金牌教练

朱华伟 编著

高中

数学精典题解与评注

权威性

启迪性

针对性

XINKEBIAOXINAOSHU

珠海出版社

高三卷

责任编辑：王大凡

封面设计：李 翔

朱华伟 博士研究生，特级教师，中国数学会奥林匹克委员会委员，全国华罗庚金杯赛主试委员会委员，中国数学奥林匹克高级教练，中国数学奥林匹克（珠海）培训中心主任，享受国务院政府特殊津贴的数学专家。曾担任1996年汉城国际数学竞赛中国队教练，取得团体冠军和两枚金牌、一枚银牌、一枚铜牌的佳绩。多次担任国际数学奥林匹克中国队教练，曾任全国高中数学联赛命题组成员。连续四届担任全国华罗庚金杯赛武汉队主教练，取得团体冠军，共辅导12名学生获金牌，获全国华罗庚金杯赛金牌教练奖和伯乐奖。

ISBN 7-80689-266-4

9 787806 892664 >

ISBN 7-80689-266-4

G·313 定价：14.00元

高中数学精典题解与评注

高三卷

主编　朱华伟

珠海出版社

图书在版编目（CIP）数据

高中数学精典题解与评注．高三/朱华伟主编．—珠海：珠海出版社，2004．8

ISBN7－80689－266－4

Ⅰ．高…　Ⅱ．朱…　Ⅲ．数学课—高中—解题　Ⅳ．G634．605

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 070103 号

高中数学精典题解与评注（高三）

作　　者：朱华伟
终　　审：李向群
责任编辑：王大凡
封面设计：李　翔

出版发行：珠海出版社
地　　址：珠海市银桦路 566 号报业大厦 3 层
电　　话：0756－2639346　邮政编码：519001
邮　　购：0756－2639344　2639345　2639346
网　　址：www. zhcbs. com
E － mail：zhcbs@ zhcbs. com

印　　刷：武汉市精彩印务有限公司
开　　本：890×1240　1/32
印　　张：12．125　字数：332 千字
版　　次：2004 年 8 月第 1 版
　　　　　2004 年 8 月第 1 次印刷
印　　数：1－30000 册
书　　号：ISBN7－80689－266－4/G・313
定　　价：14 元

本书作者简介

朱华伟　博士研究生，特级教师，广州大学教育软件研究所副研究员，中国数学奥林匹克委员会委员，中国数学奥林匹克高级教练。

李小平　教育学博士，南京师范大学教育科学院博士后，发表教育学、创造学及教学教育论文30余篇。

王池富　教育硕士，武汉二中特级教师，党委书记，享受武汉市政府特殊津贴的专家。

孔　峰　教育硕士，武汉市教研室特级教师。

朱　晓　教育硕士，武汉市外国语学校高级讲师。

刘箭飞　教育硕士，武汉六中高级教师，国家级骨干教师培训班学员。

李景华　中国科学院博士研究生，北京市数学奥林匹克学校教练。

王艳艳　武汉市十一中高级教师，武汉市乔口区学科带头人。

前　言

学习数学必须演算大量的习题，但面对浩如烟海的辅导资料，遴选哪些习题给学生演练，才能既固根正本，有利于形成熟练的技能，又能培养学生的数学思维能力；对选定的题目从何处入手分析，怎样分析既符合学生知识水平现状，顺应学生已有知识结构，又有 利于培养学生举一反三触类旁通的能力；对同类习题分析解答之后如何归纳提炼出隐藏在字里行间的思想方法，以便学生形成解决问题的策略知识……这些都是数学教育工作者、家长和学生急需解决的问题。基于上述考虑，经过认真研究，我们组织学有特长教有特色研有成果的几位专家精心编撰了这套《高中数学精典题解与评注》丛书，这部丛书具有以下几方面的特色：

1. **编排体系新颖**　本书章节按新的高中数学教学大纲设置，以新编高中数学教材为依据，体现了依纲据本的原则。

2. **题目选择精当**　本书所选题目体现了典型性、新颖性、示范性、培养性和研究性，本书所遴选题目既有传统佳题，又有全国各地近几年涌现的好题，还有作者根据自己的教学实践和科研内容编撰的部分新题，这些题目涵盖了高中阶段所有的数学知识点，从这些题目中可以体会到如何深刻理解基本概念，如何牢固掌握基础知识、基本思想和方法，如何有效地培养学生应用所学数学知识解决实际问题的能力。另外，从部分自编新题中可以领略到数学问题是如何形成和提出完善的，它所渗透的创造性思维能力的培养正是目前数学教育界研究的热点问题。

