苏省体育科学研究所
《体育与科学》编辑部

出版者：江苏省体育科学研究所

地址：南京 孝陵卫

印 刷：南京紫金山印刷制本厂

开本787×1092 1/32 印张 $3\frac{1}{5}$ 字数14万

1988年5月第1版 1988年5月第1次印刷

印数1—2,000

国内统一刊号：CN32—1208 定价：1.85元

写在前面

人体运动，是脱离不了力学规律的。如何从物理学的角度，用数学手段分析不同项目的运动特征，这便是本书所要回答的问题，我们以美国新近出版的斯图尔特·汤恩德的 MATHEMATICS IN SPORT 一书为蓝本，参考了国外出版的其他两种研究运动的数学原理的专著，编写成这本《运动数学》。

本书尝试一种新的写法，不象传统的教科书从定义出发，而是以有共同力学数学特征的运动项目群分类，阐明数学分析为什么能用来解释许多运动项目中的力学问题，并指出怎样才能提高运动竞技水平。这是科学训练中，每个运动员和教练员均关心的问题。此书亦为体育院系学生将来从事体育科研做了知识上、方法上的准备。

目前，我国体育院系均开设了运动生物力学，还没有开运动数学，但运动数学原理是生物力学分析必不可少的基础工具。希望此书的出版能为我国尽早开设运动数学课服务。

目 录

第一章 径赛运动

- 第一节 跑的力学特征..... (1)
- 第二节 跑的数学模型..... (10)
- 第三节 跨栏跑和障碍跑..... (16)

第二章 跳跃运动

- 第一节 俯卧式和背越式跳高技术..... (22)
- 第二节 撑竿跳高..... (29)
- 第三节 跳远..... (37)
- 第四节 比蒙跳远世界纪录的数学分析..... (43)
- 第五节 三级跳远..... (47)

第三章 投掷运动

- 第一节 铅球..... (50)
- 第二节 链球..... (54)
- 第三节 铅球和链球的最佳出手角..... (60)
- 第四节 铁饼和标枪..... (63)
- 第五节 篮球投篮..... (63)

第四章 球类运动

- 第一节 不同状况的球类运动分析..... (69)
- 第二节 基本的碰撞理论..... (69)

第三节	滑动和旋转的影响·····	(77)
第四节	球运行通过媒介物的影响·····	(80)
第五节	英式橄榄球运动中前锋间的传球·····	(91)
第六节	风对球运行的影响·····	(92)
第七节	板球与棒球的比较分析·····	(96)

第五章 帆船运动

第一节	帆船运动中流体动力学现象概论·····	(99)
第二节	雷诺数·····	(108)
第三节	边界层·····	(109)
第四节	带翼龙骨·····	(111)
第五节	冲浪运动·····	(113)
第六节	压力中心·····	(118)
第七节	抽吸作用·····	(121)
第八节	相对速度·····	(123)

第六章 其它运动项目

第一节	桨手位置的最佳设置·····	(126)
第二节	赛艇上桨手的人数·····	(129)
第三节	速降滑雪·····	(132)
第四节	投镖运动·····	(136)
第五节	滑冰、体操和3米板跳水·····	(140)

第七章 身体素质

第一节	等长收缩耐力·····	(147)
第二节	你的身体素质如何(哈佛氏台阶测验)? ·····	(152)

附录

- 附录一 确定径赛运动员腿的水平髁轴转动惯量的
BASIC 计算机程序.....(159)
- 附录二 铅球、链球、跳远项目中推、掷、跳距离的
BASIC 计算机程序.....(166)
- 附录三 铅球、链球或跳远的最佳抛射角和成绩的
BASIC 计算机程序.....(178)
- 附录四 篮球罚球投篮成功或失败的 BASIC 计算机
程序.....(187)

