1960

上海市科学技术论文选集

数学 · 化学

1960

上海市科学技术论文选集

数学·化学

上海市科学技术论文编选委员会

上海科学技术出版社

1960
上海市科学技术论文选集
数学·化学
上海市科学技术论文编选委員会
*
上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
上海市书刊出版业营业許可証出093号
新华书店上海发行所发行　各地新华书店經售
商务印书館上海厂印刷
*
开本787×1092 1/16　印張12 8/16　插頁2　字數239,000
1962年8月第1版　1962年8月第1次印刷
印數 1—3,070（其中精裝70册）

統一书号：13119 · 468
定　价：（十四）1.95元

目　录

关于高維射影空間共軛网論的研究*

苏 步 青
(复旦大学)

【摘要】 在 n 維射影空間 S_n 里，設二共軛网 $A_i(u,v)$ 和 $A_i'(u,v)$ 以网曲綫 (u,v) 互相对应，而且設有关的拉普拉斯叙列是 $\{\cdots,A_{i-k-1},\cdots,A_{i-1},A_i,A_{i+1},\cdots,A_{i+k+1},\cdots\}$ 和 $\{\cdots,A'_{i-k-1},\cdots,A'_{i-1},A'_i,A'_{i+1},\cdots,A'_{i+k+1},\cdots\}$，把 $A_r(u,v)$ 和 $A'_r(u,v)$ 看作对应网 $(r=\cdots,i-1,i,i+1,\cdots)$ 并且把两个 k 維空間 $\Sigma_r=[A_{r-k-1}A_{r-k}\cdots A_{r-1}]$ 和 $\Sigma'_r\equiv[A'_{r-k-1}A'_{r-k}\cdots A'_{r-1}]$ 看作对应的空間。我們所获得的主要定理是：

I. 如果二对对应的空間 Σ_i 与 Σ'_i，Σ_{i+1} 与 Σ'_{i+1} 在 $n=2k+1$ 的假定下各有一个交点 $\overline{A}_i$，$\overline{A}_{i+1}$，那末任何一对对应的空間 Σ_r 与 Σ'_r 也必有一个交点 $\overline{A}_r$，而且这些交点 $\overline{A}_r(r=\cdots,i-1,i,i+1,\cdots)$ 构成原来二叙列 $\{A_r\}$ 和 $\{A'_r\}$ 的共同的第 k 类共軛叙列 $\{\overline{A}_r\}$。这种对应的叙列 $\{A_r\}$ 和 $\{A'_r\}$ 一般地决定于单变数的 $8k-2$ 个任意函数。

II. 在 S_{2k} 里，为了 $\{\overline{A}_r\}$ 变成 $\{A_r\}$ 和 $\{A'_r\}$ 的共同的第 k 类共軛叙列，充要条件是 $\overline{A}_i(u,v)$ 和 $\overline{A}_{i+1}(u,v)$ 互为拉普拉斯变换。这时，存在自由度等于单变数的 $8k-4$ 个任意函数。

1. 引 言

在 n 維射影空間 S_n 里考察这样的二共軛网 $A_i(u,v)$ 和 $A'_i(u,v)$，它們的网曲綫 u 和 v 互相对应。如果把这二网的有关拉普拉斯叙列 $\{\cdots,A_{i-k-1},A_{i-k},\cdots,A_{i-1},A_i,A_{i+1},\cdots\}$ 和 $\{\cdots,A'_{i-k-1},A'_{i-k},\cdots,A'_{i-1},A'_i,A'_{i+1},\cdots\}$ 按照同一指标的二网的对应互相联系起来，那末我們就称 k 維的二綫性空間 $[A_{i-k-1}A_{i-k}\cdots A_{i-1}]$ 和 $[A'_{i-k-1}A'_{i-k}\cdots\cdots A'_{i-1}]$ 为对应空間，而且分别用 Σ_i 和 Σ'_i 記之，这里和以下都假定 $0<2k<n$，并且在各叙列中从左到右是沿方向 u 进行的，而从右到左是沿方向 v 进行的。

我們所获得的主要結果是这样：只要二对对应空間 Σ_i 和 Σ'_i，Σ_{i+1} 和 Σ'_{i+1} 在 $2k<n$ 的假定下各有一个交点的話，那末任何一对对应空間一定也有一个交点，而且这些交点所画的共軛网全体构成二叙列 $\{A_i\}$ 和 $\{A'_i\}$ 的共同的第 k 类共軛叙列 $\{\overline{A}_i\}$。在第 2 节将給出这定理的証明，并在第 3 节建立关于 S_{2k+1} 中的这样对应叙列的存在定理：这种对应叙列一般地决定于单变数的 $8k-2$ 个任意函数。

* 初次刊载在数学学报，11 (1961)，340～347．个别地方已加修訂。

特别取一个拉普拉斯叙列中相隔 $k+2$ 个共軛网的两个共軛网 $A_{i-1}(u, v)$ 和 $A_{i+k+1}(u, v)$ 做对应网并且再假定 $n=2k+1$，就得到 В. В. Гольдберг[1] 最近的結果。在第 4 节应用一般定理到普通空間射影极小曲面論；这时，在五維空間 S_5 里有关的戈德叙列和其他一些拉普拉斯叙列恰恰构成 $k=1$ 和 $k=2$ 的图形，从而导出射影极小曲面的一些特征。

最后在第 5 节里討論 S_{2k} 中的类似問題；这时所不同的地方是：二叙列 $\{A_i\}$ 和 $\{A'_i\}$ 的两个对应 k 維空間常有一个交点 $\overline{A}_r$。我們找出 $\{A_r\}$ 要变成共同的第 k 类共軛叙列的充要条件，証明这种 $\{A_i\}$ 和 $\{A'_i\}$ 的存在自由度等于单变数的 $8k-4$ 个任意函数，且从而扩充了 Гольдберг 的定理。

2. 一 般 定 理

設在 S_n 里給定一个拉普拉斯叙列 $\{\cdots, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, \cdots\}$，其中从左到右是沿网曲綫 u 的方向，而且从右到左是沿网曲綫 v 的方向；各共軛网 (A_r) 的曲綫都是 u 和 v，那末我們有

$$dA_r = a_r\omega_1 A_{r-1} + \omega_{r,r}A_r + b_r\omega_2 A_{r+1} \quad (r=\cdots, i-1, i, i+1, \cdots), \tag{1}$$

