

经济和管理类大学数学系列教材之一

微积分

李汝修 解心江 张恩众 主编



山东大学出版社
Shandong University Press

经济和管理类大学数学系列教材之一

微 积 分

李汝修 解心江 张恩众 主 编
郭砚常 王子亮 华玉爱 副主编

山东大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分/李汝修,解心江,张恩众主编. —济南:山东大学出版社,2003.8

ISBN 7-5607-2592-9

I. 微... I. ①李...②解...③张... III. 微积分—高等学校—教材 IV. 0172

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第063916号

山东大学出版社出版发行

(山东省济南市山大南路27号 邮政编码:250100)

山东省新华书店经销

莱芜市圣龙印务书刊有限责任公司印刷

787×980毫米 1/16 22印张 417千字

2003年8月第1版 2003年8月第1次印刷

印数:6000册

定价:26.00元

经济和管理类大学数学系列教材编委会

主 任: 察可文

副 主 任: 张恩众 郭 环

编 委: (以姓氏笔画为序)

王子亮	王 红	孙作胜	华玉爱
李汝修	李胜正	权惠利	张 文
张宝全	张秀丽	郭砚常	黄玉林
舒爱莲	谢 波	董连宝	韩志光
解心江	窦方军		

前 言

数学是一切科学技术发展的基础,也是人类理解现实世界的一把钥匙。对经济类、管理类大学生来说,数学不但是他们在校学习期间的一门十分重要的基础课程,也是他们进一步深造——报考经济类、管理类研究生的必考课程。因此,学好高等数学课程的重要性是不言而喻的。

我们编写的这套经济类、管理类大学数学系列教材包括:《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》三册,本书是这套系列教材中的第一册。

本书根据教育部有关经济类、管理类专业大学数学教学基本要求并参照2003年考研大纲编写而成。全书共分9章:第一章,函数;第二章,极限与连续;第三章,导数与微分;第四章,中值定理及导数的应用;第五章,不定积分;第六章,定积分及其应用;第七章,无穷级数;第八章,多元函数微积分;第九章,微分方程与差分方程初步。书中有些内容加了“*”号,选用本书时可以根据教学需要和学习安排略去不讲。

我们在编写中力求做到:知识阐述上由浅入深,通俗易懂,注意总结规律,交代要领;例题配置上典型性强,有启发意义,有些直接采用了近几年的研究生入学试题;每章后面配备有一定数量的巩固性练习题,全书后面附有练习题答案,便于学生自我检查。

本书是在各位编者使用多年的高等数学讲义的基础上修改而成的,同时我们在编写过程中也注意吸收了国内现有同类教材中的一些优点(恕不一一注明),使本书尽量做到博采众长。

本书是集体合作的结果。山东大学管理学院赵炳新教授参与了本书的讨论,并提出了很多有价值的建议,在此表示衷心的感谢。各章的执笔人分别是:第一章,解心江;第二章,张恩众;第三章,解心江;第四章,王子亮;第五章,察可文;第六章,郭环;第七章,华玉爱;第八章,李汝修;第九章,郭砚常。最后,由李汝修、解心江、张恩众对全书进行了统纂定稿。由于各章内容分别由不同的作者执笔,因此其写作风格及语言习惯也会略有不同,虽经多次修改,可能仍会存在一定的差异,再加上编者水平所限,书中缺点错误在所难免,敬希广大读者批评指正。

编 者

2003年7月于山东大学

目 录

第一章 函 数	(1)
第一节 集 合.....	(1)
第二节 函 数.....	(5)
第三节 初等函数	(12)
A类练习题	(16)
B类练习题	(17)
第二章 极限与连续	(19)
第一节 数列的极限	(19)
第二节 函数的极限	(24)
第三节 无穷小与无穷大	(29)
第四节 极限的运算法则	(33)
第五节 极限的存在准则 两个重要极限	(38)
第六节 无穷小的比较	(43)
第七节 函数的连续性与间断点	(46)
第八节 连续函数的运算与初等函数的连续性	(51)
第九节 闭区间上连续函数的性质	(54)
A类练习题	(57)
B类练习题	(61)
第三章 导数与微分	(63)
第一节 导数的概念	(63)
第二节 函数的求导法则	(69)
第三节 隐函数及参数方程所确定的函数的求导法	(75)
第四节 高阶导数	(79)
第五节 函数的微分	(81)