3. **分析与解答讲究启蒙**　如何审题，思维从何处切入最适合学生实际，如何沟通已知与未知间的联系，思维障碍之处如何进行有效的预防和排除等，正是培养学生的高素质和能力的关键之着，也是当今教育

界正在深入探讨和研究的问题，本书对所选题目的分析与解答，注重启迪性，融解题指导与思维训练于一体，突出引导学生抓住关键、理清思路、沟通联系、学会转化，通过暴露解题思维中的启动与定向联系与转化，回顾与推广等环节，强化思维训练，突出数学思想方法的作用。

4. **问题注释有特色** 本书中很多题下有注释，这些注释的作用是对某些问题通过注释阐述分析与解答过程中意犹未尽之处，意欲画龙点睛，对可进一步深入研究的问题通过注释予以拓展引伸，意在引导学生去创造；对一题多解问题，通过注释提出相关问题，沟通特技与通法间的联系。总之，注释的目的在于，一方面提示问题的背景和来源，另一方面训练学生通过类比转化发现解决问题的思路及合理猜测提出新问题的技巧，希望学生不仅知其然，更知其所以然，以期达到授之以渔的目的。

本书既可供高中学生合理使用，又方便教师教学参考，还可供家长辅导借鉴。

虽各位作者力求不出纰漏，但由于时间仓促，加上水平限制，书中定有不尽如人意之处，敬希广大读者在使用本书过程中提出宝贵批评意见或建议，以便再版时修订，使其日臻完善！

编者

2004 年 4 月

目　　录

第十一章　概率与统计

§11.1　离散型随机变量的分布列

题 1　设某运动员投篮投中的概率为 $P=0.3$. 求一次投篮时投中次数的概率分布.

解　一次投篮的投中次数是随机变量，设为 ξ. 它取的一切可能值是 0，1，即 $x_1=0$，$x_2=1$. $\xi=0$ 表示投中 0 次，即投篮未中，其概率为 $P(0)=1-0.3=0.7$；$\xi=1$，表示投中一次，其概率 $P(1)=0.3$. 故得概率分布为

ξ	0	1
P	0.7	0.3

题 2　从一批含有 13 只正品，2 只次品的产品中，不放回地抽取 3 次，每次抽取 1 只，求抽得次品数的概率分布.

解　抽得次品个数 ξ 是随机变量，ξ 的取值是 0，1，2.

$$\because \quad P(\xi=0)=\frac{C_2^0C_{13}^3}{C_{15}^3}=\frac{22}{35},$$

$$P(\xi=1)=\frac{C_2^1C_{13}^2}{C_{13}^3}=\frac{12}{35},$$

$$P(\xi=2)=\frac{C_2^2C_{13}^1}{C_{15}^3}=\frac{1}{35}.$$

故所求的概率分布为

ξ	0	1	2
P	$\frac{22}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

题 3　从装有 6 个白球，4 个黑球和 2 个黄球的箱中随机地取出两个球，规定每取出一个黑球我们赢 2 元，而每取出一个白球我们输 1

元，取出黄球无输赢，以 ξ 表示我们赢得的钱数，随机变量 ξ 可以取哪些值呢？求 ξ 的概率分布.

解 从箱中取两个球的情形有以下六种：{2 白}，{1 白 1 黄}，{1 白 1 黑}，{2 黄}，{1 黑 1 黄}，{2 黑}. 当取到 2 白时，结果输 2 元，则 $\xi=-2$；当取到 1 白 1 黄时，我们要输 1 元，记随机变量 $\xi=-1$；当取到 1 白 1 黑时，随机变量 $\xi=1$；当取到 2 黄时，$\xi=0$；当取到 1 黑 1 黄时，$\xi=2$；当取到 2 黑时，$\xi=4$. 故 ξ 可取 $-2,-1,0,1,2,4$.