式中

$$\omega_1 = dv, \quad \omega_2 = du, \quad \omega_{r,r} = p_r\omega_2 + q_r\omega_1,$$

从而

$$D\omega_1 = 0, \quad D\omega_2 = 0.$$

这时，方程組 (1) 的可积分条件是

$$\left.\begin{aligned} &[d\log a_r + \omega_{r-1,r-1} - \omega_{r,r};\ \omega_1] = 0,\\ &[d\log b_r + \omega_{r+1,r+1} - \omega_{r,r};\ \omega_2] = 0,\\ &D\omega_{r,r} + (a_{r+1}b_r - a_r b_{r-1})[\omega_1\omega_2] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

又設另一个拉普拉斯叙列 $\{\cdots, A'_{i-1}, A'_i, A'_{i+1}, \cdots\}$ 也是以同一系統 (u, v) 为其网曲綫的，其中 u, v 的方向也相同；很明显，对于这叙列成立类似于 (1) 和 (2) 的二組方程，其对应的系数是 a'_r, $\omega'_{r,r}$, b'_r，而 ω_1 和 ω_2 則相同。我們用 (1′) 和 (2′) 来表达它們。

現在，考察两个 k 維空間 $[A_{i-k-1}A_{i-k}\cdots A_{i-2}A_{i-1}]$ 和 $[A_{i-k}A_{i-k+1}\cdots A_{i-1}A_i]$，以及它們的对应空間 $[A'_{i-k-1}A'_{i-k}\cdots A'_{i-2}A'_{i-1}]$ 和 $[A'_{i-k}A'_{i-k+1}\cdots A'_{i-1}A'_i]$。如果在假定 $0<2k<n$ 之下这二对对应空間各有唯一的共同点 $\overline{A}_i$ 和 $\overline{A}_{i+1}$，那末一定存在函数 λ_{i-s}, λ'_{i-s}; μ_{i-s+1}, μ'_{i-s+1} $(s=1, 2, \cdots, k+1)$，使得

$$\overline{A}_i = \sum_{s=1}^{k+1}\lambda_{i-s}A_{i-s} = \sum_{s=1}^{k+1}\lambda'_{i-s}A'_{i-s}, \tag{3}$$

$$\overline{A}_{i+1}=\sum_{s=1}^{k+1}\mu_{i-s+1}A_{i-s+1}=\sum_{s=1}^{k+1}\mu'_{i-s+1}A'_{i-s+1}. \tag{4}$$

以d_1表示沿方向$u(\omega_1=0)$的微分，而且以$\omega_{r,r}^{(1)}$表示对应的法甫形式$\omega_{r,r}$即$p_r\omega_2$；从(1)和(3)的第一等式容易算出

$$d_1\overline{A}_i=(\lambda_{i-k-1}\omega_{i-k-1,i-k-1}^{(1)}+d_1\lambda_{i-k-1})A_{i-k-1}+$$
$$+\sum_{s=1}^{k}(d_1\lambda_{i-s+1}+\lambda_{i-s}b_{i-s}\omega_2)A_{i-s+1}+\lambda_{i-k-1}b_{i-k-1}\omega_2A_{i-k}.$$

因而，点

$$\lambda_{i-k-1}d_1\overline{A}_i-(\lambda_{i-k-1}\omega_{i-k-1,i-k-1}^{(1)}+d_1\lambda_{i-k-1})\overline{A}_i \tag{5}$$

是属于k維空間$\sum_{i+1}\equiv[A_{i-k}A_{i-k+1}\cdots A_{i-1}A_i]$的。

同样，从(1')和(3')的第二等式經过沿同一方向u的导微之后可以看出：点

$$\lambda'_{i-k-1}d_1\overline{A}_i-(\lambda'_{i-k-1}\omega'^{(1)}_{i-k-1,i-k-1}+d_1\lambda'_{i-k-1})\overline{A}_i \tag{6}$$

是属于对应空間$\sum'_{i+1}\equiv[A'_{i-k}A'_{i-k+1}\cdots A'_{i-1}A'_i]$的。

可是按照假設这二空間$\sum_{i+1}$和$\sum'_{i+1}$仅有一个交点$\overline{A}_{i+1}$，两空間$P_{k+1}[A_{i-k-1}A_{i-k}\cdots A_i]$和$P'_{k+1}[A'_{i-k-1}A'_{i-k}\cdots A'_i]$一般只有一条交綫$\overline{A}_i\overline{A}_{i+1}$，所以存在两个法甫形式$\widetilde{\omega}_1$和$\widetilde{\omega}_2$使得

$$d_1\overline{A}_i=\widetilde{\omega}_1\overline{A}_i+\widetilde{\omega}_2\overline{A}_{i+1}. \tag{7}$$

其次，以d_2表示沿方向$v(\omega_2=0)$的微分；从(1)，(1')和(4)完全类似地导出下列关系：

$$d_2\overline{A}_{i+1}=\overline{\omega}_1\overline{A}_i+\overline{\omega}_2\overline{A}_{i+1}, \tag{8}$$

其中$\overline{\omega}_1$和$\overline{\omega}_2$表示两个法甫形式。

应用論文(I)[2]的一般定理到这里，便容易看出：点$\overline{A}_i$和$\overline{A}_{i+1}$各画共軛网(u,v)，并且互为拉普拉斯变换。因而，$\{\cdots,\overline{A}_{i-1},\overline{A}_i,\overline{A}_{i+1},\cdots\}$是二叙列$\{\cdots,A_{i-1},A_i,A_{i+1},\cdots\}$和$\{\cdots,A'_{i-1},A'_i,A'_{i+1},\cdots\}$的共同的第$k$类共軛叙列。以上所述意味着在$0<2k<n$的假定下，二叙列的任一对对应空間$\sum_r\equiv[A_{r-k-1}A_{r-k}\cdots A_{r-1}]$和$\sum'_r\equiv\equiv[A'_{r-k-1}A'_{r-k}\cdots A'_{r-1}]$相交于点$\overline{A}_r(r=\cdots,i-1,i,i+1,\cdots)$。