A 类练习题	(86)
B 类练习题	(88)
第四章 中值定理及导数的应用	(91)
第一节 中值定理	(91)
第二节 洛比达法则	(101)
第三节 函数的单调性与曲线的凹向	(106)
第四节 函数的极值与最值	(111)
第五节 曲线的渐近线与函数作图	(117)
第六节 导数在经济学中的应用	(121)
A 类练习题	(130)
B 类练习题	(133)
第五章 不定积分	(136)
第一节 不定积分的概念与性质	(136)
第二节 换元积分法	(141)
第三节 分部积分法	(149)
第四节 有理函数的不定积分	(154)
A 类练习题	(158)
B 类练习题	(161)
第六章 定积分及其应用	(163)
第一节 定积分的概念与性质	(163)
第二节 微积分基本公式	(170)
第三节 定积分的换元积分法和分部积分法	(176)
第四节 广义积分	(182)
第五节 定积分的应用	(187)
A 类练习题	(194)
B 类练习题	(197)
第七章 无穷级数	(201)
第一节 无穷级数的概念	(201)
第二节 无穷级数的基本性质	(204)
第三节 正项级数	(207)
第四节 任意项级数	(212)

第五节 幂级数·····	(214)
第六节 函数展开成幂级数·····	(221)
A 类练习题 ·····	(224)
B 类练习题 ·····	(226)
第八章 多元函数微积分 ·····	(229)
第一节 空间解析几何初步·····	(229)
第二节 多元函数的基本概念·····	(239)
第三节 偏导数·····	(245)
第四节 全微分·····	(250)
第五节 复合函数的微分法·····	(254)
第六节 隐函数的微分法·····	(260)
第七节 多元函数的极值与最值·····	(266)
第八节 二重积分的概念与性质·····	(277)
第九节 利用直角坐标计算二重积分·····	(282)
第十节 利用极坐标计算二重积分·····	(289)
A 类练习题 ·····	(294)
B 类练习题 ·····	(299)
第九章 微分方程与差分方程初步 ·····	(304)
第一节 微分方程的概念·····	(304)
第二节 一阶微分方程·····	(306)
第三节 可降阶的二阶微分方程·····	(311)
第四节 二阶常系数线性微分方程·····	(313)
第五节 简单的差分方程·····	(317)
A 类练习题 ·····	(322)
B 类练习题 ·····	(324)
练习题答案 ·····	(325)

第一章 函 数

高等数学与初等数学最明显的区别是它们研究的对象不同. 初等数学讨论的基本上是不变的量, 而高等数学研究的主要是变量. 函数关系是变量之间的依赖关系, 对其有关概念的理解是学习高等数学的基础. 本章介绍集合、区间、变量、函数等基本概念及函数的基本性质.

第一节 集 合

一、集合的概念

1. 集合

集合是数学中的一个基本概念, 它在现代数学中起着非常重要的作用, 被广泛地应用在自然科学的各个领域.

一般说来, **集合(简称集)**是指具有某种特定性质的事物的总体. 构成集合的事物, 称为**集合的元素**.

例如: ① 2000年1月1日在北京市出生的人;

② $x^2 - 3x + 2 = 0$ 的根;

③ 全体实数;

④ 直线 $x + y - 1 = 0$ 上的所有点

分别构成了“人口集合”、“数的集合”、“点的集合”.

由有限个元素构成的集合, 称为**有限(穷)集合**; 由无限个元素构成的集合, 称为**无限(穷)集合**.

通常, 数学上用大写字母 A, B, C, \dots 表示集合, 用小写字母 a, b, c, \dots 表示集合中的元素. 如果元素 a 在集合 M 中, 则写作 $a \in M$, 读作 a 属于 M ; 否则, 写作 $a \notin M$, 读作 a 不属于 M .

例如,全体有理数的集合记为 \mathbb{Q} ,则 $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}, \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

注意,数学中的集合有如下特性,即元素的可确定性,也就是说一个元素是否属于某个集合是可以确定的,“是”或“不是”二者必居其一.例如,平面中原点“附近”的点,不构成集合.

2. 集合的表示法

在利用集合讨论问题的过程中,为了表示方便及体现元素的特定性质,常用以下两种表示法.

