21世纪高等院校教材

线性代数与几何引论

樊 恽 郑延履 编

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

线性代数与几何引论

樊 恽 郑延履 编

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书以严谨的思路、灵活的方式讲述了高等院校线性代数与解析几何课程的内容，既突出了线性代数作为各专业公共课程的工具性和操作性，也反映了线性代数与解析几何、多项式知识的思想性以及它们之间的联系. 本书在节后都配备了一定数量的基本练习题，在章后备有综合性强一点的习题，书后附有答案或提示.

遵循按需选取的原则，本书既可作为大学非数学专业学生的教学用书，也可作为大学数学各专业学生的教学用书，对相关专业的老师也具有很好的参考价值.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与几何引论/樊恽，郑延履编. —北京：科学出版社，2004

21世纪高等院校教材

ISBN 7-03-013016-2

Ⅰ. 线… Ⅱ. ①樊…②郑… Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教材 ②解析几何-高等学校-教材 Ⅳ. ①O151. 2②O182

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第023317号

责任编辑：杨 波 李鹏奇 / 责任校对：朱光光
责任印制：安春生 / 封面设计：黄华斌 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004年8月第 一 版 开本：B5 (720×1000)
2004年8月第一次印刷 印张：25
印数：1—3 000 字数：475 000

定价：30.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

前　言

线性代数是高等院校最基础的代数课程，不论是数学专业还是非数学专业都作为必修必考内容，但不同专业的线性代数课程教学内容和教学要求有所不同．作者经历了多年的不同专业的线性代数课程的教学实践和教学改革，试图把积累的素材综合而又简捷地编写出来，以适应不同专业的教学需求，这是编写本教材的初衷．

线性代数作为各专业的公共课程比较重视它的工具性和操作性，这在多年的考研中有所反映．作者的教学实践积累的素材也反映在这里．

线性代数与解析几何、多项式知识有紧密联系，数学专业还应该重视其思想性．线性代数研究向量空间及其线性变换、双线性型和二次型，本质上说它们具有几何风格，坐标和矩阵是其数量形式．多项式确定的曲面是解析几何的研究对象，而多项式本身也是线性代数的重要工具．从这样的思想线索出发，近年来作者把线性代数、解析几何以及多项式基础知识融合为一门课程进行教学．从作者的实践来看，这个综合课程可以较好地体现和实现几何思想与代数思想的交叉、转换和融合．

为把这些素材综合反映出来，适应不同层次的需要，作者采用近似于模块式的结构，使得模块之间逻辑依赖关系不复杂，按从左向右的次序勾画在图 1 中，便于按不同要求做不同的选取组合．思想关系则通过评注、例题等来表达．

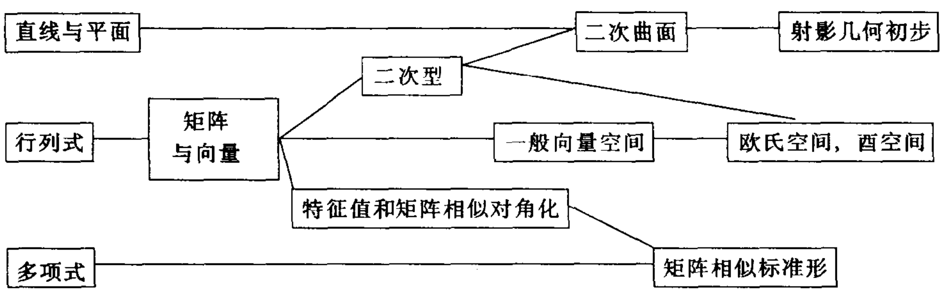

图 1

这样就可作为几个层次的教材使用，例如 (1 学分约占 18 学时)：

* 中路的 4 个方块：行列式，矩阵与向量，特征值和矩阵相似对角化，二次型，构成非数学专业的一个 4 学分课程；包括了考非数学专业研究生的线性代数方面的全部内容和常见技巧．

* 对某些要求稍高的非数学专业 (如某些理工科专业) 则可在上列基础上加上某些章节，如直线和平面、二次曲面、极小多项式 (7.1 节) 等．

* 对于综合大学或师范院校的数学系，本书全部内容可作为高等代数与解析

几何课程合并开设的 14 学分课程的教材.