这样，我們获得了

一般定理 設在S_n里二共軛网$A_i(u,v)$和$A'_i(u,v)$的网曲綫互相对应，并且設$\{\cdots,A_{i-r},\cdots,A_{i-1},A_i,A_{i+1},\cdots,A_{i+r},\cdots\}$和$\{\cdots,A'_{i-r},\cdots,A'_{i-1},A'_i,A'_{i+1},\cdots,A'_{i+r},\cdots\}$是对应的拉普拉斯叙列。如果对于$0<2k<n$所作的二对对应空間$[A_{i-k-1}A_{i-k}\cdots A_{i-1}]$与$[A'_{i-k-1}A'_{i-k}\cdots A'_{i-1}]$，$[A_{i-k}A_{i-k+1}\cdots A_{i-1}A_i]$与$[A'_{i-k}A'_{i-k+1}\cdots A'_{i-1}A'_i]$分别相交于点$\overline{A}_i$和$\overline{A}_{i+1}$，那末任何对应空間$[A_{r-k-1}A_{r-k}\cdots A_{r-1}]$与$[A'_{r-k-1}A'_{r-k}\cdots A'_{r-1}]$一定相交于点$\overline{A}_r(r=\cdots,i-1,i,i+1,\cdots)$，并且拉普拉斯叙列$\{\overline{A}_r\}$是二叙列$\{A_i\}$和$\{A'_i\}$的共同的第$k$类共軛叙列。

3. 存 在 定 理

前节所述的二拉普拉斯叙列 $\{A_i\}$ 和 $\{A'_i\}$ 称为对应叙列；本节将在 S_{2k+1} 中建立关于对应叙列的存在定理。

为了这个目的，我們截取空間 S_{2k+1} 的二对应叙列的有限段 $(A_{i-k-1}A_{i-k}\cdots A_{i-1}A_i)$ 和 $(A'_{i-k-1}A'_{i-k}\cdots A'_{i-1}A'_i)$ 来討論，这里假定每段从左到右都是沿网曲綫 u 的方向，从右到左都是沿网曲綫 v 的方向；每段的二端点 A_{i-k-1}，A_i；A'_{i-k-1}，A'_i 是有关共軛网的拉普拉斯变换。我們还假設这二有限段满足前节一般定理中的条件，并且对应空間 $[A_{i-k-1}A_{i-k}\cdots A_{i-1}]$ 和 $[A'_{i-k-1}A'_{i-k}\cdots A'_{i-1}]$ 相交于唯一点 $\bar{A}_i$；$[A_{i-k}A_{i-k+1}\cdots A_i]$ 和 $[A'_{i-k}A'_{i-k+1}\cdots A'_i]$ 相交于唯一点 $\bar{A}_{i+1}$。

按照假設这些点 A_r 和 A'_r 满足形式 (1) 和 (1′) 的有限个法甫方程；这二有限段与无限拉普拉斯叙列的区别也表現在各組法甫方程的可积分条件上面。以下仅仅就有限段 $A:(A_{i-k-1}A_{i-k}\cdots A_{i-1}A_i)$ 进行討論；所得的結果对有限段 $A':(A'_{i-k-1}A'_{i-k}\cdots\cdots A'_{i-1}A'_i)$ 也是适用的。

把有限段 A 有关的法甫方程組(1)和可积分条件(2)分成下面三种：

1° 对共軛网(A_{i-1})写下法甫方程：

$$dA_{i-1}=a_{i-1}\omega_1A_{i-2}+\omega_{i-1,i-1}A_{i-1}+b_{i-1}\omega_2A_i;\tag{9}$$

把它的两边外导微一次并估計到可积分条件

$$[d\log a_{i-1}+\omega_{i-2,i-2}-\omega_{i-1,i-1},\ \omega_2]=0,\tag{10}$$

便得到

$$\frac{\partial A_i}{\partial v}=\left(q_{i-1}-\frac{\partial\log b_{i-1}}{\partial v}\right)A_i+a_iA_{i-1},\tag{11}$$

式中已置

$$a_i=\frac{1}{b_{i-1}}\left(\frac{\partial q_{i-1}}{\partial u}-\frac{\partial p_{i-1}}{\partial v}+a_{i-1}b_{i-2}\right).\tag{12}$$

2° 对共軛网(A_{i-k})写下法甫方程：

$$dA_{i-k}=a_{i-k}\omega_1A_{i-k-1}+\omega_{i-k,i-k}A_{i-k}+b_{i-k}\omega_2A_{i-k+1};\tag{13}$$

同前面一样，从外导微和可积分条件

$$[d\log b_{i-k}+\omega_{i-k+1,i-k+1}-\omega_{i-k,i-k},\ \omega_2]=0\tag{14}$$

获得

$$\frac{\partial A_{i-k-1}}{\partial u}=\left(p_{i-k}-\frac{\partial\log a_{i-k}}{\partial u}\right)A_{i-k-1}+b_{i-k-1}A_{i-k},\tag{15}$$

式中

$$b_{i-k-1}=\frac{1}{a_{i-k}}\left(\frac{\partial p_{i-k}}{\partial v}-\frac{\partial q_{i-k}}{\partial u}+a_{i-k+1}b_{i-k}\right).\tag{16}$$

3° 对有限段 A 的其他共轭网写下法甫方程：

$$dA_r = a_r\omega_1 A_{r-1} + \omega_{r,r}A_r + b_r\omega_2 A_{r+1}$$
$$(r = i-k+1,\ i-k+2,\ \cdots,\ i-2); \tag{17}$$

这时，我們有可积分条件

$$\left.\begin{array}{l}[d\log a_r + \omega_{r-1,r-1} - \omega_{r,r},\ \omega_1] = 0,\\ [d\log b_r + \omega_{r+1,r+1} - \omega_{r,r},\ \omega_2] = 0,\\ D\omega_{r,r} + (a_{r+1}b_r - a_r b_{r-1})[\omega_1\omega_2] = 0\\ (r = i-k+1,\ i-k+2,\ \cdots,\ i-3,\ i-2).\end{array}\right\} \tag{18}$$