$$\because \quad P(\xi=-2)=\frac{C_6^2}{C_{12}^2}=\frac{5}{22},P(\xi=-1)=\frac{C_6^1C_2^1}{C_{12}^2}=\frac{2}{11},$$

$$P(\xi=0)=\frac{C_2^2}{C_{12}^2}=\frac{1}{66},\quad P(\xi=1)=\frac{C_6^1C_4^1}{C_{12}^2}=\frac{4}{11},$$

$$P(\xi=2)=\frac{C_4^1C_2^1}{C_{12}^2}=\frac{4}{33},\ 0(\xi=4)=\frac{C_4^2}{C_{12}^2}=\frac{1}{11}.$$

从而得到 ξ 的概率分布如下：

ξ	-2	-1	0	1	2	4
P	$\frac{5}{22}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{66}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{4}{33}$	$\frac{1}{11}$

评注 从以上 3 个例题可以看到，不少的随机试验的结果可以用数量来描述，不同结果用不同数量表示. 但是这些取值的确定带随机性，因此这些变量称为随机变量. 上述例子中随机变量取值是分开的、孤立的数值，并且这些值可以编号，这种随机变量称为离散型随机变量. 随机变量发生的可能性用随机变量的概率分布来描述. 事实上概率分布就是一个函数，ξ 是自变量，P 是 ξ 的函数. 但是对于一个概率分布来讲必须满足两个条件：

(1) $P_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots$；

(2) $P_1+P_2+\cdots=1$.

题 4　某一设备由三个独立工作的元件构成，该设备在一次试验中每个元件发生故障的概率为 0.1. 试求出该设备在一次试验中发生故障的元件数的概率分布.

解 设离散型随机变量 ξ 表示设备在一次试验中发生故障的元件数，取如下可能的值：0，1，2，3. 元件发生故障是独立的，每个元件发生故障的概率相等. 本题 $n=3, p=0.1, q=0.9$.

$$P(\xi=0)=q^3=0.9^3=0.729,$$

$$P(\xi=1)=C_3^1 pq^2=3\times0.1\times0.9^2=0.243,$$

$$P(\xi=2)=C_3^2 p^2 q=3\times0.1^2\times0.9=0.027,$$

$$P(\xi=3)=p^3=0.1^3=0.001.$$

∴ ξ 的概率分布是：

ξ	0	1	2	3
P	0.729	0.243	0.027	0.001

题 5 两颗骰子同时投掷两次，离散型随机变量 ξ 表示在这两次投掷中两颗骰子同时出现偶数的次数，ξ 服从二项分布. 试求 ξ 的概率分布.

解 显然 $\xi=0,1,2$.

$$P(\xi=0)=C_2^0\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16},$$

$$P(\xi=1)=C_2^1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^1=\frac{6}{16},$$

$$P(\xi=2)=C_2^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^0=\frac{1}{16}.$$

∴ ξ 满足二项分布是

ξ	0	1	2
P	$\frac{9}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{1}{16}$

题 6 设随机变量 ξ 服从二项分布，其概率分布是 $P(\xi=k)=C_n^k p^k q^{n-k}(k=0,1,2\cdots n)$. 问 k 何时能使 $P(\xi=k)$ 最大？

解 ∵ $0<p<1$，有 $\dfrac{C_n^k p^k q^{n-k}}{C_n^{k-1} p^{k-1} q^{n-k+1}}=\dfrac{(n-k+1)p}{kq}$

$$=1+\frac{(n+1)p-k}{kq}.$$

当 $k<(n+1)p$ 时，$C_n^k p^k q^{k-1}>C_n^{k-1}p^{k-1}q^{n-k+1}$；

当 $k=(n+1)p$ 时，$C_n^k p^k q^{k-1}=C_n^{k-1}p^{k-1}q^{n-k+1}$；

当 $k>(n+1)p$ 时，$C_n^k p^k q^{k-1}<C_n^{k-1}p^{k-1}q^{n-k+1}$.

∴ 如果 $(n+1)p$ 是整数，那么当 $k=(n+1)p-1$ 或 $k=(n+1)p$ 时，$P(\xi=k)$ 最大；

如果 $(n+1)p$ 不是整数，那么 $k=(n+1)p$ 时，$P(\xi=k)$ 最大.

题 7　由长期观察，商场获得一位顾客进该商场购买商品件数 $\xi=0,1,2,\cdots,5$ 的概率分布如下：

ξ	0	1	2	3	4	5
P	0.11	0.33	0.31	0.12	0.09	0.04

求顾客在商场选购 1 至 3 件商品的概率是多少？

解　$P(1\leqslant\xi\leqslant3)=P(\xi=1)+P(\xi=2)+P(\xi=3)$

$=0.33+0.31+0.12$

$=0.76.$

评注　一般地，离散型随机变量在某一范围内取值的概率等于它取这个范围内各个值的概率之和.