(1) **列举法**:按任意顺序列举出集合的所有元素,并用花括号括起来.例如,由元素 a_1, a_2, \dots, a_n 组成的集合 M ,可记作

$$M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

(2) **描述法**:设 $P(x)$ 为某个与 x 有关的条件或法则, A 为满足 $P(x)$ 的一切 x 组成的集合,可记作

$$A = \{x | P(x)\}.$$

这里 $P(x)$ 描述了元素 x 的特定性质.例如,设 A 为 xOy 平面上坐标适合方程 $x^2 + y^2 = 1$ 的点 (x, y) 的全体构成的点集,可记作

$$A = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1, x, y \text{ 为实数}\}.$$

以后用到的集合主要是**数集**,即元素都是数的集合.除了特别声明,以下提到的数都是实数.

全体自然数的集合记作 N ,全体整数的集合记作 Z ,全体有理数的集合记作 \mathbb{Q} ,全体实数的集合记作 R .

在研究问题的过程中,由所有事物构成的集合称为**全集**,记为 Ω .全集是相对的,一个集合在一定条件下是全集,在另一种条件下就可能不是全集.例如,讨论的问题仅限于自然数,则全体自然数的集合是全集;当讨论的问题涉及到实数时,全体自然数的集合就不是全集.

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素,即若 $x \in A$,则必有 $x \in B$,就说 A 是 B 的**子集**,记作 $A \subset B$ (读作 A 包含于 B)或 $B \supset A$ (读作 B 包含 A).例如, $N \subset Z, Z \subset \mathbb{Q}, \mathbb{Q} \subset R$.

如果 $A \subset B$,且 $B \subset A$,就称集合 A 与 B 相等,记作 $A = B$.例如,设

$$A = \{1, 2\}, B = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\},$$

则 $A = B$.

不含任何元素的集合称为**空集**.例如 $\{x | x^2 + 1 = 0, x \in R\}$ 是空集.空集记作 Φ ,且规定空集为任何集合的子集.

二、集合的运算

1. 并

设有集合 A 和 B , 由 A 和 B 的所有元素构成的集合, 称为 A 与 B 的并, 写作 $A \cup B$, 即

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

集合的并有下列性质:

- (1) $A \subset A \cup B, B \subset A \cup B$;
- (2) 对任何集合 A , 有 $A \cup \Phi = A, A \cup \Omega = \Omega, A \cup A = A$.

2. 交

设有集合 A 和 B , 由 A 和 B 的所有公共元素构成的集合, 称为 A 与 B 的交, 写作 $A \cap B$, 即

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

集合的交有下列性质:

- (1) $A \cap B \subset A, A \cap B \subset B$;
- (2) 对任何集合 A , 有 $A \cap \Phi = \Phi, A \cap \Omega = A, A \cap A = A$.

3. 差

设有集合 A 和 B , 由属于 A 而不属于 B 的所有元素构成的集合, 称为 A 与 B 的差, 写作 $A \setminus B$, 即

$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$$

集合的差有下列性质:

- (1) $A \setminus B \subset A$;
- (2) 对任何集合 A , 有 $A \setminus \Phi = A, \Phi \setminus A = \Phi$.

4. 余

全集 Ω 中所有不属于 A 的元素构成的集合, 称为 A 的余, 写作 \bar{A} , 即

$$\bar{A} = \{x | x \in \Omega \text{ 且 } x \notin A\}.$$

集合的余有下列性质: $A \cup \bar{A} = \Omega, A \cap \bar{A} = \Phi$.

例 1.1 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{4, 5, 6, 7, 8\}, \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,

则 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$,

$$A \cap B = \{4, 5\}, A \setminus B = \{1, 2, 3\}, B \setminus A = \{6, 7, 8\},$$

$$\bar{A} = \{6, 7, 8, 9\}, \bar{B} = \{1, 2, 3, 9\}.$$

例 1.2 设 $A = \{x | -1 \leq x \leq 1\}, B = \{x | x > 0\}$,

则 $A \cup B = \{x | x \geq -1\}, A \cap B = \{x | 0 < x \leq 1\}$,

$$A \setminus B = \{x | -1 \leq x \leq 0\}, B \setminus A = \{x | x > 1\}.$$

5. 集合的运算律

集合的运算符合下列规律:

- (1) 交换律 $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$;
 (2) 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$
 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
 (3) 分配律 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$
 $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;
 (4) 摩根律 $\overline{(A \cup B)} = \bar{B} \cap \bar{A}, \overline{(A \cap B)} = \bar{B} \cup \bar{A}.$

三、区间 邻域

1. 区间

设 a 和 b 都是实数, 且 $a < b$, 数集 $\{x | a < x < b\}$ 称为**开区间**, 记作 (a, b) , 即

$$(a, b) = \{x | a < x < b\}.$$

a, b 称为开区间 (a, b) 的端点, 这里 $a \notin (a, b), b \notin (a, b)$. 数集 $\{x | a \leq x \leq b\}$ 称为**闭区间**, 记作 $[a, b]$, 即

$$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}.$$

a, b 称为闭区间 $[a, b]$ 的端点, 这里 $a \in [a, b], b \in [a, b]$.

类似地可说明:

$$[a, b) = \{x | a \leq x < b\}, (a, b] = \{x | a < x \leq b\}.$$

$[a, b)$ 和 $(a, b]$ 都称为**半开区间**.

以上这些区间都称为**有限区间**. 数 $b - a$ 称为**区间长度**. 有限区间的区间长度有限.

若 a 或 b 中有一个改为无穷大时, 就得到所谓的**无限区间**. 例如

$$[a, +\infty) = \{x | x \geq a\}, (-\infty, b] = \{x | x \leq b\}, (a, +\infty) = \{x | x > a\} \text{ 等.}$$

2. 邻域

邻域是一种特殊的开区间. 以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的**邻域**, 记作 $U(a)$.

设 δ 是某一正数, 则开区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 就是点 a 的一个邻域, 这个邻域称为点 a 的 **δ 邻域**, 记作 $U(a, \delta)$, 即

$$U(a, \delta) = \{x | a - \delta < x < a + \delta\}.$$

点 a 称为这个邻域的**中心**, δ 称为这个邻域的**半径**(图 1-1).



图 1-1

由于 $a-\delta < x < a+\delta$ 相当于 $|x-a| < \delta$, 所以 $U(a, \delta)$ 表示: 与点 a 距离小于 δ 的一切点 x 的全体.

有时候用到的邻域需要把邻域中心点 a 去掉. 点 a 的 δ 邻域去掉中心点 a 后, 称为 a 的去心邻域, 记作 $\dot{U}(a, \delta)$, 即

$$\dot{U}(a, \delta) = \{x | 0 < |x-a| < \delta\}.$$

这里 $0 < |x-a|$ 就表示 $x \neq a$.

第二节 函 数

一、常量与变量

在观察和研究自然现象或技术过程中, 常常会遇到各种不同的量, 其中有的量在过程中不起变化, 就是说它保持一定的数值, 这种量叫做**常量**; 还有的量在过程中是变化着的, 也就是说它可以取不同的数值, 这种量叫做**变量**.

例如, 把一个密闭容器内的气体加热时, 气体的体积和气体的分子个数保持不变, 它是常量; 而气体的温度和压力在变化, 则是变量, 它们取的数值越来越大.

实践中, 一个量是常量还是变量, 通常要根据具体情况而定. 例如, 就小的范围来说, 重力加速度可看成常量, 但就大的范围来说, 重力加速度就必须看成变量.

一般情况下, 我们用字母 a, b, c, \dots 表示常量, 用字母 z, y, x, \dots 表示变量.

二、函数的概念

在一个自然现象或技术过程中, 往往同时有几个变量在变化着, 这几个变量并不是孤立地在变, 而是相互联系并遵循着一定的变化规律.

这种变量之间的相互依赖、相互制约的确定关系, 在数学上就称为函数关系.

1. 函数的定义

这里我们用集合的语言给出函数的定义.

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量, D 是一个给定的非空数集. 如果对于每个 $x \in D$, 变量 y 按照一定法则 f 总有确定的数值和它对应, 则称 y 是 x 的函数, 记作 $y = f(x)$. 数集 D 叫做这个函数的定义域, x 叫做自变量, y 叫做因变量.

当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时,与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值,记作 $f(x_0)$.当 x 遍取 D 的各个数值时,对应的函数值的全体组成的数集 $W=\{y|y=f(x),x \in D\}$ 称为函数的**值域**.