根据假設可以写出

$$\overline{A}_i = \sum_{s=1}^{k+1}\lambda_{i-s}A_{i-s},\quad \overline{A}_{i+1} = \sum_{s=1}^{k+1}\mu_{i-s+1}A_{i-s+1}; \tag{19}$$

我們的問題是如何决定这些函数 λ_{i-s}, μ_{i-s+1} $(s=1, 2, \cdots, k+1)$ 使得(7)和(8)成立。

为此，取定

$$\lambda_{i-k-1} = 1,\quad \mu_i = 1 \tag{20}$$

而且把(19)代入(7)的两边，根据(15)和(17)把各边化为 A_{i-k-1}, A_{i-k}, $\cdots$, A_{i-1}, A_i 的綫性組合。因为 $k+1\leqslant 2k<n$，两边的对应系数必須相等，例如比較 A_{i-k-1}和 A_i 的系数，就获得

$$\left.\begin{array}{l}\widetilde{\omega}_1 = \left(p_{i-k} - \dfrac{\partial\log a_{i-k}}{\partial u}\right)\omega_2,\\ \widetilde{\omega}_2 = \lambda_{i-1}b_{i-1}\omega_2.\end{array}\right\} \tag{21}$$

首先，在这里规范化 A_{i-k} 使 $a_{i-k}=1$，从而

$$\left.\begin{array}{l}\widetilde{\omega}_1 = p_{i-k}\omega_2,\\ \widetilde{\omega}_2 = \lambda_{i-1}b_{i-1}\omega_2.\end{array}\right\} \tag{22}$$

其次，比較化式两边关于 A_{i-s} $(s=1, 2, \cdots, k-1)$ 的对应系数幷代入(22)，便得到

$$d_1\lambda_{i-s} = (p_{i-k} - p_{i-s})\omega_2\lambda_{i-s} + (\mu_{i-s}\lambda_{i-1}b_{i-1} - \lambda_{i-s-1}b_{i-s-1})\omega_2$$
$$(s=1, 2, \cdots, k-1). \tag{23}$$

最后，比較两边关于 A_{i-k} 的对应系数，容易把这时比較結果和(23)写做一起，这样得出

$$d\lambda_{i-s} = \lambda_{i-s}(\omega_{i-k,i-k} - \omega_{i-s,i-s}) + \sigma_{i-s}\omega_1 + (\mu_{i-s}\lambda_{i-1}b_{i-1} - \lambda_{i-s-1}b_{i-s-1})\omega_2$$
$$(s=1, 2, \cdots, k), \tag{24}$$

式中已导入了輔助函数 σ_{i-s}.

值得注意的是：定义方程(12)和(16)可以写成

$$D\omega_{i-1,i-1} + (a_i b_{i-1} - a_{i-1}b_{i-2})[\omega_1\omega_2] = 0, \tag{25}$$

$$D\omega_{i-k,i-k} + (a_{i-k+1}b_{i-k} - a_{i-k}b_{i-k-1})[\omega_1\omega_2] = 0. \tag{26}$$

以上的方法也适用于(8);这时,先把 A_i 规范化起来,使 $b_{i-1}=1$; 这从(9)是可以办到的。所以我們有

$$\bar{\omega}_1=\mu_{i-k}\omega_1,\quad \bar{\omega}_2=q_{i-1}\omega_1,\tag{27}$$

从而可改写(22)

$$\tilde{\omega}_1=p_{i-k}\omega_2,\quad \tilde{\omega}_2=\lambda_{i-1}\omega_2.\tag{28}$$

相当于(24)的方程是

$$d\mu_{i-s}=\mu_{i-s}(\omega_{i-1,i-1}-\omega_{i-s,i-s})+\tau_{i-s}\omega_2+(\lambda_{i-s}\mu_{i-k}a_{i-k}-\mu_{i-s+1}a_{i-s+1})\omega_1$$
$$(s=1,\ 2,\ \cdots,\ k).\tag{29}$$

这样,在导入輔助函数 σ_{i-s} 和 $\tau_{i-s}(s=1,\ 2,\ \cdots,k)$ 之后,我們获得了法甫方程組 (S):

$$\left.\begin{aligned}&d\lambda_{i-s}=\lambda_{i-s}(\omega_{i-k,i-k}-\omega_{i-s,i-s})+\sigma_{i-s}\omega_1+(\mu_{i-s}\lambda_{i-1}-\lambda_{i-s-1}b_{i-s-1})\omega_2,\\&d\mu_{i-s}=\mu_{i-s}(\omega_{i-1,i-1}-\omega_{i-s,i-s})+\tau_{i-s}\omega_2+(\lambda_{i-s}\mu_{i-k}-\mu_{i-s+1}a_{i-s+1})\omega_1\\&\qquad\qquad(s=1,\ 2,\ \cdots,\ k).\end{aligned}\right\}\tag{30}$$

对于第二有限段 $(A'_{i-k-1}A'_{i-k}\cdots A'_{i-1}A'_i)$ 只要把 ω_1, ω_2 以外的一切記号加上一撇,就可搬用上述方法到这里来,除了同样规范化 A'_{i-k-1} 和 A'_i 使 $a'_{i-k}=1$, $b'_{i-1}=1$ 外,还得到类似于 (S) 的另一法甫方程組 (S'). 这时,二点

$$\overline{A}'_i=\sum_{s=1}^{k+1}\lambda'_{i-s}A'_{i-s},\quad \overline{A}'_{i+1}=\sum_{s=1}^{k+1}\mu'_{i-s+1}A'_{i-s+1}\tag{19'}$$

(其中 $\lambda'_{i-k-1}=1$, $\mu'_i=1$)所满足的关系是

$$d_1\overline{A}'_i=\tilde{\omega}'_1\overline{A}'_i+\tilde{\omega}'_2\overline{A}'_{i+1},\tag{7'}$$

$$d_2\overline{A}'_{i+1}=\bar{\omega}'_1\overline{A}'_i+\bar{\omega}'_2\overline{A}'_{i+1},\tag{8'}$$

式中

$$\bar{\omega}'_1=\mu'_{i-k}\omega_1,\quad \bar{\omega}'_2=q'_{i-1}\omega_1,\tag{27'}$$

$$\tilde{\omega}'_1=p'_{i-k}\omega_2,\quad \tilde{\omega}'_2=\lambda'_{i-1}\omega_2.\tag{28'}$$