题 8　一射手向靶子进行射击. 射中区域Ⅰ得 3 分，射中区域Ⅱ得 2 分，射中区域Ⅲ得 1 分. 于是他一次射击可能得的分数是 1,2,3. 用 P_1,P_2,P_3 分别表示得分 1,2,3 的概率. 设甲射手的得分为 ξ. 乙射手的得分为 η. 已知甲，乙射手得分的概率分布分别为：

ξ	1	2	3
P	0.6	0.3	0.1

η	1	2	3
P	0.3	0.5	0.2

试求随机变量 $\xi+\eta$ 的概率分布.

解 $\xi+\eta$ 的取值范围是 2,3,4,5,6.

首先确定两射手联合射击的所有可能得分及其相应概率，为此列出下表

甲乙两射手得分情况表

射击结果序号	ξ	η	$\xi+\eta$	结果的概率
(1)	1	1	2	$0.6\times0.3=0.18$
(2)	1	2	3	$0.6\times0.5=0.30$
(3)	1	3	4	$0.6\times0.2=0.12$
(4)	2	1	3	$0.3\times0.3=0.09$
(5)	2	2	4	$0.3\times0.5=0.15$
(6)	2	3	5	$0.3\times0.2=0.06$
(7)	3	1	4	$0.1\times0.3=0.03$
(8)	3	2	5	$0.1\times0.5=0.05$
(9)	3	3	6	$0.1\times0.2=0.02$

从而可以列出 $\xi+\eta$ 的概率分布：

$\xi+\eta$	2	3	4	5	6
P	0.18	0.39	0.30	0.11	0.02

题 9　设有 12 台独立运转的机器，在一小时内每台机器停车的概率都是 0.1，试求机器停车的台数不超过 2 的概率.

解　以 ξ 表示一小时内机器停车的台数. 因为每台机器只有“停车”与“不停车”两个状态，而且机器是互相独立地运转的，所以，ξ 服从二项分布，有

$$P(\xi=0)=0.9^{12}=0.2824,$$

$P(\xi=1)=C_{12}^{1}\times0.1\times0.9^{11}=0.3766$,

$P(\xi=2)=C_{12}^{2}\times0.1^{2}\times0.9^{10}=0.2301$,

从而 $P(\xi\leqslant2)=P(\xi=0)+P(\xi=1)+P(\xi=2)=0.8891$.

题 10　对某一目标进行射击,直到击中时为止.如果每次射击命中率为 p,求射击次数的概率分布.

解　设 ξ 表示命中的次数,则 $P(\xi=1)=p$;

$\xi=2$,表示射击 2 次,第 1 次未中概率 $(1-p)=q$,

∴　$P(\xi=2)=pq$;

$\xi=3$,表示射击 3 次,第 1,2 次未中,第 3 次命中,$P(\xi=3)=pq^2\cdots$

∴　ξ 的概率分布:

ξ	1	2	3	4	5	…	n	…
P	p	pq	pq^2	pq^3	pq^4	…	pq^{n-1}	…

题 11　某学生回答了卷面上的问题以后,还要回答补充题,仅当该学生回答不出补充题时,教员才不再提问.该学生能答出任何一个补充题的概率等于 0.9.

(1)求教员提问补充题的个数即离散型随机变量 ξ 的概率分布;

(2)求所提补充题的最可能的个数 k_0 值.

解　(1)离散型随机变量 ξ 的取值 $1,2,\cdots,k,\cdots$

$P(\xi=1)=1-0.9=0.1$;

$\xi=2$ 时表示学生答出第 1 个补充题而回答不出第 2 个补充题:

$P(\xi=2)=0.9\times0.1=0.09$;

类似地,$P(\xi=k)=0.9^{k-1}\times0.1$;…

故所求概率分布为

ξ	1	2	3	…	k	…
P	0.1	0.09	0.081	…	$0.9^{k-1}\times0.1$	…

(2)所提补充题的最可能个数 k_0,即对应于随机变量 ξ 以最大的概

率取得的那个值. 这里为 $k_0=1$.