* 作为综合大学或师范院校的数学系的合并开设的 12 学分课程, 则可略去相似标准形和射影几何.

* 略去方框图的第一行, 就是一个数学专业的线性代数 (高等代数) 的完整课程, 可设为 11 学分左右. 再略去相似标准形一章可减为 10 学分左右, 本章是相似不变量和若尔当标准形的证明等稍难的内容. 若尔当标准形定理本身及应用例题在特征值和矩阵相似对角化一章已作介绍.

每章内各节的安排也有灵活性, 例如行列式一章的行列式的计算一节完全可以留给学生自己阅读. 每节后配备习题, 按我们的教学实践, 学生完成它们后可得到应有的训练. 每章最后还有适量的补充习题 (编号都为 B, 如第三章补充题标题为 "习题 3.B "), 这样可适应多层次需求, 如作为课后作业, 供习题课例题选讲, 供考研复习等. 书后附有习题答案或提示.

最后介绍一下本书的思想构思.

线性代数可分为三大部分: 线性部分、相似标准形和二次部分. 本书每部分按建立概念框架、提出基本问题、解决基本问题、应用的思路展开, 概念和问题都建立在相对具体的引例和模型上. 每部分包含一个应用实例, 分别是里昂捷夫经济模型、列斯里群体模型、最小平方逼近和广义逆. 解析几何分成两部分, 直线和平面部分放在最前面, 它也为建立一般向量空间概念和某些线性代数技巧奠定基础. 这一部分对于公共课的线性代数也有好处. 二次曲面和射影几何则放在二次型之后, 利用主轴定理对二次曲面分类. 这蕴含用变换群对几何分类的思想, 在附录中有所反映. 由于矩阵 (线性变换) 的相似不变量由多项式给出, 有关多项式的初等内容一章放在矩阵的相似分类之前.

在实现这个整体框架时, 内容力求精练, 处理力求简洁, 突出主要思想技巧, 尽量避免重复, 以达到简捷的目的. 例如, 线性方程组部分不再独占篇幅, 而是把它作为引例, 导入数组向量空间和矩阵概念, 以消去法即矩阵的初等变换为基本思想技巧, 导出关于矩阵的秩的基本定理, 再作为应用得出关于线性方程组的基本理论和计算技巧, 这构成矩阵与向量一章. 这样, 在不大的篇幅中既容纳了基本内容, 也介绍了思想技巧, 还包括了具体操作技巧.

作者虽然工作努力, 但实践和认识毕竟有限, 而且基础教学改革确实任重道远, 本书不足之处在所难免, 诚望读者不吝赐教.

编者

编写体例说明

1. 本书按照知识要点，如重要概念、定理、命题、推论、重要公式、重要注解等，采用统一的三级编号方式，例如：“ 3.4.10 定理”，表示第 3 章第 4 节第 10 条，它是一个定理；引用时就说“定理 3.4.10 ”. 定义、命题、推论、公式、注解等都按此编排. 有时更简短地说“ …… 在 6.2.3 后 …… ”，是指第 6 章第 2 节的第 3 条后. 这样在查找时就不需区分知识要点类别，只按序号搜索，方便快捷一些.

2. 本书一些重要例子因其重要性也纳入三级编号，便于其他地方引用. 一般例题则未纳入三级编号，只是按节顺次排序.

3. 本书一些重要公式因重要性也纳入三级编号，便于后面反复引用. 较长推导环节中的一些公式只需临时标记、后面也没有再次引用的，没有纳入三级编号.

4. 本书每节都安排了习题 (按习题 1.1, 习题 1.2 等顺次编号)，除第 2 章外，每章都安排了补充习题 (按习题 1.B, 3.B, 4.B 等顺次编号). 引用习题时，“习题 1··· ”是说本节习题 1；而“习题 3.1.1 ”是说第 3 章第 1 节的习题 1.