正确理解函数的定义应该注意以下几点.

(1) 关于对应关系 f 的含义:

① $y=f(x)$ 中的“ f ”表示函数关系中的对应法则,不同的函数应当用不同的字母来表示.具体的函数其对应关系 f 是具体的.

② $f(x)$ 表示将法则 f 施加于 x ,若 $f(x)$ 中的 x 转换为某个数值或表示数值的新字母以及某个数学式子,则表示将法则 f 施加于这些新的对象.

例如,若 $f(x)=x^2$,则

$$f(\sin x)=\sin^2 x, f(x+1)=(x+1)^2, f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}.$$

(2) 关于函数的定义域:在实际问题中,应考虑函数的实际意义,其定义域由实际意义确定;在数学中,如不考虑实际意义而抽象地讨论函数,其定义域为使函数式子有数学意义的一切实数值.

(3) 关于单值函数和多值函数:如果自变量在定义域内任取一个数值时,对应的函数值只有一个,这种函数叫做**单值函数**,否则叫做**多值函数**.

例如,在直角坐标系中,单位圆的方程 $x^2+y^2=1$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上可确定一个以 x 为自变量 y 为因变量的函数.当 x 取 -1 或 1 时,对应的函数值只有一个,但当取开区间 $(-1,1)$ 内的任一个数值时,对应的函数值就有两个,所以这函数是多值函数.

当然,对于多值函数我们可以把它化为多个单值函数,然后进行讨论.所以我们约定以下提到的函数均指单值函数,除非特别声明.

2. 函数的表示法

常用的函数表示法有公式法、表格法和图像法.

用数学运算表达式表示函数关系的方法,称为**公式法**.

例如, $y=\frac{1}{x(x-1)}+\sqrt{9-x^2}$, $y=\sin x+\cos x$ 等.

用数值表格建立变量间对应的取值关系,这种表示函数关系的方法,称为**表格法**.

例如,正弦表就是用表格法表示函数 $y=\sin x$ 的函数关系的.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D ,对于任意取定的 $x \in D$,对应的函数值为

$y=f(x)$. 这样,以 x 为横坐标, y 为纵坐标就在 xOy 平面上确定一点 (x,y) . 当 x 遍取 D 的各个数值时,就得到点 (x,y) 的一个集合 C :

$$C = \{(x,y) | y=f(x), x \in D\}.$$

这个点集 C 称为函数 $y=f(x)$ 的图像(图1-2).

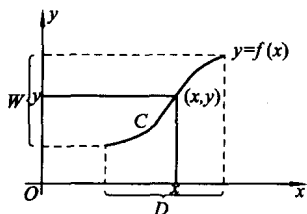


图 1-2

通过坐标系及函数图像建立变量间对应的取
值关系,这种表达函数关系的方法,称为**图像法**.

函数的各种表示法各有所长.

3. 几个函数例子

例 2.1 函数

$$y=2$$

的定义域 $D=(-\infty, +\infty)$, 值域 $W=\{2\}$, 它的图形
是一条平行于 x 轴的直线,如图 1-3 所示.

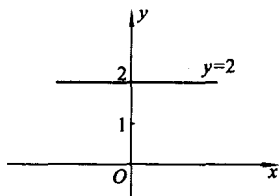


图 1-3

例 2.2 函数

$$y=|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty, +\infty)$, 值域 $W=[0, +\infty)$, 它
的图形如图 1-4 所示. 这个函数称为**绝对值函数**.

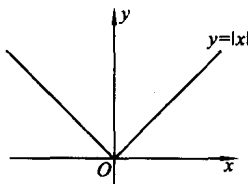


图 1-4

例 2.3 函数

$$y=\operatorname{sgn}x = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0, \\ 0, & \text{当 } x = 0, \\ -1, & \text{当 } x < 0 \end{cases}$$

称为**符号函数**, 它的定义域 $D=(-\infty, +\infty)$, 值域
 $W=\{-1, 0, 1\}$, 它的图形如图 1-5 所示.

例 2.4 设 x 为任一实数, 不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分, 记作 $[x]$.
例如 $[1.9]=1, [\sqrt{2}]=1, [\pi]=3, [-3.6]=-4$.