点 $\overline{A}'_i$ 要重合于 $\overline{A}_i$, 点 $\overline{A}'_{i+1}$ 要重合于 $\overline{A}_{i+1}$, 充要条件是

$$\overline{A}'_i=\rho\overline{A}_i,\quad \overline{A}'_{i+1}=\sigma\overline{A}_{i+1},$$

其中 ρ 和 σ 表示不是零的任意函数。把这些式子代入(7′)和(8′),并同(7)和(8)作比較,我們得到

$$\frac{\rho}{\sigma}\lambda_{i-1}=\lambda'_{i-1},\quad \frac{\rho}{\sigma}\mu'_{i-k}=\mu_{i-k};$$

$$\frac{\partial\log\rho}{\partial u}=p'_{i-k}-p_{i-k},\quad \frac{\partial\log\sigma}{\partial v}=q'_{i-1}-q_{i-1}.$$

由此可見,当对 A_{i-k}, A'_{i-k}; A_{i-1}, A'_{i-1} 施行下列规范化时,即

$$A_{i-k}\to f\cdot A_{i-k},\quad A'_{i-k}\to\rho^{-1}f\cdot A'_{i-k};$$

$$A_{i-1}\to\varphi\cdot A_{i-1},\quad A'_{i-1}\to\sigma^{-1}\varphi\cdot A'_{i-1},$$

其中 f 和 φ 是 u, v 的任意函数，便可导出 $\rho\to 1, \sigma\to 1$。

另外一方面，我們已經規范化了 A_{i-k}，A'_{i-k}；A_{i-1}，A'_{i-1}，而实际上选取了 $f=\frac{1}{a_{i-k}}$，$\varphi=\frac{1}{b_{i-1}}$ 和 $f'=\frac{1}{a'_{i-k}}$，$\varphi'=\frac{1}{b'_{i-1}}$ 做規范因子；所以只要选取 $\rho=\frac{a'_{i-k}}{a_{i-k}}$，$\sigma=\frac{b'_{i-1}}{b_{i-1}}$，便可达到 $\rho\to 1, \sigma\to 1$ 的目的。因而，获得下列四个关系：

$$\left.\begin{array}{ll}\lambda_{i-1}=\lambda'_{i-1}, & \mu_{i-k}=\mu'_{i-k};\\ p_{i-k}=p'_{i-k}, & q_{i-1}=q'_{i-1}.\end{array}\right\} \tag{31}$$

法甫方程組 (S) 和 (S') 各有协变系統

$$\left.\begin{array}{c}[d\sigma_{i-s}, \omega_1]+\cdots=0, \quad [d\tau_{i-s}, \omega_2]+\cdots=0;\\ [d\sigma'_{i-s}, \omega_1]+\cdots=0, \quad [d\tau'_{i-s}, \omega_2]+\cdots=0\\ (s=1, 2, \cdots, k),\end{array}\right\} \tag{32}$$

式中所略去的各項不再包含 $d\sigma_{i-s}, d\tau_{i-s}; d\sigma'_{i-s}, d\tau'_{i-s}$ 在内了；而且組(32)的行列式等于 $(\omega_1\omega_2)^{2k}\neq 0$。

由于我們已經規范化了 A_i，A'_i；A_{i-k}，A'_{i-k}，在第一有限段中还可以規范化其他 $k-1$ 个点 A_{i-k-1}，A_{i-k+1}，$\cdots$，A_{i-1} 使 $b_{i-k-1}=1$。从(15)可知

$$a_{i-1}=1,\ a_{i-2}=1,\ \cdots,\ a_{i-k+1}=1.$$

因此，(10)和 $(18)_1$ 轉化为 $k-1$ 个有限方程

$$p_{r-1}=p_r \quad (r=i-k+1,\ i-k+2,\ \cdots,\ i-1). \tag{33}$$

这样，我們总共获得了連同(31)在内的 $2(k-1)+4=2k+2$ 个有限方程。从它們的微分就添加了 $2k+2$ 个法甫方程；把(30)估計进去，全体有 s_0 个法甫方程，其中

$$s_0=6k+2. \tag{34}$$

为計算标数 s_1，s_2[3]，考察(14)，$(18)_2$，$(18)_3$，(25)，(26)，(32)以及 $(A'_{i-k-1}A'_{i-k}\cdots\cdots A'_i)$ 的有关方程；它們的总数等于 s_1：

$$s_1=8k-2. \tag{35}$$

最后，估計到有限段 $(A_{i-k-1}A_{i-k}\cdots A_{i-1}A_i)$ 的有关未知函数是 a_i；$b_{i-2}, b_{i-3}, \cdots, b_{i-k}$；$p_{i-s}$；$q_{i-s}$；$\lambda_{i-s}$；$\mu_{i-s}$；$\sigma_{i-s}$；$\tau_{i-s}(s=1, 2, \cdots, k)$，所以未知函数的总数是

$$r=14k. \tag{36}$$

从(34)，(35)，(36)立即算出标数 s_2

$$s_2=r-s_0-s_1=0. \tag{37}$$

由于

$$\det|A_{i-1}\cdots A_{i-k-1}A'_{i-1}\cdots A'_{i-k-1}|=0,$$
$$\det|A_i\cdots A_{i-k}A'_i\cdots A'_{i-k}|=0,$$

这并不給出另外条件，所以我們完全証明了

存在定理 在一般定理中，对应的二拉普拉斯叙列 $\{A_i\}$ 和 $\{A'_i\}$ 是与单变数的

$8k-2$ 个任意函数有关的，其中 $n=2k+1$。

对于每对叙列 $\{A_i\}$ 和 $\{A'_i\}$ 唯一地决定了它們的共同的第 k 类共軛叙列 $\{\bar{A}_i\}$；按照論文(II)[2] 的嵌入定理立卽得到下列結果：

每对叙列 $\{A_i\}$ 和 $\{A'_i\}$ 各有第 $k-l$ 类共軛叙列 $\{B_i\}$ 和 $\{B'_i\}$，使叙列 $\{\bar{A}_i\}$ 也是 $\{B_i\}$ 和 $\{B'_i\}$ 的共同的第 $l(l<k)$ 类共軛叙列，而且 $\{B_i\}$ 和 $\{B'_i\}$ 的决定依賴于单变数的 $4l$ 个任意函数。