第一章 径赛运动

第一节 跑的力学特征

径赛的胜负取决于一定跑程时间的长短，而这时间又决定于运动员的跑速。跑速和“步长”及“步频”有关。显然，“步长”和“步频”这两个数值要根据运动项目的特点（短跑运动员比马拉松运动员采用大得多的步长）而定。分析百米跑成绩为10"—11"5之间的男子运动员情况，表明人的身高和腿长参数与他的步长和步频之间有着密切的关系。平均值为：

$$\text{步长} = \begin{cases} 1.14 \times \text{身高} \\ 2.11 \times \text{腿长} \end{cases}$$

同时，随着运动员素质的改善和提高，数值因素有增大的趋势。

发令枪响后，运动员是尽可能地加快速度，然后在尽可能长的时间内保持这一速度。我们更应明确，短跑运动项目的时间很短，以致与战术问题没有多大关系。

在中距离跑和长跑中，运动员都采用站立式起跑。但在短跑中，多数运动员使用起跑器，并讲究起跑方式。短跑起跑方式按足尖到足尖的距离分（这种距离是运动员把双脚蹲进起跑器的固定位置时两脚之间的距离，见图1.1），有三类：

- 1) 缩短式起跑法，脚尖到脚尖的距离约为0.28米；
- 2) 中间式起跑法，脚尖到脚尖的距离约在0.4—0.53米。
- 3) 拉长式起跑法，脚尖到脚尖的距离约为0.61-0.71米。

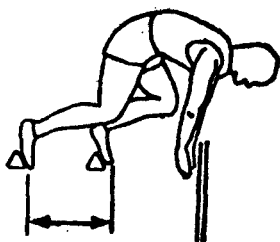


图1.1

青年运动员的脚尖到脚尖距离相比以上数值略小。

对比这三种起跑法的优缺点是有意义的。表1.1中所示的数据是优秀女大学生短跑运动员的纪录。取得这些数据所使用的不同起跑法都已注明。

运动员在最初4秒内不同时刻的速度都标明了。之所以特别

注意最初4秒，是因为运动员在这段时间内可加速到最大速度。即最初4秒可取得最大步长和最高步频。所获得的“距离—时间”数据用图形表示，呈一条平滑的曲线，按切线斜率确定的不同时间的速度参见图1.2。

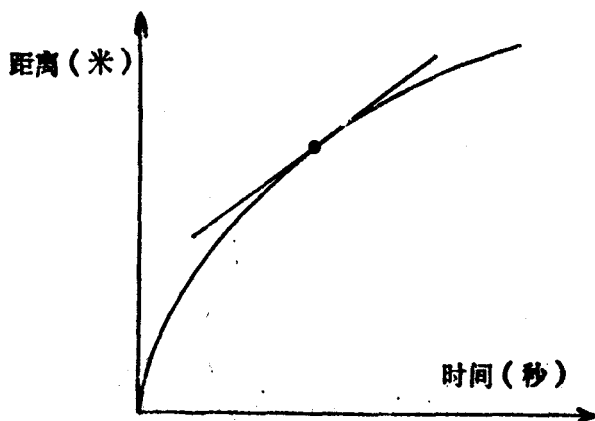


图1.2

表 1.1 女子短跑运动员的速度—时间数据

时 间 (秒)	速 度 (米/秒)		
	中 间 式	缩 短 式	拉 长 式
0.0	0	0	0
0.5	1.52	2.56	1.40
1.0	2.87	3.54	2.56
1.5	3.90	3.96	3.41
2.0	4.69	4.33	4.08
2.5	5.24	4.69	4.57
3.0	5.67	5.12	4.94
3.5	6.10	5.55	5.30
4.0	6.46	5.91	5.58

