

中学生学习大全

高中立体几何分册

《中学生学习大全》编委会 编



高中立体几何分册

《中学生学习大全》编委会 编

南海出版社

1992·海口

琼 新 登 字 01 号

中学生学习大全

高中立体几何分册

《中学生学习大全》编委会 编

责任编辑:李琪

装帧设计:张迅

南海出版公司出版

辽宁省新华书店发行

辽宁省北票市印刷厂印刷

787×1092 毫米 32 开本 7.75 印张 190 千字

1991 年 7 月第 1 版 1992 年 7 月第 3 次印刷

印数: 13 200 --- 24 000 册

ISBN7—80570—146—6/G·36

定价:3.60 元

《中学生学习大全》编委会

顾问:苏 才

主 编:张 石 王健平

王玉明 伍谷奇

编 委:张 石 白琪瑞 潘福田 王玉明

伍谷奇 王健平 赵长云 何 平

王玉梅 程远林 朱 虹 曾 放

武甲元 章 芳 云 章 张玉成

李长河 赵 宁 邵秀樱 范金城

俞 晶

本册执笔者:潘福田 陈玫文 李建树 路永芳

汪 萍 郑诚和 万 宇

本册审定者:张 石 赵天宇 于大鹏

目 录

学习心理与学习方法.....	(1)
知识归纳与运用.....	(15)
第一章 共面、异面	(15)
第二章 平行、垂直 (一)	(26)
第三章 平等、垂直 (二)	(37)
第四章 距离和角 (一)	(54)
第五章 距离和角 (二)	(70)
第六章 多面体	(88)
第七章 旋转体.....	(113)
第八章 截面.....	(133)
第九章 相接与相切.....	(146)
第十章 最大、最小.....	(157)
自测题库	(169)
第一章 共面、异面.....	(169)
第二章 平行、垂直 (一)	(171)
第三章 平行、垂直 (二)	(174)
第四章 距离.....	(177)
第五章 角.....	(181)
第六章 多面体.....	(186)
第七章 旋转体.....	(191)
第八章 截面.....	(194)

第九章 相接与相切.....	(198)
第十章 最大、最小.....	(201)
综合练习 (一)	(205)
综合练习 (二)	(208)
答案或提示.....	(213)

学习心理与学习方法

立体几何 研究空间图形的性质、计算、画法及其应用的一门学科叫做立体几何学，简称为立体几何。它是高中数学的一个重要分科，是平面几何的继续和发展。学习立体几何，不仅使人们获得有关空间图形的比较丰富的知识，培养人们的逻辑思维和空间想象能力，同时还使人们的计算能力和综合运用知识的能力得到进一步的提高。因此，人们都比较重视立体几何，把它作为高中数学的一个重要的课程来学习。

空间图形 由空间的点、线、面所构成的图形叫做空间图形，和平面图形比较可以发现，它们有共同点，那就是都是由点所构成的集合；同时还有不同点，那就是构成平面图形的点，必须是同一平面内的点。而构成空间图形的点，既可以是同一平面内的点（此时是平面图形，它是空间图形的特例），也可以是不在同一平面内的点（这样的图形叫做立体图形，是与平面图形不同的图形），平面图形和立体图形统称为空间图形。

学习立体几何的知识准备 学习立体几何要用到平面几何知识，这是因为平面图形是空间图形的特例及其组成部分，许多有关平面图形的知识都在研究空间图形的问题中得到了极其广泛的应用。然而，在立体几何中所用到的平面几何知识只是平面几何中最重要的部分。只要把这些最重要的部分掌握好就可以把立体几何学好。此外，在立体几何的学习中，除了联系必要的平面几何知识外，还要用到一些代数、三角的知识和使用一些代数、三角的方法。因此，在学习立体几何