4. 一 些 特 例

1) Гольдберг 的定理

在奇数維空間 S_{2k+1} 考察一个拉普拉斯叙列 $\{\cdots A_{i-1}A_iA_{i+1}\cdots\}$ 并且假設空間 $[A_{i+1}A_{i+2}\cdots A_{i+k+1}]$ 与 $[A_{i-1}A_{i-2}\cdots A_{i-k-1}]$ 相交于点 $\bar{A}_i$；空間 $[A_iA_{i+1}\cdots A_{i+k}]$ 与 $[A_iA_{i-1}\cdots A_{i-k}]$ 相交于点 $\bar{A}_{i+1}$。这是 $A'_i=A_{i+k}$, $A'_{i-1}=A_{i+k-1},\cdots,A'_{i-k}=A_i$ 的特殊情况，从第 2 节一般定理得知，对应的二空間 $[A_{r+1}A_{r+2}\cdots A_{r+k+1}]$ 与 $[A_{r-1}A_{r-2}\cdots A_{r-k-1}]$ 必相交于一点 $\bar{A}_r(r=\cdots, i-1, i, i+1, \cdots)$ 而且交点 $\{\cdots\bar{A}_{i-1}\bar{A}_i\bar{A}_{i+1}\cdots\}$ 构成拉普拉斯叙列。另外，这种叙列 $\{A_i\}$ 是与单变数的 $8k-2$ 个任意函数有关的。这就是 В. В. Гольдберг 所証的定理。

2) Godeaux 的定理[4]

在普通射影空間 S_3 里，一个解析的曲面 S 参考于漸近曲綫 (u, v) 的时候，各点漸近切綫在五維空間 S_5 的克萊因超二次曲面上的象 $U(u,v)$ 和 $V(u,v)$ 都画共軛网 (u,v)；它們互为拉普拉斯变换，而且有关的拉普拉斯叙列 $L:\{\cdots U_3U_2U_1UVV_1V_2V_3\cdots\}$ 就是戈德叙列。如 Godeaux 所指出，当 S 是射影极小曲面时，二平面 $(U_3U_2U_1)$ 和 (VV_1V_2) 相交于点 A，从而二平面 (UU_1U_2) 和 $(V_1V_2V_3)$ 也相交于点 B。根据第 2 节一般定理立刻导出：二平面 $(U_{n+3}U_{n+2}U_{n+1})$ 和 $(U_{n-1}U_{n-2}U_{n-3})$ 一定相交于点 $A_n(n=1, 2, \cdots)$；二平面 $(V_{n+3}V_{n+2}V_{n+1})$ 和 $(V_{n-1}V_{n-2}V_{n-3})$ 也一定相交于点 $B_n(n=1, 2, \cdots)$，而且

$$(G)\qquad \cdots, A_n, \cdots, A_1, A, B, B_1, \cdots, B_n, \cdots$$

是一个拉普拉斯叙列，卽 Godeaux 所获得的結果。

根据第 3 节末段所述的定理，这时一定存在这样的叙列，它一方面内接于 (L) 而且另一方面外接于 (G)。实际上，下文所述的两叙列 (J) 和 $(\bar{J})$ 就具备这个性质[5]。

3) 射影极小曲面的杜磣兰变换[6]

設普通空間 S_3 里有一个解析的曲面 S 和其一杜磣兰变换 $\bar{S}$，且設它們的戈德叙列是

$$(L)\qquad \cdots U_n\cdots U_1\,U\,V\,V_1\cdots V_n\cdots$$

和

$(\bar{L})$ $$\cdots\bar{U}_n\cdots\bar{U}_1\,\bar{U}\,\bar{V}\,\bar{V}_1\cdots\bar{V}_n\cdots.$$

在 S_5 里，連綫 $(\bar{U}\bar{V})$ 与 (U_2U_1) 常有交点 J_2。但是如前所証明，連綫 $(\bar{V}\bar{V}_1)$ 与 (U_1U) 則仅限于 S 是射影极小曲面时才相交于点 J_1，从而連綫 $(\bar{U}_1\bar{U})$ 和 (U_3U_2) 也相交于点 J_3。从第 2 节一般定理立即看出，連綫 $(U_{n+1}U_n)$ 与 $(\bar{U}_{n-1}\bar{U}_{n-2})$ 必相交于点 $J_{n+1}(n=1,2,\cdots)$；連綫 (V_nV_{n+1}) 和 $(\bar{V}_{n+2}\bar{V}_{n+3})$ 也相交于点 $J_{-n-1}(n=1,2,\cdots)$，而且

(J) $$\cdots J_{n+1}\cdots J_2\,J_1\,J\,J_{-1}\,J_{-2}\cdots J_{-n}\cdots$$

是 (L) 和 $(\bar{L})$ 的共同的第 1 类共軛叙列。

由于 $\bar{S}$ 也是射影极小曲面，并且是以 S 为其一个杜蔡兰变换的，連綫 $(U_2\bar{U}_1)$ 与 (UV) 相交于 $\bar{J}$，$(\bar{U}_1\bar{U})$ 与 (VV_1) 相交于 $\bar{J}_{-1}$，$(U_3\bar{U}_2)$ 与 (U_1U) 相交于 $\bar{J}_1$，等等。因此，又获得了另一个拉普拉斯叙列

$(\bar{J})$ $$\cdots J_{n+1}\cdots\bar{J}_2\,J_1\,\bar{J}\,\bar{J}_{-1}\,\bar{J}_{-2}\cdots\bar{J}_{-n-1}\cdots.$$

5. S_{2k} 中的类似問題

在偶数維射影空間 S_{2k} 里，二叙列 $\{A_i\}$ 和 $\{A'_i\}$ 的 k 維对应空間 $\sum_r[A_{r-1}A_{r-2}\cdots\cdots A_{r-k-1}]$ 与 $\sum'_r[A'_{r-1}A'_{r-2}\cdots A'_{r-k-1}]$ 常有一个交点 $\bar{A}_r$。为了建立类似的一般定理和存在定理，我們取二点 $\bar{A}_i$ 和 $\bar{A}_{i+1}$，并应用論文 (I)[2] 的一般定理到这里来，便容易导出下列結果：