符 号 说 明

对全书使用符号的惯例和在较多地方出现的符号作一简短说明:

$\mathbb{F}$, 表示一个数域; $\mathbb{Q}$、$\mathbb{R}$、$\mathbb{C}$, 分别表示有理数域、实数域、复数域

i, 表示虚数单位, 即 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ (i, j 等常用来表示跑动标号)

$\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, 表示从 n 个东西选取 k 个的组合数

小写英文字母 a, b, c 等, 常表示数

大写英文字母 A, B, C 等, 常表示矩阵

大写英文字母 V, U, W 等, 常表示向量空间; $W \leqslant V$, 表示 W 是 V 的子空间

花写英文字母 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ 等, 常表示线性变换

小写希腊字母 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 等, 常表示向量

(很多地方, 多项式的变元 (不定元) 用 λ 表示)

$\overrightarrow{AB}$, 表示以 A 为起点以 B 为终点的向量

$\operatorname{diag}(d_1, \cdots, d_n)$, 表示对角线元为 $d_1, \cdots, d_n$ 的对角矩阵

A', 表示矩阵 A 的转置矩阵; $(x_1, \cdots, x_m)'=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, 表示列向量

(但在第 10 章、第 11 章, 用 A^{T} 记转置矩阵)

$\overline{A}'$, 表示矩阵 A 的转置共轭矩阵

A^*, 表示矩阵 A 的伴随矩阵

$A\begin{pmatrix} i_1, \cdots, i_\ell \\ j_1, \cdots, j_m \end{pmatrix}$, 表示矩阵 A 的第 $i_1, \cdots, i_\ell$ 行, 第 $j_1, \cdots, j_m$ 列决定的子矩阵

$\operatorname{tr} A$, 表示矩阵 A 的迹

$|A|$ 或 $\det A$, 表示矩阵 A 的行列式

$\operatorname{rank} A$, 表示矩阵 A 的秩

$\Delta_A(\lambda)$, 表示矩阵 A 的特征多项式

$m_A(\lambda)$, 表示矩阵 A 的极小多项式

$\langle\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\rangle$, 表示欧氏空间的内积

$\deg f(x)$, 表示多项式 $f(x)$ 的次数

$\gcd(f(x), g(x))$, 表示多项式 $f(x), g(x)$ 的最大公因式

$\min\{a, b, \cdots\}$, 表示 a, b, $\cdots$ 中最小的数

$\max\{a, b, \cdots\}$, 表示 a, b, $\cdots$ 中最大的数

$\mathrm{L}(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k)$, 表示由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_k$ 生成的子空间

$\mathbb{F}[\lambda]$, 表示数域 $\mathbb{F}$ 上的所有多项式的集合

$\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$, 表示数域 $\mathbb{F}$ 上的所有 $m\times n$ 矩阵的集合

$\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, 表示数域 $\mathbb{F}$ 上的所有 n 阶方阵的集合

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, 表示数域 $\mathbb{F}$ 上的所有 n 阶可逆方阵的集合

目　录

第 1 章　直线与平面

解析几何用代数方法研究几何问题. 在空间建立坐标系后, 几何对象和代数形式之间就有了相互转换的桥梁,几何问题有了代数表达,代数问题有了几何形象.

本章讨论空间向量及其运算, 并用于讨论直线与平面, 它们也是线性代数的极好思想模型.

1.1　空间向量

本节包括 3 个内容: 向量及其线性运算; 向量的共线共面问题; 向量、点、坐标之间的一一对应. 注意, 恒以 $\mathbb{R}$ 记所有实数的集合, $\mathbb{R}$ 与实数轴上的点一一对应.

1. 向量及其线性运算

物理学提供了空间向量的典型模型: 如速度、加速度、力等. 它们的共同特点是具有两个要素: 大小和方向.

因此, 在解析几何中, 称有大小、有方向的量为 *向量*. 本书中向量通常用小写希腊字母 α, β 等标记. 向量 α的大小称为*绝对值*, 或称*长度*, 或称*模*, 记作 $|\alpha|$. 如果向量 α与 β 大小相等, 方向相同, 则称为相等的向量, 记作 $\alpha = \beta$.