时，应广泛地联系以往我们学的平面几何、代数和三角知识，在这些已学知识的基础上学习立体几何

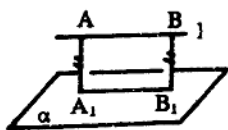
学习立体几何的心理准备 首先要克服畏难情绪，对学习好立体几何充满信心。立体几何虽然比较新并且所研究的图形也比单纯的平面图形复杂，但作为高中的一门课程，对人们的要求并不那么高，只要求掌握一些最重要的知识和解决一些最为基本的问题，并且在开始学习时进度不那么快，只要认真学习努力都能学好。其次是树立空间观念，逐步熟悉并学会从空间的角度来分析和思考问题，尽量不出因不注意平面与空间的差别所犯的知识错误和逻辑错误。第三要全面地看问题，即不但要看问题的正面，还要看问题的反面。不但要看事物的一面，还要看事物的另一面或其它方面，尽量避免因考虑不周所犯的分析错误和判断错误。第四是要注意事物之间的区别、联系，搞好平几知识与立几知识的对比。有些概念比较接近，如距离的概念、角的概念，要注意它们之间的区别；有些命题比较接近，也要注意区别，搞清了区别才能学好；有些平几知识在立几中得到了发展，各知识间也有一定的联系；抓住了发展、联系会有更高的学习效率。第五是逐步熟悉并学会空间图形的平面表示，会用画在平面上的直观图表示具有不同性质或特点的空间图形，会用表示出来的空间图形来研究空间图形的性质，逐步学会由图想物和看物画图，避免因看图和用图不当所产生的判断错误。第六是注意提高逻辑思维能力，养成严谨的分析、推理习惯，并逐步熟悉立体几何的推理方式和证明方法。第七是注意知识、方法的综合运用，提高综合运用知识、分析、解决问题的能力。第八是注意系统地掌握知识，熟记立体几何的一些基本

内容，掌握立体几何的习题类型、分析、解决问题的思想体系和积累总结经验等。有了这些心理准备就可以变被动为主动，变消极为积极，充分发挥学习上的潜力，以取得较好的成效。

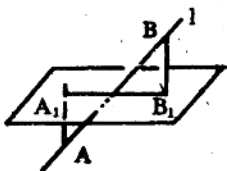
立体几何的知识体系 可以从以下两个方面来掌握。一是按知识发展的体系，先是组成空间图形的最基本的图形——直线、平面及其位置关系，然后是一些比较重要的立体——多面体与旋转体。在直线和平面中，也是按平面、线线、线面、面面这个由简至繁的知识体系来学习，对于每一部分知识又可以按定义、判定、性质、画法及其应用的顺序进行研究；在多面体和旋转体也是按柱、锥、台、球的顺序，对于每个立体也是按定义、性质、表面积和体积的顺序进行研究。这样的安排有利于人们学习，有利于抓住知识的内在联系，现行高中教材就是按照这样的体系来安排。另一是按着立体几何中所要解决的一些基本问题把有关的知识串联起来，这也是一种记忆、运用所学知识的重要手段。例如在证共面、异面时要用到平面的基本性质和异面直线的定义，把这些知识串联起来就为证明异面、共面提供了比较充分的证明依据；在证平行、垂直时也要用到立几、平几中的一些重要知识，把这些知识串联起来，就会为人们提供证平行、垂直的各种可能用到的方法，提高人们的分析、解决问题的能力。本书对知识的归纳就是选用这后一种体系，根据分析、解决问题需要，把知识按共面异面、平行垂直、距离和角、多面体、旋转体的顺序分别串联起来，形成一个崭新的知识体系，便于应用和记忆。若与教科书配合使用，将会有利于知识的巩固与提高。

几种常见的逻辑错误 ①平、立不分，错把平面几何中的结

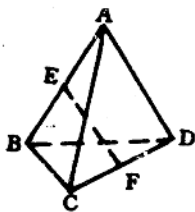
论用在空间. 如错误地认为不平行的直线必相交, 这是平面几何中的情况, 到了空间不平行的直线还可能是异面直线; ②考虑问题不够周全, 往往漏掉一些重要方面. 例如判断: “若一直线上的两点到一平面的距离相等, 那么这条直线和这个平面是否平行” 时, 许多人认为是正确的, 因为他们看到了不少有两点等距, 直线与平面平行的例子 (图甲), 然而这仅仅是两点在平面同侧的特殊情况, 当这两点在同一平面的不同侧 (图乙), 上述结论就是错的. 类似这样的例子很多, 要注意



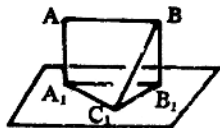
图甲



图乙



图丙



图丁

区别; ③过分地依赖直观, 用形象的直观代替逻辑上的判断, 例如在图丙中, AD 和 EF 是异面直线, 但却有相当多的人 (在 1990 年高考中) 把它们看成平行线, 误把 $\angle CAD$ 当作异面直线 AC 和 EF 所成的角; 在图丁中 $\angle A_1B_1C_1$ 是直角, 但不少人却把 $\angle A_1C_1B_1$ 当作直角; ④错误地把未加证明的命题甚至错