如果曲面$(\bar{A}_i)$在点 $\bar{A}_i$ 的切平面通过点 $\bar{A}_{i+1}$，而且反过来，曲面$(\bar{A}_{i+1})$在点 $\bar{A}_{i+1}$ 的切平面通过点 $\bar{A}_i$，那末 $(\bar{A}_i)$ 与 $(\bar{A}_{i+1})$ 互为拉普拉斯变换，而且拉普拉斯叙列$\{\bar{A}_i\}$变为二叙列 $\{A_i\}$ 和 $\{A'_i\}$ 的共同的第 k 类共軛叙列。

由此可見，把 $\bar{A}_i$ 和 $\bar{A}_{i+1}$ 写成(3)和(4)的表达式时，关系式(7)和(8)也都成立，从而前文中的(9)～(34)全部成立。

又改写(3)和(4)

$$A'_i=\sum_{s=1}^{k+1}\lambda_{i-s}A_{i-s}-\sum_{s=1}^{k}\lambda'_{i-s}A'_{i-s},$$

$$A_i=\sum_{s=1}^{k+1}\mu'_{i-s+1}A'_{i-s+1}-\sum_{s=2}^{k+1}\mu_{i-s+1}A_{i-s+1}.$$

这表示了，二点 A'_i 和 A_i 完全决定于上式右边的各点；所以在計算标数 s_1 的过程中，应当把(25)和(25′)从整个协变系統除去，因而得到

$$s_1=8k-4. \tag{38}$$

与此同时，a_i 和 a'_i 不能列入未知函数組里，就是在所論的情况下未知函数的总

数等于

$$r = 14k - 2, \tag{39}$$

从此获得 $s_2 = 0$. 这样一来，我們証明了存在定理:

在 S_{2k} 中，所論的二拉普拉斯叙列 $\{A_i\}$ 和 $\{A'_i\}$ 的存在自由度等于单变数的 $8k-4$ 个任意函数。

参 考 文 献

[1] Гольдборг, В. В., Сети L и последовательности L N-мерного пространства. ДАН СССР, 134 (1960), 757～760.

[2] 苏步青，关于高維射影空間共軛网論的研究 (I)，数学学报，9 (1959), 446～454; (II)，同誌，11 (1961), 41～46.

[3] 菲尼可夫，嘉当的外形式法，中譯本第七章，科学出版社，北京 (1956).

[4] Godeaux, L., Note sur l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface, Bull. de la classe des sciences Acad. roy. Pelgique, (5) 39 (1953), 156～164.

[5] 苏步青，附属于射影极小曲面的一些 Laplace 叙列，科学記录(新輯)，2 (1958), 159～163.

[6] 苏步青，射影极小曲面的杜錐兰变换 (I)，数学学报，7 (1957), 28～49; (II)，复旦学报，第一期 (1956), 111～119; (III)，数学学报，7 (1957), 123～127; (IV)，数学学报，8 (1958), 239～242; (V)，数学学报，8 (1958), 276～280.

論无限連續拟群的不可約一阶迷向群

谷 超 豪

(复旦大学)

【摘要】 本文研究由偏微分方程組所定义的、依賴于一些未定函数的解析变换拟群，或称无限連續群。拟群中使一点不动的变换在相切空間中誘导出来的綫性变换群称为迷向群，决定迷向群为不可約的解析变换拟群的重要关鍵在于决定能够作为迷向群的綫性群。E. Cartan 曾利用半单純李代数（复数域）的表示理論，决定了所有能作为无限連續群的迷向群的不可約（复）綫性群。在本文中利用了单純李代数的实形式，实綫性群与复綫性群的某些关系和 E. Cartan 的結果，决定了所有的能作为无限連續群的迷向群的实不可約的綫性群。

1. 引　言

設 M_n 为一 n 維的解析空間，G 为作用于空間 M_n 中的一个解析变换拟群。如果 G 中的元素是由一偏微分方程組

$$F_\sigma(x^i, \bar{x}^i, \partial_i \bar{x}^j, \cdots, \partial_{i_1\cdots i_p}\bar{x}^j) = 0 \quad (i, j = 1, \cdots, n;\ \sigma = 1, 2, \cdots, N) \tag{1}$$

成为非异的变换的解的全体組成，于此 x^i 为 M_n 中点的坐标，$\bar{x}^i$ 为变后点的坐标，在方程組中是作为未知函数的姿态出現的，$\partial_{i_1\cdots i_k}\bar{x}^j$ 表示 $\bar{x}^j$ 关于 $x^{i_1}, \cdots, x^{i_k}$ 的导数，又 F_σ 为其所依賴的变量的解析函数，那末就称 G 为李-嘉当拟群或連續变换拟群。我們在本文中常論可递的連續变换拟群，因此常略去可递两字，而且在 G 确实依賴于若干未知函数的情形，我們也还常用傳統的术語——无限連續群。

李-嘉当拟群的研究基础为 S. Lie 在上世紀末所建立[1]，E. Cartan 在本世紀初发展了这个理論[2]。由于嘉当的后继者們多集中注意于发展他的关于有限李群的研究，所以这个理論的发展有些处于停滞状态。

到最近十年来，情况頗有改变。无限連續群在三个方面引起了人們的注意。首先，В. В. Вагнер [3] 指出，任何一个微分几何物場，如果容許运动群，那末最大运动群一定是李-嘉当拟群，且其逆亦真，即任意李-嘉当拟群一定可作为某一微分几何物場的运动群。其次，陈省身，Ehressman，Liberman 等人[4] 把无限連續变换拟群扩充到整体的解析流形上去，指出李-嘉当拟群的研究与流形的微分結构及等价性的关系。此外，Г. Ф. Лаптев 等人在建立安装流形的理論时，也把它放在

李-嘉当拟群的基础之上 [5]，因而它的理論意义逐渐有所显示。它的引人注意的另一个理由还在于：对无限連續群的研究，还有可能对无限維綫性空間的某些代数結构的研究，对拓扑群的研究具有推进作用，也可能对偏微分方程理論的发展有所帮助。

