科學圖書大庫

數學之內容方法及意義

(第一冊)

譯者　劉世超・郭從古

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

數學之內容方法及意義

（第一冊）

譯者　劉世超・郭從古

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會

科學圖書大庫

監修人　徐銘信　科學圖書編譯委員會主任委員
編輯人　林碧鐙　科學圖書編譯委員會編譯委員

中華民國六十七年四月二十日五版

數學之內容方法及意義
(第一冊)

基本定價　3.60
6.43

譯者　劉世超　中央研究院數學研究所所長
　　　郭從古　中央研究院數學研究所專任編纂

本書如發現裝訂錯誤或缺頁情形時，敬請「刷掛」寄回調換。謝謝惠顧。

(63)局版臺業字第0116號

出版者　財團法人臺北市徐氏基金會　臺北市郵政信箱53-2號 電話7813686 7815250號
發行者　財團法人臺北市徐氏基金會　郵政劃撥賬戶第15795號
承印者　大興圖書印製有限公司三重市三和路四段一五一號　電話9719739

中文翻譯本序

本書先經美國數學會翻譯成英文印行。因頗受歡迎，乃改良版式重印再版，共分三大册。我們的中文本是根據英譯的再版本翻譯的。目前只印出第一册，其餘兩册尚待陸續翻譯。

如何便利各門科學家（包括數學家）及工程人員增廣其數學知識亦是高等數學教育的一個重要工作。要爲一些已成年且智力已趨成熟的人講解數學，必需能扼要，深入。另一方面又需要從頭講起，由淺入深，才能使一位進入某一新領域的人獲得透澈的了解。我們翻譯的這部由俄國數學家們講述近代數學的巨著很能滿足上述這個需要。

由古典數學（包括大部的中學數學）轉換到近代的高等數學，需要越過一個很大的鴻溝。學者往往爲了這個鴻溝而喪失興趣及學習的勇氣。許多年來有一本膾炙人口的書，即是由碩學通達的大師如柯郎（ Courant ）及羅賓斯（ Rubbins）所合著的「什麼是數學？」（ What is marhematics ）。這是一本把人帶進近代數學的極佳的導引（大學中數學概論課程也爲了達成相似的功效）。先研習它，固可作爲其他課程的準備，而人若能在讀畢若干數學課程之後再來讀它，亦可收到融會貫通的效果。我們現在翻譯的這部書具有同類的功用，不同的是，它的規模更大，目標更高。全書分述二十個數學的部門，各由俄國名家執筆。它不以粗淺的介紹爲足，而要引導讀者登堂入室，認識各門數學的現況。俄文版原序中有一點值得注意的是說：這部書也是以一些年青的數學家爲對象而寫的，他們即使已知道書中大部材料。而這書却可以開擴其眼界。

書中不免涉及一些哲學觀點，並非自由世界數學著作中習見之題材；如果僅是俄國體制下的一些官樣文章則可不予重視。另一方面，俄國集合許多在數學研究方面造詣最深的大家來合寫這樣一部講解數學的書則是非凡的事件。

現在印出的第一册譯文是由郭從古先生與筆者共同翻譯，而以郭先生分擔的工作獨多，在此應予聲明。在此次翻譯工作中，筆者得閱讀此册之各章

，學到許多從前不知道的東西。作者娓娓道來，如數家珍，而筆者讀時則感津津有味，認爲是莫大的樂趣，故亦希望其餘兩册的翻譯能早日完成。現郭從古先生滯留海外未歸，筆者謹識數語如上。此册翻譯難免錯誤不當之處，尚希各方賢達指正。

劉世超　識於南港。中華民國五十九年十二月十五日

英文翻譯版編者序

數學，由於它的抽象性，使講解它的人較在其他科學方面遭到更大的困難。然而數學在現代生活中所扮演角色的重要性急遽增加，我們因而需要也甚盼望能得到好的講解數學的書文。

近年來有許多用英文寫成的關於數學的通俗的書出現，其中一些還享有廣大的銷路。但其中大部份未能負起認眞而嚴肅地教授數學的功用，又很多書對二十世紀，無疑爲數學「黃金時代」的這一段付之缺如。這些書雖在某些方面也是令人稱美的，但他們實未擔當起對數學的講解工作，那就是說，他們未能做到把近代數學大規模地組織起來，俾使讀者省時省力而獲得閱讀的愉快。凡人讀了本書的前幾章的，都會認出蘇聯作家們對這種數學的講解工作做得多麼好。照他們序言中所說的，他們的工作是經過一番有系統的合作而完成的。