注 (1) 在物理中通常说的力、速度等还有一个要素: 作用点 (起点). 我们暂不考虑 "作用点" 这个要素, 从某种意义来说这个要素是力和速度等具体实现时的要素. 因此上面说的向量也称为 *自由向量*.

(2) 由空间两点 A, B, 以 A 为起点以 B 为终点决定的向量可记作 $\overrightarrow{AB}$. 但是注意, 按照上面说的向量的意义, 如果向量 $\overrightarrow{CD}$ 经过平移后可重合于 $\overrightarrow{AB}$, 则作为向量有 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ (如图 1.1.1).

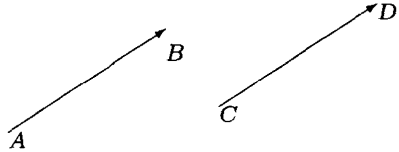

图 1.1.1

(3) 长度为零的向量称为零向量, 记作 $\mathbf{0}$. 零向量是一个特殊的向量, 它无方向, 或者说具有任意方向. 对作为向量的两要素之一的方向来说, 这是惟一例外.

从物理和几何的背景, 有几种关于向量的运算, 先定义两种基本运算.

1.1.1 定义 (1) 向量加法 (平行四边形法则或三角形法则): 对用起点终点表示的向量, 向量加法的三角形法则表现为: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, 如图 1.1.2.

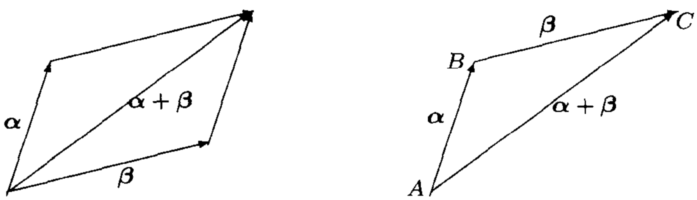

图 1.1.2

(2) 实数乘向量: 设 k 为实数, $\boldsymbol{\alpha}$ 为向量. 向量 $k\cdot\boldsymbol{\alpha}$(简记为 $k\boldsymbol{\alpha}$) 定义为

$$|k\cdot\boldsymbol{\alpha}|=|k|\cdot|\boldsymbol{\alpha}|;\qquad \text{方向:}\ \begin{cases}\text{与 }\boldsymbol{\alpha}\text{ 同向,} & \text{若 } k>0,\\ \text{与 }\boldsymbol{\alpha}\text{ 反向,} & \text{若 } k<0,\\ \text{任意方向,} & \text{若 } k=0.\end{cases}$$

这两种运算称为向量的线性运算.

1.1.2 向量线性运算的性质 (以下 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 为任意向量, k,l 为任意实数).

基本性质:

(V1) 加法交换律: $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$.

(V2) 加法结合律: $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$.

(V3) 零向量特征: $\mathbf{0}+\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}$.

(V4) 负向量存在: 对任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 存在向量 $\boldsymbol{\alpha}^*$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha}^*=0=\boldsymbol{\alpha}^*+\boldsymbol{\alpha}$. 显然, 这个 $\boldsymbol{\alpha}^*$ 就是 $(-1)\boldsymbol{\alpha}$, 它是与 $\boldsymbol{\alpha}$ 大小相等方向相反的向量, 我们把它记作 $-\boldsymbol{\alpha}$, 即 $-\boldsymbol{\alpha}=(-1)\boldsymbol{\alpha}$, 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量.

(V5) 数乘结合律: $(kl)\boldsymbol{\alpha}=k(l\boldsymbol{\alpha})$.

(V6) 数乘对向量加法分配律: $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$.

(V7) 数乘对实数加法分配律: $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$.

(V8) 数乘幺模性: $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$.

这些性质都可以从定义直接予以验证, 有些看起来甚至可以说是再明显不过的, 如 (V3), (V4), (V8) 等. 但它们将成为以后进一步研究的出发点, 所以列为基

本性质. (V2) 的证明如图 1.1.3 所示:

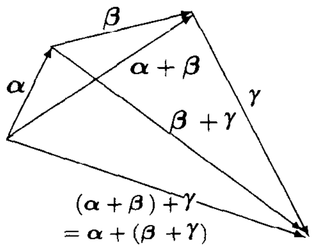

图 1.1.3

向量减法定义为 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta})$, 这与数的减法定义类似, 可读作 "减去一个向量等于加上它的相反的向量". 对由点决定的向量, 减法法则表现为 $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$. 向量减法如图 1.1.4 所示.