在研究无限連續群时，迷向群起着很大的作用。嘉当1908年的著作中决定了所有的复不可約的綫性群，使得它能够作为无限連續群的一阶迷向群，然后决定了这些綫性群相应的无限連續群，再由此决定了所有的单純群。他的工作是在复数域中进行，所以还有必要来决定实不可約的綫性群，使得它能作为无限連續群的一阶迷向群，这也是在实数域中决定单純群的最关鍵的一步。本文的目的，就在于解决这一問題，部分結果，在莫斯科大学 П. К. Рашевский 教授領导的討論班中报告过，现在把問題解决到完全的程度。又作者在莫斯科大学从事李-嘉当拟群的研究时，也还曾得到 С. П. Фиников，Г. Ф. Лаптев 教授，А. М. Васильев，М. В. Васильева 副教授的許多帮助，对于以上所提到的苏联学者，作者謹表衷心的感謝。

2. 預 备 知 識

在本节中我們将介紹嘉当所得到的若干結果，为后文作准备。

設 G 为作用于 n 維空間中可遞的李-嘉当无限拟群，

$$\bar{x}^i=f^i(x^1,\ \cdots,\ x^n)\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\tag{2}$$

为其一般变换，于此 $(x^1,\ \cdots,\ x^n)$ 为空間的一个坐标系統。依据嘉当的研究，必存在 n 个法甫形式 $\omega^i(x,\ u,\ dx)$ 具备如下性质：

1°
$$\omega^i(x,\ u,\ dx)=a^i_j(x,\ u)dx^j,\tag{3}$$

于此 u 表示变量 $u^{n+1},\ \cdots,\ u^r$.

2°　$\omega^i(x,\ u,\ dx)$ 的外微分具如下的形状：

$$D\omega^i=\frac{1}{2}c^i_{jk}[\omega^j,\ \omega^k]+c^i_{j\alpha}[\omega^j\omega^\alpha],\tag{4}$$

于此矩陣 $A_\alpha=\|c^i_{j\alpha}\|$ 构成群 G 在某一点 O 的一阶迷向群 H 的綫性李代数 H' 的基，而 ω^α 为某些适当的发甫形式。所謂 O 点的迷向群就是群 G 中使 O 点不变的变換(构成所謂稳定群)，在点 O 的相切空間中所誘导出的綫性变換群，一般說来，它也是拟群。

3°　对群中任一变換(2)，必能找到另一組函数：

$$\bar{u}^\alpha=f^\alpha(x,\ u),\tag{5}$$

使滿足法甫方程

$$\omega^i(\bar{x},\ \bar{u},\ d\bar{x})=\omega^i(x,\ u,\ dx).\tag{6}$$

以 A_α 为基,构成一个綫性空間,記为 Λ_0, 写出方程

$$c_{j\alpha}^{i}l_{k}^{\alpha}-c_{k\alpha}^{i}l_{j}^{\alpha}=0, \tag{7}$$

它的每一解組成一个 $(r-n)\times n$ 矩陣。这些解的全体,也成为一綫性空間,記为 Λ_1, 称为第一延拓空間。显然, Λ_0 的基的变换,实质上并不影响綫性空間 Λ_1。选取 $A_{\alpha_1}^{(1)}=\|l_{k\alpha_1}^{\alpha}\|$ 为 Λ_1 的基,作方程($\alpha_1=r+1, \cdots, r_1$)

$$l_{j\alpha_1}^{\alpha}l_{k}^{\alpha_1}-l_{k\alpha_1}^{\alpha}l_{j}^{\alpha_1}=0, \tag{8$_1$}$$

其解为 $(r_1-r)\times n$ 矩陣,构成一綫性空間 Λ_2, 称为第二延拓空間。依此进行,如果至得到第 s 延拓空間 Λ_s, 选其基为 $A_{\alpha_s}^{(s)}=\|l_{j\alpha_s}^{\alpha_{s-1}}\|$ $(\alpha_s=r_{s-1}+1, \cdots, r_s)$, 則依方程

$$l_{j\alpha_s}^{\alpha_{s-1}}l_{k}^{\alpha_s}-l_{k\alpha_s}^{\alpha_{s-1}}l_{j}^{\alpha_s}=0, \tag{8$_2$}$$

可决定第 $s+1$ 延拓空間。照这样进行,可以得到两种情形:

〔情形 1〕 存在一正整数 p, 使得 $\Lambda_0, \cdots, \Lambda_{p-1}$ 均非零維,而 Λ_p 为零維的。

〔情形 2〕 每次的延拓都不会得出零維的綫性空間。

在情形 1 下,我們称綫性群 H (或其李代数 H') 为有限延拓的。如成立情形 2, 則称群 H(或綫性李代数 H') 为无限延拓的。依据嘉当,我們已知,为使群 G 为李-嘉当的无限拟群,則它的一阶迷向群必須为无限延拓的(嘉当原来用"半对合"这一术語)。

利用半单純李代数(复数域的)的表示理論,嘉当証明了下述結果:复不可約的无限延拓的綫性群只有下列四种:

1° n 維空間的全綫性群 $G(n, c)$;

2° n 維空間的单模綫性群 $SG(n, c)$;

3° $n(=2m)$ 維空間的辛群 C_m;

4° $n(=2m)$ 維空間的辛群与放大的乘积 $C_m\times I$。

它們所对应的无限連續群是:

P_n——n 变量的最一般的非异解析变换(对应 1°);

Q_n——n 变量的解析变换,变换的耶可比式等于非零常数(对应 1°);

R_n——n 变量的解析变换,其耶可比式等于 1 (对应 2°);

S_n——n 变量的解析变换,使二次外形式

$$[dx^1dx^{m+1}]+[dx^2dx^{m+2}]+\cdots+[dx^mdx^{2m}] \tag{9}$$

保持不变(对应 3°);

T_n——n 变量的解析变换,使二次外形式 (9) 乘上一常数倍数 (对应 4°)。并且相应的形式 ω^i 各为

$$a_j^i(u)dx^j,$$

于此 $\|a_j^i(u)\|$ 为各个相应的群中最一般的矩陣。