這樣的一部書，旣然是爲蘇聯知識份子的一個廣大圈子而寫的，它需要同時討論到數學在文化方面的重要性，以及數學從其最早的歷史發端直到目前的連續發展。爲了從這個觀點對本書予以批評，只要閱覽第一部的第一章以及其他一些章，譬如分析一章或解析幾何一章的引言就夠了。

在翻譯有關數學觀念的文化及歷史意義的章節時，翻譯者自然感到比翻譯一般科學文學所遭到的困難更大。作爲一個團體的主持人，我對另外兩位翻譯者技巧的合作深致謝意；他們兩位是巴棠（ Tamas Bartha ）和赫爾西（ Kurt Hirsch ）。

本書的翻譯原經美國數學會出版，現以新的版式再版將享有更廣的流佈。美國數學會之所以要使這部書能流傳更廣也曾受了一些美國數學家所發表意見的影響。且以下面一段意見爲例，「……此部書大大地幫助了讀者大衆了解到數學家們在幹些什麼……。這部書對數學家，物理學家，化學家，以及一般的外行人皆是有用的……無論一位物理學家是否希望知道什麼是李氏代數以及它和李氏群的關係；或者一個大學生是否願開始研讀同調論（homology）；或者一位晶體學家對於費得諾夫群（Fedorov groups）是否發

生興趣；或者一位工程師對或然率，或任何科學家對計算機不管有沒有興趣，他可以在書中找到連貫及清晰的講述。」

此翻譯的初版曾經數學家及學數學的學生們廣泛閱讀過，我們盼望它現在能在英語世界中派上更大的用場。

一九六四年八月

哥爾德（S. H. Gould）
翻譯編輯
美國數學會
普若維登斯，洛德島（Providence Rhode Island）

俄文原版序

數學在古時起源於日常生活，而發展結果已成龐大系統包括廣泛多端的部門。和他種科學一樣，數學也是反映環繞吾人即物質世界所遵循的定律，它對人類支配自然及求得關於自然的知識皆是極有力的工具。但是數學特有它的高度的抽象性，換言之，數學較新的分支不易爲非專材的人所接近。數學的這種抽象性在古時就已產生一些唯心主義的觀念，把數學看成是與物質世界獨立而無關的。

在編寫本卷時，各位作者心目中皆保持一個目標，就是使足夠廣大一圈的蘇聯知識份子得以認識數學的各分支，認識它們內容及方法，它們所賴以建立的基礎，以及它們曾沿以發展的種種途徑。

對於讀者要求的必需預備知識，其最低限度是很少的，我們只假定讀者具有高中數學程度。但是各卷之間却有相當差別，這一卷所含的材料會比另一卷的難些。若讀者是初次要認識高等數學的要素，則他去讀前面的幾章將會得益，但要想完全了解後面的部份，則讀者必需先已研讀若干相關的教科書。這部書總起來要想爲讀者透澈了解，唯有他先已知道數學分解的一些應用；也就是說，他已學過微分和積分學。對於這樣的讀者，即教授數學及工程的教師們，特別要緊的是去研讀引進數學新支的各章。

自然，要想在一本書的限度裏把數學研究的豐富內容窮盡舉出，即使只涉及最基本的結果也是不可能的；因此，本書在材料方面作某種度程的自由選擇乃不可避免的。但就一般來講，本書將對數學的現況，數學的起源及其未來可能的發展，爲讀者提供一個概念。由於這個原因，本書對即些已熟悉書中大部份材料之事實的人也是有用，在某程度言本書也是爲他們而寫的。本書或能幫助人撤消視界的狹仄，而我們的一些青年數學家常不免犯此毛病。

本書的各章是分別由各個作者來寫的，他們的名字見於目錄中。但此書整體說來是一項合作的成果。它的總計劃，它的材料的選擇，各章遞次之屬稿皆曾經過通盤的討論，根據意見的交換再加以改進。從蘇聯各大城市來的數學家也曾作有組織的討論，他們得有機會對本書的原稿提供許多有價值的

議論 。他們的意見和提示皆供作者們參考應用 。

有些章的作者對其他各章的最後定稿也曾直接參加一份：第二章的引論部份主要是由得龍 (B. N. Delone)所寫；而法得夫 (D. K. Faddeev)對於第四章及第二十章的製作皆曾盡力。

又各章有時除作者外還有別的人的分工：第十四章的第四節是由康脫若維 (L. V. Kantorovic)寫的，第六章第六節是由拉辛斯卡 (O. A. Lady-ženskaja)寫的，第十章第五節是由波斯尼可夫 (A. G. Postnikov)所寫；又第五章的文字曾有歐林尼克 (O. A. Oleinik)的加工及第十一章有普若荷夫的加工 。