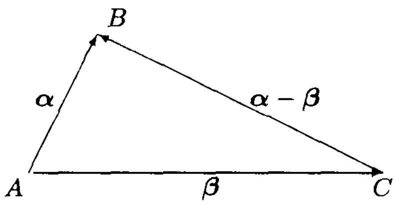

图 1.1.4

还有几个性质, 它们可由定义直接推出也可由基本性质导出.

(V9) $k\boldsymbol{\alpha}=0 \iff$ 或者 $k=0$, 或者 $\boldsymbol{\alpha}=0$.

(V10) 符号法则 $-(-\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}, (-k)\boldsymbol{\alpha}=-k\boldsymbol{\alpha}=k(-\boldsymbol{\alpha})$, (特别地, $(-1)\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}$).

(V11) 减法符号法则 $\boldsymbol{\alpha}-(\boldsymbol{\beta}+\gamma)=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}-\gamma, \boldsymbol{\alpha}-(\boldsymbol{\beta}-\gamma)=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}+\gamma$.

例题 1 设 M 是三角形 ABC 的重心, O 是 (空间中) 任意一点. 证明:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\cdot\overrightarrow{OM}.$$

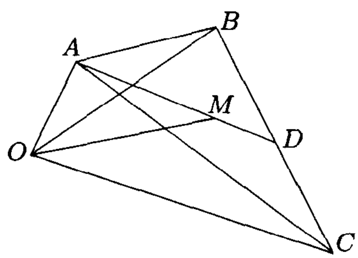

图 1.1.5

证 如图 1.1.5 取边 BC 的中点 D, 则 $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=0$, $\overrightarrow{MA}+2\cdot\overrightarrow{MD}=0$. 故

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\\
=&\ \overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DB})+(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC})\\
=&\ \overrightarrow{OA}+2\cdot\overrightarrow{OD}+(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC})\\
=&\ (\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA})+2\cdot(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MD})\\
=&\ 3\cdot\overrightarrow{OM}+(\overrightarrow{MA}+2\cdot\overrightarrow{MD})\\
=&\ 3\cdot\overrightarrow{OM}.
\end{aligned}$$

2. 向量的共线与共面问题

1.1.3 定义 称几个向量*共线*(或*共面*), 如果把它们的起点重合时它们在一条直线上 (或在一个平面上).

注 (1) 零向量与任何向量共线、共面.

(2) 共线的向量也可作为共面的向量, 但反之不然.

(3) 如果几个向量共面, 那么它们的一部分当然也共面.

1.1.4 命题 *若向量 $\boldsymbol{\alpha}\neq 0$, 则向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 共线当且仅当存在实数 k 使得 $\boldsymbol{\beta}=k\boldsymbol{\alpha}$.*

证 必要性. 设向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 共线. 由 $\boldsymbol{\alpha}\neq 0$, 得知 $\dfrac{1}{|\boldsymbol{\alpha}|}\boldsymbol{\alpha}$ 是与 $\boldsymbol{\alpha}$ 同向的单位长的向量, 见习题 1; 而 $\boldsymbol{\beta}$ 的长度为 $|\boldsymbol{\beta}|$, 所以

$$\boldsymbol{\beta}=\begin{cases}\dfrac{|\boldsymbol{\beta}|}{|\boldsymbol{\alpha}|}\boldsymbol{\alpha}, & \text{若 } \boldsymbol{\beta} \text{ 与 } \boldsymbol{\alpha} \text{ 同向},\\ -\dfrac{|\boldsymbol{\beta}|}{|\boldsymbol{\alpha}|}\boldsymbol{\alpha}, & \text{若 } \boldsymbol{\beta} \text{ 与 } \boldsymbol{\alpha} \text{ 反向};\end{cases}$$

即存在实数 k 使得 $\boldsymbol{\beta}=k\boldsymbol{\alpha}$.