表 1.1 表明起跑方法的一些有意义的特性。由表可知，初始，使用缩短式起跑法的速度最快，但 2 秒时中间式起跑法已超过了缩短式。这是否表明，运动员使用中间式起跑法比使用缩短式起跑法，相同的时间内跑的距离更长呢？这可以用辛卜生法则

$$\int_0^4 V dt$$

算出积分数值——“速度—时间”数据来确定。

以上三种起跑法在初始 4 秒内所跑的实际距离用辛卜生法则由表 1.1 算出，结果为：

中间式起跑法：所跑距离 = 16.66 米

缩短式起跑法：所跑距离 = 16.55 米

拉长式起跑法：所跑距离=14.58米

可见，女子短跑运动员采用中间式起跑法效果最好。必须强调指出，尽管多数短跑运动员采用中间式起跑法是对的，但并不排斥个性、素质和习惯上的差异，应该因人而异。你可能要问，为什么不按运动员在所研究的时间内跑的距离直接测量的结果评价起跑方式。这样做的原因是4秒以后运动员跑得非常快（接近7米/秒），根据4秒钟的情况，很难精确地评价。

200米和400米跑中，运动员在弯道上起跑。当运动员经过弯道时，地面给脚一个反作用力的水平分力，其方向对着弯道的曲率中心，它使运动员的躯干向外转。运动员为了阻止这种作用，把躯干向弯道曲率中心倾斜，以使自己的质量中心，对地面反作用力垂直分力的力矩提供抗向心力矩。如果运动员跑得很快，或弯道曲率半径过小（室内跑道就是的），则地面不能够提供足够大的向心力。除非选择某种防护设备，否则运动员不减慢速度，就会冒出事的危险。因此，室内跑道转弯处筑成斜坡形，这样使作用于斜坡的运动员体重分量提供向心力，以减少内倾斜度，甚至完全不需要倾斜。

起跑后有一段时间，运动员加速到最大速度。正如汽车一样，如果起动时挡次太高，不能很快加速，运动员如果起跑时速度太快，就不能很快加大到自己的最大速度。因此，运动员起跑时采用的步长和步频应是适中的，不能过分。随着速度加快（加速度递减），步长逐渐增大，直至达到最大速度（此时加速度为零）时，步长增至最大值。在这种加速变化阶段，运动员躯干取向也随之变化。起跑时，运动员蹲下，俯身于起跑线上，或者脚蹬起跑器。采用这种姿势，以便发令枪响时运动员腿的趋动动作具有巨大的水平分量，产生巨大的水平加速度。

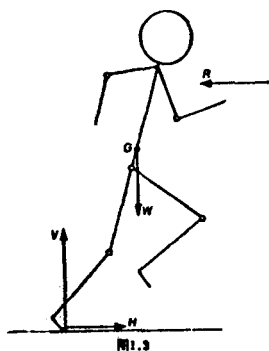


图1.3表明，趋动力的水平分力 H 趋向于环绕质量中心 G 倒转运动员的躯干，为了克服这种旋转，运动员尽量向前倾斜，以使减小水平反作用力矩，增大竖直反作用力 V 的对抗作用。几步以后，运动员的水平速度显著加快，不能再拖加与以前相同大小的水平分力了。为防止由于竖直反作用力引起的向前转动倾向，运动员抬起躯干以减小竖直反作用力矩。运动员躯干取向的这种调节继续到他达到最大速度，

此时，地面的反作用力的水平分力正好足以抵销空气阻力 R 的减速作用。不过运动员还需要抵抗空气阻力和水平反作用力的倒转作用。如果这样，运动员的躯干最终将呈现一种姿势。呈这种姿势，就不能施加足够的水平分力以保持最大速度。因此，优秀短跑运动员即使以最大速度向前跑，同时还能使躯干向前倾斜。

在所有径赛项目的比赛过程中，运动员腿的动作是周期性的，一个周期分三个阶段：

- 1) 支撑阶段——从脚着地到身体重心移过脚着地点的阶段；
- 2) 启动阶段——由支撑阶段结束时开始到脚离地时结束；
- 3) 回复阶段——由脚离地并移动到下一步脚着地的阶段。