误的命题作为证明的根据，即所谓伪据论证。例如在证明两两相交而不共点的三条直线必在同一平面上时，有人作这样的论证： $\because a, b$ 是相交直线， $\therefore ab$ 在同一平面内；同理 b, c 在同一平面内， $\therefore a, b, c$ 在同一平面内（证毕）。实际是作了错误论证。因

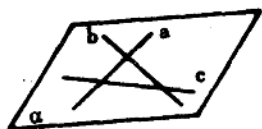


图 1

为在他看来若 a, b 共面、 b, c 共面则 a, b, c 必然共面，这实际是个错误命题，因当 a, c 是异面直线时（见右图）上面的论证仍可进行，即 a, b 共面， b, c 共面，但 a, c 不共面。错在把错误的命题当作论证的根据；⑤忽略了必要的证明，即论证的不严格，如在进行“空间一点 P 到二面角 $\alpha-l-\beta$ 的两个面 α, β 距离分别为 $\sqrt{2}\text{ cm}$ 和 $\sqrt{3}\text{ cm}$ 。

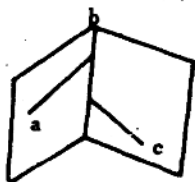


图 2

棱 l 的距离为 2 cm 时，求二面角 $\alpha-l-\beta$ 的大小”时，一些人做这

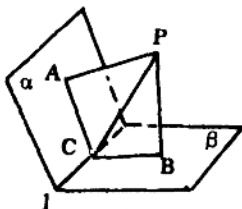


图 3

样的计算：过 P 作 $PA \perp \alpha$ 于 A ， $PB \perp \beta$ 于 B ， $PC \perp l$ 于 C 。易证 $l \perp CB$ ， $l \perp CA$ ， $\angle ACB$ 是二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角，又 $\angle PCA = 45^\circ$ ， $\angle PCB = 60^\circ$ ， $\therefore \angle ACB = 45^\circ + 60^\circ = 105^\circ$ 。其实出现了两个错误：一是没有证明 PA, PB, PC 三线共面，若不共面，求 $\angle ACB$ 时就不能将 45° 和 60° 相加，二是 PA, PB 还可能在 PC 同侧，这时 $\angle ACB = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$ 。前一个错误就是互略了必要的论证，正确的作法是先作垂线 PA, PB ，过 PA, PB

作平面与 l 相交于 C , 证 $l \perp PC$, 这就避免了证 PA 、 PB 、 PC 的共面问题; ⑥增加了题设中所没给的条件, 例如在证明: “已知平面 α 外两平行线中的一条直线 $a \parallel \alpha$, 求证另一直线 $b \parallel \alpha$ 时, 有人进行如下论证: 设 a 、 b 所在平面与 α 相交于 c , …… 实际是增加了一个条件, 因题设仅说 a 、 b 平行, 未说 a 、

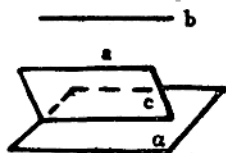


图 4

b 所在平面与 α 一定相交. 正确的作法是过 a 作平面与 α 相交于 c , …… 以上是几种常见错误, 只是常出现错误的几种类型, 在立体几何中常见的错误很多, 要通过经验的增加和能力的提高逐步克服, 尽量避免不应出现的错误.

立体几何的学习方法 立体几何是门崭新的科学, 并且有它自身的特点和规律, 因此要根据它自身的特点和规律进行认真的学习. 其主要表现为: ①准确地掌握知识, 特别是有关空间图形的定义、性质、画法和计算的知识. 为此需熟记教材中的定义、定理、公理、性质、法则和公式, 把它们作为分析问题和解决问题的根据. 特别是立体几何证明题, 必须以教材中的定义、定理、公理和性质为根据, 而不能以其它的什么命题为根据. 对于这些知识不仅熟记其内容, 还要熟记其名称, 如三垂线定理, 平面基本性质 1 等等, 通过名称熟记定理. 不仅记忆, 还要串联, 把学过的知识按一定的体系串联起来, 形成比较系统完整的知识. 不但串联, 还要对比, 通过对比抓住本质, 加深理解, 形成更加牢固的知识, 其次是准确地掌握上述知识的内容, 不出理解性或记忆性的错误. 减少不必要的失误. ②培养自己运用所学知识分析、解决问题的能力, 形成一些必要的技能、技巧. 这里所说的能