函数

$$y=[x]$$

的定义域 $D=(-\infty, +\infty)$, 值域 $W=Z$, 它的图形如图 1-6 所示, 这个函数称为**取整函数**. 这类图形称为**阶梯曲线**. 在这里, 当 x 为整数时, 图形发生跳跃, 跃度为 1.

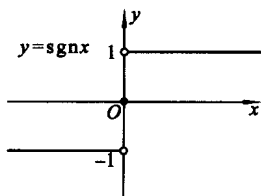


图 1-5

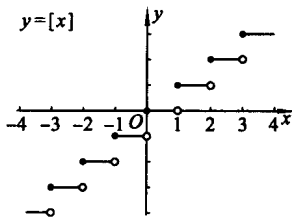


图 1-6

有时一个函数要用几个式子表示,如例 2.2、例 2.3. 这种在自变量的不同变化范围中,对应法则用不同式子来表示的函数,通常称为**分段函数**.

例 2.5 函数

$$y=f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0\leq x\leq 1, \\ 1+x, & x>1 \end{cases}$$

是一个分段函数. 它的定义域 $D=[0, +\infty)$.

当 $x\in[0, 1]$ 时, 对应的函数值 $f(x)=2\sqrt{x}$;

当 $x\in(1, +\infty)$ 时, 对应的函数值 $f(x)=1+x$.

例如, $f(0.25)=2\sqrt{0.25}=1$, $f(1)=2\sqrt{1}=2$, $f(3)=1+3=4$. 它的图形如图 1-7 所示.

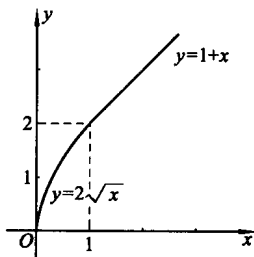


图 1-7

三、函数的基本性质

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $X\subset D$. 如果存在实数 U , 使得

$$f(x)\leq U$$

对任意 $x\in X$ 都成立, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界, 而 U 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个**上界**. 如果存在数 H , 使得

$$f(x)\geq H$$

对任意 $x\in X$ 都成立, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上有下界, 而 H 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个**下界**. 如果存在正数 M , 使得

$$|f(x)|\leq M$$

对任意 $x\in X$ 都成立, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界. 如果这样的 M 不存在, 称函数 $f(x)$ 在 X 上无界; 换句话说, 如果对于任何正数 M , 总存在 $x\in X$, 使得 $|f(x)|>M$, 那么函数 $f(x)$ 在 X 上**无界**.

例如, 函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内, 数 1 是它的一个上界, 数 -1 是它

的一个下界. 又 $|\sin x| \leq 1$ 对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$ 都成立, 故函数 $f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的.

又如函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在开区间 $(0, 1)$ 内没有上界, 但有下界 (数 1 是一个下界). 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在开区间 $(0, 1)$ 内是无界的, 因为不存在这样的正数 M , 使 $\left| \frac{1}{x} \right| \leq M$ 对于 $(0, 1)$ 内的一切 x 都成立. 而它在 $[1, +\infty)$ 内是有界的.

易证, 函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subset D$. 若对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加**的; 若对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少**的.

单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

例如, 函数 $f(x) = x^2$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加, 在 $(-\infty, 0]$ 上单调减少, 但在 $(-\infty, +\infty)$ 内不是单调的. 而函数 $f(x) = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的.

单调增加函数的图形沿 x 轴正向逐渐上升, 单调减少函数的图形沿 x 轴正向逐渐下降.

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称 (即若 $x \in D$, 则 $-x \in D$). 如果对任意 $x \in D$, $f(-x) = f(x)$ 恒成立, 则称 $f(x)$ 为**偶函数**. 如果对任意 $x \in D$, $f(-x) = -f(x)$ 恒成立, 则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

例如, $y = x^4 - 2x^2$ 是偶函数, 因为

$$f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2 = f(x);$$

函数 $f(x) = x^3$ 是奇函数, 因为

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x);$$

函数 $y = \sin x$ 是奇函数, 函数 $y = \cos x$ 是偶函数, 而 $y = \sin x + \cos x$ 是非奇非偶函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称, 奇函数的图形关于原点对称.

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D . 如果存在一个不为零的正数 T , 使得对任意 $x \in D$