支撑阶段由脚着地开始，此时脚可能向前，垂直于运动员身体前进方向向下或向后运动，如果脚向前运动着地，则对运动员的水平运动没有什么影响。如果脚向后运动着地，则地面反作用力将产生一个向前的水平分力，该水平分力加快运动员的速度。实际上，当脚接触地面时，总有某些阻碍作用产生。

在起阶段，运动员向下和向后脚蹬地面。运动员脚蹬地面后，作向上和向前的运动，进入下一步。运动员一蹬离地面，可视为抛射体腾空，其重心的腾空轨道受多种因素约束，例如，腾空离开地面的高度、腾空时的速度、空气阻力作用等。腾空速度对步长的影响最大。径赛运动员腾空速度的水平分量很大，而竖直分量很小（不像跳高运动员），所以合速度几乎等于水平分量。因此，抛物线轨迹很平。在整个跑程中，除起跑阶段外，运动员的头几乎保持在同一水平线上。

在回复阶段，一只脚由身后摆到下一步的着地点。脚一蹬离地面，尽量弯腿屈膝，脚提高到靠近臀部下方。因而减小小腿沿着穿过臀部横轴线的转动惯量，使腿沿着这根轴线，比不弯腿曲膝时有更快的速度向前旋转（请注意这种角动量，以及角动量守恒原理）。

腿弯曲的程度是短、中、长跑运动员的特殊腿动作的特性之一。长跑运动员，特别是马拉松跑运动员，不会把他们的腿提高到与短跑所需的程度，那么他们的腿沿着臀部横轴线的转动惯量比短跑运动员要大，因而角速度慢。因此，不可能跑得很快，下页图1.4所示，是运动员的腿在一步中姿势系列变化示意图。大腿和小腿（包括脚在内）可以各自模拟成圆柱

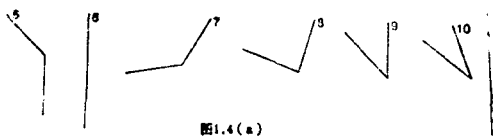


图1.4(a)

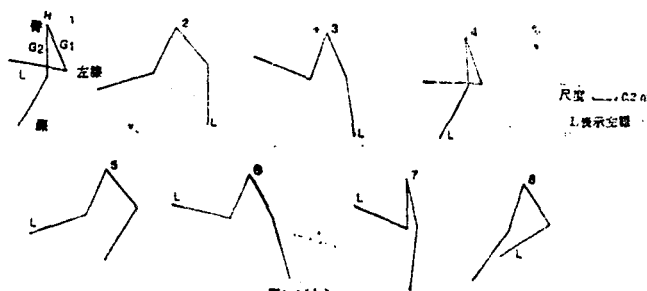


图1.4(b)

体。典型数据如下(见图1.5)：

大腿：质量 $=0.137 \times$ 运动员质量，半径 $=0.07$ 米，长度 $=0.45$ 米；

小腿和脚：质量 $=0.08 \times$ 运动员质量，半径 $=0.05$ 米，长度 $=0.50$ 米。

那么，全腿沿着穿过臀部横轴线的转动惯量就可以利用平行移轴定理和方程



图1.5



$$I = m \left(\frac{a^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right)$$

计算结果确定。方程中的 m 是给定圆柱体的质量, a 是半径, h 是长度, I 是沿着穿过圆柱体中心垂直于圆柱体长度的转动惯量。参见图 1.4(a) 所示的姿势 1, 运动员体重为 73

$$\text{公斤, 大腿, } I_{G1} = 0.137 \times 73 \times \left(\frac{0.07^2}{4} + \frac{0.45^2}{12} \right)$$

$$= 0.181 \text{ 公斤米}^2.$$

$$\text{小腿(和脚), } I_{G2} = 0.06 \times 73 \times \left(\frac{0.05^2}{4} + \frac{0.5^2}{12} \right)$$