充分性. 如果 $\boldsymbol{\beta}=k\boldsymbol{\alpha}$, 按实数乘向量的定义, 马上得知 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 共线. □

1.1.4′ 推论 *两个向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 共线当且仅当存在不全为零的实数 k,l 使得*

$$k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}=0.$$

证 如果 $\boldsymbol{\alpha}=0$, 则 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 共线而且 $1\cdot\boldsymbol{\alpha}+0\cdot\boldsymbol{\beta}=0$, 即结论与条件都成立, 所以推论成立. 下设 $\boldsymbol{\alpha}\neq 0$.

如果 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 共线, 由上述命题有实数 k 使得 $\boldsymbol{\beta}=k\boldsymbol{\alpha}$, 即 $k\boldsymbol{\alpha}+(-1)\cdot\boldsymbol{\beta}=0$ 且其中系数不全为零.

反过来, 设 $k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}=0$ 且 k 与 l 不全为零, 那么可以肯定 $l\neq 0$, 否则, $k\boldsymbol{\alpha}=0$ 但 $k\neq 0$, 于是 $\boldsymbol{\alpha}=0$, 这与已设 $\boldsymbol{\alpha}\neq 0$ 相矛盾, 所以 $\boldsymbol{\beta}=\dfrac{-k}{l}\boldsymbol{\alpha}$. 仍由上述

命题，α 与 β 共线. □

注 实际上推论 1.1.4′ 比命题 1.1.4 的蕴含意义更广泛，但命题 1.1.4 看起来更直观. 下面的命题 1.1.5 和命题 1.1.5′ 是同样情形.

1.1.5 命题 *设 α, β 不共线，则 γ 与 α, β 共面当且仅当存在实数 k, l 使得 $\gamma = k\alpha + l\beta$.*

证 必要性. 设 γ 与 α, β 共面. 如图 1.1.6 把 3 个向量的起点重合，由于 α, β 不共线，它们构成斜坐标系；而由命题 1.1.4, γ 在两坐标轴上的投影可分别写成 $\gamma_\alpha = k\alpha$ 和 $\gamma_\beta = l\beta$；由平行四边形法则得 $\gamma = k\alpha + l\beta$.

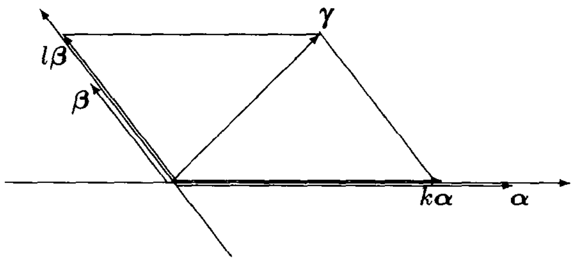

图 1.1.6

充分性. 由 $\gamma = k\alpha + l\beta$，按向量加法平行四边形法则即知 γ 与 α, β 共面. □

1.1.5′ 推论 *3 个向量 α,β,γ 共面当且仅当存在不全为零的实数 k,l,m 使得*

$$k\alpha + l\beta + m\gamma = 0.$$

证 如果 α, β 共线，则 α, β, γ 当然共面；而此时，有不全为零的实数 k, l 使得 $k\alpha + l\beta = 0$, 从而 $k\alpha + l\beta + 0 \cdot \gamma = 0$, 其中系数不全为零，所以断言成立.

以下设 α, β 不共线. 如果 α, β, γ 共面，由命题 1.1.5, 有实数 k, l 使得 $\gamma = k\alpha + l\beta$, 于是 $k\alpha + l\beta + (-1) \cdot \gamma = 0$, 其中系数不全为零.

反过来，设 $k\alpha + l\beta + m\gamma = 0$, 其中 k, l, m 不全为零. 首先可肯定 $m \neq 0$, 否则，$k\alpha + l\beta = 0$、但 k, l 不全为零，于是 α, β 共线；这与已设 α, β 不共线相矛盾. 那么 $\gamma = -\dfrac{k}{m}\alpha - \dfrac{l}{m}\beta$. 由命题 1.1.5, 得 α, β, γ 共面. □

注 称这种向量 $k\alpha + l\beta + m\gamma$ 为向量组 α, β, γ 的线性组合, 其中 k, l, m 为组合系数. 另一方面，如果 $\gamma = k\alpha + l\beta$, 则说 γ 是 α, β 的线性组合，或说 γ 由 α, β 线性表出.