第一，二，七及十七各章中的若干節是由查加勒 (V. A. Zalgaller) 所寫；正文定稿的最後編輯工作是由查加勒及維登斯基 (V. S. Videnskii)所擔任，並有若高金亞 (T. V. Rogozkinaja)及林諾瓦亞 (A. P. Leonovaja) 的合作 。

大部份的插圖是由辛金 (E. P. Senkin)製作的 。

莫斯科　　　　　　　　　　編輯部
1956

目 錄

第一部份

第二部份

第三章　解析幾何

第一章　數學概說

欲把一門科學介紹清楚，必須縷述這整個科學的主要性質，如果忽略了這點而專講細節，則不論講的怎樣詳細，也不能予人以完整的概念．本章的目的在把數學的主要性質作一概括的敍述及檢討．由於我們根據初等數學及科學發展史已可對數學的特性作一些一般性的結論，所以本章裏用不着介紹近年來各種數學理論發展的詳細情形．

第一節　數學的特性

1. 抽象，證明，應用　．一個人只要稍具數學常識，就不難覺察數學的某些特性，如抽象性、精確性、邏輯謹嚴性、結論的不可辯駁性、以及應用範圍的異常廣大性。

我們很容易看出數學的抽象性：我們用抽象的數進行運算，而不管在每一種運算裏，這些數到底是與甚麼事物相關．在小學裏，學生背的乘法表是用抽象的數乘抽象的數，而不是用兒童的人數乘蘋果的個數，或者是用蘋果數乘每個蘋果的價錢．

同樣地，在幾何裏，我們討論直線而不討論絲線或棉線，前者是抽象的線，後者是具體的線；而幾何直線的觀念，除了向一方面延長以外，是把其他的性質拋掉而抽象得來的．更廣泛地說，一個幾何形，乃自實物的性質中抽象得來，只剩下空間的形狀及維度等．

像這類的抽象，就是整個數學的一個徵性．整數與幾何形體的觀念只不過是數學裏最早與最初等的兩個觀念罷了．繼它們之後，還有更多的數學觀念．諸如複數、函數、積分、微分、泛函數、n 維空

間飌至無限維空間等都是的．這些抽象名詞，一個又一個地堆積起來其寬泛抽象已達極高的程度，以致顯明地已與人們的日常生活完全脫了節，而一般塵世中的人對它們所知道的只有不可思議而已．

當然，實際情形並非如此，n 維空間的觀念雖然無疑地極為抽象，可是它依然有完全眞實的內容，而這內容還不怎樣難於瞭解．在本書裏，我們要把上述種種抽象觀念的具體內容強調並講明白，俾讀者相信它們不論是在本源上或在應用上都與實際生活有關．

不過，抽象並不是數學專有的性質，每一門科學都有這種性質，甚至所有的心智活動也不例外．因此，單只數學觀念的抽象性倘不足以界說數學的特性．

數學的抽象性有三個特徵．第一，它們首要討論的是量的關係與空間的形式，而這些都是從事物所有的其他性質中抽象得來的．第二，數學的抽象性，其發生是一連串的，抽象的程度越來越深，所達的抽象境界遠比其他的科學深遠．關於這兩個特徵，我們在後面要用數與形的基本觀念詳細解釋．第三個特徵是顯而易見的，即數學的活動幾乎完全限於各種抽象觀念及它們彼此關係的領域裏．自然科學家經常要把他們發明的理論或得到的結果用試驗去印證，數學家則只做論證與計算的工作．

我們不否認數學家常使用模型與物理模擬來幫助他們發現定理或方法，並且也常求助於種種完全具體的例子；這些例子常常就是一個數學理論的實際起源，並為發現定理的媒介．但是凡能成為數學上的定理者，沒有一個不是曾經經過嚴格的邏輯論證的．假如某幾何家說他新發現了一個幾何定理而只用模型去證明它，則沒有一個數學家會承認這定理已經得到證明．我們都知道，在中學裏，幾何須有證明；其實，在整個數學裏都是這樣．我們可以極其精確地去量成千成萬的等腰三角形的二底角，可是這樣的辦法絕對不能作為“等腰三角形二底角相等”定理的數學證明．數學家們要這結果必須係導自幾何的基本觀念．由於現在的幾何是從一個嚴格的基礎上發展出來的，所以這些基本觀念都精確地陳述在幾何的公設裏．這在數學的其他科目，情形也是一樣．對於數學家而言，他們證明一個定理，即是用邏輯的論