$$= 0.094 \text{ 公斤米}^2.$$

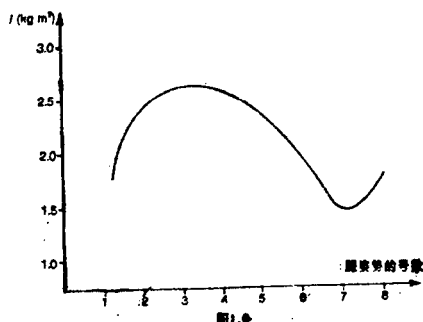
因此, 根据平行移轴定理, 全腿沿着穿过臀部的横轴线的转动惯量

$$\begin{aligned} I_H &= 0.181 + 0.137 \times 73 \times (0.225)^2 + 0.094 + 0.06 \times 73 \times HG_2^2 \\ &= 0.181 + 0.506 + 0.094 + 0.06 \times 73 \times (0.24)^2 \\ &= 1.033 \text{ 公斤米}^2. \end{aligned}$$

附录 I 中有一种 BASIC 计算机程序, 使用该程序, 再加上能够确定长度 HG_2 各种数值的标尺, 便可进行图 1.4 所示的每种腿姿势的上述计算。

图 1.6 所示是计算的结果, 由该图显然可见, 全腿的转动惯

量在很大程度上随选择的姿势变化。



当腿的质量集中接近旋转轴时,转动惯量最小;当腿完全伸直时,转动惯量便可增加到最大值。因为角动量为 $I\omega$,并在腿运动的整个过程中保持常量,所以屈腿接近臀部时,腿的角速度最大,腿完全伸直时角速度最小。因此,弯腿至屈膝程度,则腿在下一步中可更快地向前运动。

手臂在跑动中也有其作用。当右膝在右腿周期的回复阶段中向前和向上运动时,臀部反时针方向转动。当右膝达到它所能达到的高度时,停止这种转动。右腿下落到地面后,左腿开始向前和向上运动,致使臀部顺时针方向转动。这种转动如果不受抑制的话,将对运动员的稳定性有破坏作用。手臂可以提供反作用力。因为当右腿向前和向上运动(致使产生反时针方向转动)时,左臂被带而向前和向上运动,引起反时针方向转动。有些运动员还倾向于过分摆动臀部,以便阻止其转动。可是肩部转动比较缓慢,手臂动作阻止臀部转动效果最好。手臂动作的力量和摆幅随运动项目变化,短跑运动员的手臂动作力量强而摆幅

大，马拉松运动员的手臂动作弱而摆幅小。

第二节 跑的数学模型

无论拟定怎样的数学模型，首先都要确定有关变量。赛跑中，运动员的速度显然是非常重要的变量，如果运动员的时间相关速度为 $V(t)$ ，在 τ 时间内所跑过的距离为 D ，则可由积分式

$$D = \int_0^{\tau} V(t) dt \quad (1.1)$$

计算出。尽管在实践中优秀运动员能够选择使他战胜对手的速度 $V(t)$ ，但我们还是假设他企图在尽可能短的时间内进行赛跑。这种假设对短跑是正确的，但是对中、长跑肯定不正确。因为在中、长跑中战术能力几乎与赛跑能力是同样重要的。至于速度 $V(t)$ ，可由运动方程获得。假设质量为 m 的运动员，每单位质量使出 $F(t)$ 的发动力，每单位质量承受阻力 R ，按牛顿运动第二定律得

$$m \frac{dv}{dt} = m F(t) - m R.$$

在许多情况下，物体所承受的阻力 R ，实验证明与速度的一次幂或二次幂成比例。如果物体是流线型的，则阻力与速度的二次幂成比例，例如，雪橇或速降滑雪。反之，如果物体形状是秃钝的，则阻力与速度的一次幂成比例，赛跑运动员当然属于后一类，因此，我们假设：

$$R \propto v$$

所以

$$R = kv$$