题 12　已知随机变量 ξ 所有可能取的值是 $1,2,3,\cdots,n$，且取这些值的概率依次为 $k,2^2k,3^2k,\cdots,n^2k$. 求常数 k.

解　根据概率分布的性质可知，

$$k+2^2k+3^2k+\cdots+n^2k=1,$$

$$k(1^2+2^2+\cdots+n^2)=1,$$

$$k=\frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}=\frac{6}{n(n+1)(2n+1)}.$$

题 13　已知随机变量 ξ 所有可能取值为 $1,2,3,\cdots$ 且取这些值的概率依次为 $\frac{1}{2}q,\frac{1}{2}q^2,\frac{1}{2}q^3,\cdots$ 求常数 q.

解　根据概率分布的性质可知，

$\frac{1}{2}q+\frac{1}{2}q^2+\frac{1}{2}q^3+\cdots=1$，从而可知 $|q|<1$.

$$\therefore\quad \frac{\frac{1}{2}q}{1-q}=1,\therefore\quad q=\frac{2}{3}.$$

题 14　直线上有一质点，每经一个单位时间，它以概率 p 向右移动一格，或以概率 $1-p$ 向左移动一格. 设质点在时刻 0 从原点出发，并且每次移动是互相独立的，求在时刻 n 质点的位置 S_n 的概率分布.

解　在时刻 n 质点可能到达的位置为：

$-n,-n+2,\cdots,n-2,n$. 这就是 S_n 的可能取值.

由于 ξ_n 表示在 n 次移动中，质点向右移动的次数，那么 ξ_n 服从二项分布.

$P(\xi_n=i)=C_n^ip^i(1-p)^{n-i}(i=0,1,2,\cdots,n)$.

由于质点向右移动了 ξ_n 格，向左移动了 $n-\xi_n$ 格，所以在时刻 n 质点的位置为

$S_n=\xi_n-(n-\xi_n)=2\xi_n-n$,

$P(S_n=2i-n)=C_n^ip^i(1-p)^{n-i}(i=0,1,\cdots,n)$ 为所求 S_n 的概率分布.

§11.2 离散型随机变量的期望与方差

题 15 某工厂生产的产品，一等品占$\frac{1}{2}$，二等品占$\frac{1}{3}$，次品占$\frac{1}{6}$. 如果生产一件次品，工厂损失 1 元，而一件一等品获利 2 元，一件二等品获利 1 元. 假设工厂生产了大量这样的产品，问每件产品可以期望得到多少利润?

解 用 x 表示每件产品的利润，也就是卖出一件产品所得利润. 由于卖出产品的质量不同，所得利润也不同，因此 x 是一个随机变量. 依题意，ξ 具有以下的概率分布

$$\xi \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

若工厂生产了 n 件产品，其中一等品 n_1 件，二等品 n_2 件，次品 n_3 件，$n_1+n_2+n_3=n$，则这 n 件产品每件的平均利润是

$$\frac{2n_1+n_2+(-1)n_3}{n}=2\cdot\frac{n_1}{n}+1\cdot\frac{n_2}{n}+(-1)\frac{n_3}{n}.$$

注意到$\frac{n_1}{n}$，$\frac{n_2}{n}$，$\frac{n_3}{n}$分别是 n 件产品中一等品、二等品及次品出现的频率. 如果 n 充分大，可以期望$\frac{n_1}{n}$接近$\frac{1}{2}$，$\frac{n_2}{n}$接近$\frac{1}{3}$，$\frac{n_3}{n}$接近$\frac{1}{6}$. 也就是说，当 n 充分大时，每件产品的平均利润将接近

$$2\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{3}+(-1)\times\frac{1}{6}=\frac{7}{6}(\text{元}).$$

这就说明，若该厂生产了大量产品，可以期望每件产品平均可获得$\frac{7}{6}$元的利润，数$\frac{7}{6}$就称为随机变量 ξ 的数学期望或均值，记为 $E\xi=\frac{7}{6}$.

评注 此题说明随机变量的数学期望反映了随机变量取值的平均大小. 从整体上反映了随机变量取值的一个整体趋势.

题 16 一射手向图中所示的靶子进行射击，射中区域 Ⅰ 得 3 分，射中区域 Ⅱ 得 2 分，射中区域 Ⅲ 得 1 分. 已知甲、乙两射手的得分概率分布为