1.1.6 例 设 A, B, C, O 是空间 4 点. 证明：

(1) 点 A, B, C 共线当且仅当存在不全为零的实数 a, b, c, 满足 $a+b+c=0$, 使得 $a \cdot \overrightarrow{OA} + b \cdot \overrightarrow{OB} + c \cdot \overrightarrow{OC} = 0$.

(2) 如果 A, B 是不同两点，则 A, B, C 共线当且仅当存在实数 a, b, 满足

$a+b=1$, 使得 $\overrightarrow{OC}=a\cdot\overrightarrow{OA}+b\cdot\overrightarrow{OB}$.

(3) 如果 A, B 是不同两点, 则 C 在 A 与 B 连成的线段内 (线段上包括端点) 当且仅当存在正实数 (非负实数)a, b, 满足 $a+b=1$, 使得 $\overrightarrow{OC}=a\cdot\overrightarrow{OA}+b\cdot\overrightarrow{OB}$.

证 (1) 设 A, B, C 共线. 那么向量 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 共线, 也就是向量 $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$ 与向量 $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ 共线, 故有不全为零的实数 k, l 使得

$$k(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})+l(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=0,$$

即

$$k\cdot\overrightarrow{OC}+l\cdot\overrightarrow{OB}+(-k-l)\cdot\overrightarrow{OA}=0,$$

其中的组合系数 k, l, $-k-l$ 不全为零而它们之和 $k+l+(-k-l)=0$.

反过来, 我们假设存在不全为零的实数 a, b, c 满足 $a+b+c=0$, 它们使得 $a\cdot\overrightarrow{OA}+b\cdot\overrightarrow{OB}+c\cdot\overrightarrow{OC}=0$, 也就是

$$a(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})+b(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})+(a+b+c)\cdot\overrightarrow{OC}=0,$$

由于 $a+b+c=0$, 得

$$a(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})+b(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})=0,$$

其中 a, b 不全为零, 否则, 会得 $c=0$, 与 a, b, c 不全为零相矛盾. 所以向量

$$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}\quad 与\quad \overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$$

共线, 故得 A, B, C 共线.

(2) 由于 $\overrightarrow{AB}\neq 0$, 故点 C 与点 A, B 共线当且仅当存在实数 k 使得 $\overrightarrow{AC}=k\cdot\overrightarrow{AB}$.

先设点 C 与点 A, B 共线, 即 $\overrightarrow{AC}=k\cdot\overrightarrow{AB}$, 故 $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=k(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$, 即

$$\overrightarrow{OC}=(1-k)\overrightarrow{OA}+k\cdot\overrightarrow{OB}, \tag{*}$$

且其中 $(1-k)+k=1$.

反过来, 设 $a+b=1$ 且 $\overrightarrow{OC}=a\cdot\overrightarrow{OA}+b\cdot\overrightarrow{OB}$. 由 $a+b=1$ 可作如下计算:

$$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(a-1)\overrightarrow{OA}+b\cdot\overrightarrow{OB}=b(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}), \tag{**}$$

即 $\overrightarrow{AC}=b\cdot\overrightarrow{AB}$, 于是点 C 与点 A, B 共线.

(3) 如果 C 在 A 与 B 连成的线段上 (包括端点), 那么从 (2) 的证明可知: $\overrightarrow{AC}=k\cdot\overrightarrow{AB}$ 且 $0\leqslant k\leqslant 1$, 则 (*) 式中的两个系数 $1-k$ 与 k 都非负.

反过来, 如果非负实数 a, b 满足 $a+b=1$ 使得 $\overrightarrow{OC}=a\cdot\overrightarrow{OA}+b\cdot\overrightarrow{OB}$, 那么 $0\leqslant b\leqslant 1$, 由 (**) 式, C 在 A 与 B 连成的线段上 (包括端点).