力主要有：对知识和问题的理解力，特别是对所学的知识要明确它是哪一类知识？是针对什么问题提出的？为了解决这个问题做了一些什么样的工作，并得到了一些什么样的结论？要对这些方面加强理解；对所遇到的问题要明确已知什么，求（或要求做到）什么？通过什么样的途径才能达到这个要求以及怎样才能达到这个要求？不仅对问题能充分理解，对题中所给出的图形也要充分地理解，那就是表示了一些什么样的空间图形？有哪些重要元素？各元素间有什么样的关系，哪些是位置关系，哪些是数量关系？在图中都如何表现？并在此基础上进一步分析为使问题得到解决，还需要增添一些什么样的元素？怎样增添？增添后又会出现什么样的后果？等等。只有把这些问题分析透、理解透，才能顺利地解决问题，其次是要有较强的分析判断能力和逻辑思维能力，即能从未知看需知，从已知看可知，沟通已未知，通过这样的分析、综合抓住问题的实质，找到正确的解题途径；第三是正确的运用知识作出判断，不出逻辑性或知识性的错误，确保每步解题准确无误；第四是提高空间分析和空间想象力，善于站在空间的角度分析问题，不要出现把空间问题当作平面问题的错误；要考虑到空间的各种可能，不出现只看一面或只考虑到一方面的情况而不看或不考虑另一方面的情况；要掌握各种空间图形的直观图的画法，会用直观图表示空间图形或根据需要画出相应的直观图，借助图形分析空间和表现空间；第五是综合利用所学知识分析、解决较复杂问题的能力，一是掌握一些简单问题的解法，会用一些简单问题来解决复杂问题；另一是学会分析和转化，把复杂问题分析、转化为简单问题，把立体几何问题分拆、简化为平面几何问题，通过简

单问题求得复杂问题的解；三是注意多种方法的使用，特别是那些非常规的代数法、三角法、同一法、反证法、转换法的使用，使解题有更大的灵活性；第六是口头、书面的表达能力，会用数学的语言，特别是立体几何语言分析、表达问题，会用图形来说明问题，能用比较规范的方式进行证明、计算和表述。③积极进行实践，掌握解题规律，积累解题经验。这里主要是：第一把立体几何的问题分类，区分为证明、判定、计算、画图几大方面，每一方面又有哪些类型的问题，每类问题又有哪些不同类型的解法，按类掌握知识、规律、方法；第二是积累总结经验，掌握一些典型例题，通过典型例题掌握相应的方法；第三是积极参加实践，多演题，多作题，通过“游泳”来学习“游泳”，进一步掌握它的规律。

立体几何的证明问题 立体几何的证明可分为以下几类：①证图形的共面、异面；②证线线、线面、面面平行；③证线线、线面、面面垂直；④证线段或距离相等；⑤证线段或距离之间具有某种相等关系和不等关系；⑥证角相等或角之间具有某种相等或不等关系；⑦证立体是某种特殊的立体，如证某一立体是平行六面体等等；⑧证某一立体具有某种性质，如长方体的对角线的平方等于它的三度（长、宽、高）的平方和等等；⑨证点、线、面的一些特殊关系，如诸点共面，诸面共线、共点，诸点共球面等等；证点、线、面的从属关系，如点在直线上，点在平面内，直线在平面内等等；⑩证存在唯一，例如证自平面外一点有且只有一条直线垂直于这个平面等等；⑪证最大、最小，如自平面外一点向平面引垂线段和斜线段，以垂线段的长为最短等等。这十一种证明都会出现，但以共面、异面、平行、垂直最为重要，许多重要的证

明都归结为这四类证明.

立体几何的证明方法 主要有以下几种: ①直接法, 即通过 $A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow \dots \Rightarrow D$ 来证明“若 A 则 D ”. 使用这种证明的关键是充分地利用所学的定义、定理、公理、性质等重要基础知识, 把它们作为实现每一部推理论证的根据. 其次是从题给条件出发, 把它们作为证明的起点或突破口; 第三是把握论证的方向, 通过“由未知看需知, 逐步回溯到已知”这种重要的分析手段沟通未知, 找到实现证明的可行途径; 第四是进行规范地论证, 不出论证上的逻辑错误; 第五是多种证明途径方法的使用, 在用一种方法不容易走通时, 立即换成另一种方法和途径, 以迅速地找到合理可行的解题途径; 第六是注意图形性质特别是一些平面图形的使用, 必要时可引进一些辅助元素或将证明的问题转化; 第七是顽强地思考, 直至找到切实可行的方法. ②同一法, 即利用两图形重合来证某一图形具有某种性质的证明方法. 例如, 证过平面外一点向平面所引的垂线一定在过平面外这一点而与这平面垂直的平面内时, 就可以使用这种方法:

如图设 $PA \perp \alpha$, $P \in \beta$, 且 $\beta \perp \alpha$, 在 β 内过 P 作 $PA' \perp l$ 于 A' , 则 $PA' \perp \alpha$, 又 $PA \perp \alpha$, 且经过平面外一点有且只有一条直线垂直于这个平面, $\therefore PA'$ 与 PA 重合, 而 $PA' \subset \beta$, $\therefore PA \subset \beta$, (证毕). 其证明

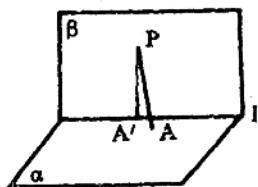


图 5

的一般步骤是: 欲证图形 A 具有性质 a , 先作一图形 B 使它具有性质 a , 然后证 A 与 B 重合, 最后通过 A 与 B 重合 (即同一) 证 A 有性质 a . 同一法是一种间接证明或一种技巧性的证

明方法，在原命题难证，但逆命题易证时，常用这种方法。③反证法，即通过“非 A 不真”来证明“A 真”的一种证明方法，其一般形式是：先作与求证相反的假设，然后从假设出发进行合乎逻辑的推理，得到相互矛盾的结果（这相互矛盾是指所推结论与已知矛盾或与所学的定义、定理、公理矛盾或所推得的结论自相矛盾）；最后是通过否定假设来肯定求证。反证法也是一种间接证法，在原命题的证明比较困难时，可以选用这种方法。例如，证线面平行的性质定理就可选用这种方法。即已知 $a \parallel \alpha$, β 通过 a

且 $\beta \cap \alpha = b$, 求证: $a \parallel b$ 时可作如下证明: 假设 a 与 b 不平行, 因 a, b 共面, 所以 a, b 必相交, 其交点在 α 内, 这与 $a \parallel \alpha$ 这一已知条件矛盾, 所以 $a \parallel b$ 。④

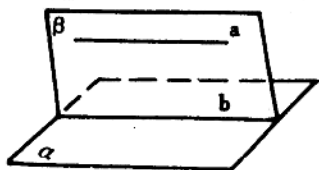
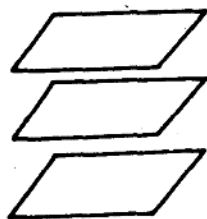


图 6

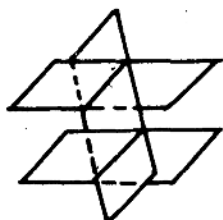
其它一些证明方法，如极限的方法、数学归纳法等等，但使用的不多，仅在一些极特殊的问题中使用这些方法。

立体几何的判定问题 主要有以下几种判定：①有关位置的判定，如共面、异面、平行、垂直的判定等等。对于这类判定，首先要求人们准确地掌握知识，不要犯知识性的错误，特别是有关位置的定义、定理、公理、性质中的那些前提条件和相应的结论，不能把条件搞错、结果搞错；第二是注意平面与空间的区别，不要把平面知识不加证明地用在空间；第三是要全面地看问题，不要遗漏可能出现的各种情况；第四对所做出的结论要再次分析，看它是否正确，要通过反复推敲或多方验证确保判断正确。②有关数量的判定问题，如有关确定平面的数量，空间区域的划分，有关线段和角的大小

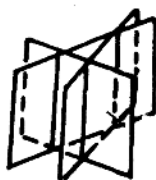
比较、最大最小的判断，有关面积或体积的判断等等。对于这类判断，主要是注意事物出现的各种可能，把可能出现的各种情况都估计到，对于每一种情况或可能都不能漏掉。在研究的事物比较复杂，出现的可能比较多时，还可以通过分类、排序等逻辑方法来帮助思考，使估计出来的数量准确无误。例如回答：“三个不同平面将空间最多分成几个部分，最少分成几个部分”时，可按三个面都不相交、有两个面不相交和每两面都相交这三种情况分析，对于第三种情况又



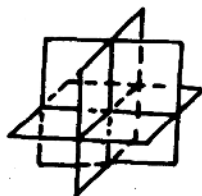
(A) 4 个



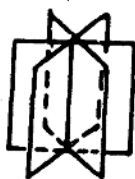
(B) 6 个



(C) 7 个



(D) 8 个



(E) 6 个

图 7

可以按照两两相交的三条交线的平行、共点、重合这样的顺序考虑（如图 7），最后得出最多为 8，最少为 4 的正确判