證，從這定理內諸觀念的基本性質來推出這定理．這樣一來，不僅數學觀念，而且還有數學方法，全部是抽象的與理論性的．

數學結果的特異之處是其邏輯的高度嚴格性；數學論證的嚴密足使其無懈可擊，並且足以說服任何懂得它的人．在高中數學裏，大家大概已經知道數學證明的嚴密及其服人的力量．事實上，數學眞理是完全無可辯駁的典型．人們常說：“清楚的像二加二等於四一樣”，這話是不無道理的．這裏的二加二等於四的關係就是無可辯駁的寫照．

不過，數學的嚴格性並不是絕對的．它的嚴格只出現在一個連續發展的過程中．而數學原理尙未定型，它有它的生命，它甚至還可以成爲科學爭論的主題．

最後的分析顯示，數學的活力在於它的觀念與結果，儘管極其抽象，却是源自實際的世界，並在工程上、其他科學上、及日常生活的事物上有廣大的用途．我們在後文將可看到這點．認淸這一點乃瞭解數學最要緊的先決條件．

數學的另一個特性是它具有非常廣大的用途．首先，在工業上、在私人及社會生活裏，我們幾乎時時刻刻都在用數學的種種觀念及結果，只不過沒有意識到在用它們而已．例如，我們用運算去計算日常費用與用幾何去計算公寓面積都是．當然，現在看起來，計算這類問題的規則很簡單；不過我們要知道，在遠古的時候，像這類的計算已算是當時最最進步的成就．

其次，如果沒有數學，就沒有今日的工藝．我們可以說，大概沒有一種技術程序不是經過或繁或簡的數學計算而完成的．此外，數學在新工藝的發展上，也佔有很重要的地位．

最後，每一種科學都多多少少地用到數學 我們都知道，精確科學裏的力學、天文學、與物理學，範圍再廣些還可包括化學，這幾門科學，都是用公式來表示它們的定律，並廣泛地使用數學作爲發展它們定理的工具．如果沒有數學，這幾門科學可說不可能有任何進步．因此，很久以來，力學、天文學、與物理學上的需求對於數學的發展一直具有直接而決定的影響．

數學在其他的科學上雖然沒有上面所說的那麼重要，但它仍有重

要的應用。在研究像生物學或社會學的複雜現象時，數學方法所扮演角色就不像它在物理學裏的重要。不過我們必須記住數學的應用，在所有的情形下，尤其是事物現象特別複雜時，如果我們不漫無目的地玩弄數學公式，則只有當具體的現象已成爲一個精深理論的主題時，數學的應用才有意義。幾乎所有的科學、從力學到政治經濟，都以種種方式用到數學。

下面講幾個數學在精確科學上與工程技藝上應用的傑出例子。

海王星是太陽系裏的一個外圍行星，發現於1846年，它就是根據數學計算而發現的。原來，天文家亞丹姆斯與賴維利耶二人在分析天王星運行的某些不規律的情形以後，認爲它所以發生這些不規律的現象，是因爲受另外一個行星吸引的緣故。賴維利耶根據力學定律算出這行星應在的方位，把計算的結果通知一個天文觀察者，這人在賴維利耶指稱的方向發現了這顆海王星。這一發現，不只是力學與天文學的勝利，特別是哥白尼學說的勝利，而且也是數學推求及計算力量的勝利。

另一樁事情是電磁波的發現，這事也一樣地動人心目。英國的物理家麥克士威爾歸納人們由試驗而建立的電磁現象定律，並予以推廣演出若干足以表示這些定律的方程式。他用純粹的數學方法從這些方程式裏推得電磁波可能存在，並且一定是以光的速度傳播出去。根據這一結果，他乃提出了著名的光之電磁說。此說後來在很多方面都有廣泛而深入的發展。還有，他的這個結果導引人們去探尋純出自電源的電磁波（例如出自振動電荷的）。這種電磁波實際是由德國的物理家赫芝首先發現的。此後不久，麥抱夫發現了激勵、發射、及接收電磁波振動的方法，使它能用在種種不同的地方，從而奠定了整個無線電技術的基礎。無線電在現在是盡人可有的，可是它的發明，純數學演繹的結果却佔有重要的地位。

科學就像這樣的，從觀察（例如磁針受通電導線的吸引而偏轉），而歸納推廣，而衍出理論，而形成定律，而表示爲數學的式子。從這些定律裏再演繹出新的結果。最後把理論付諸實用，而實用的結果轉又產生新的刺激促使發展新的理論。

數學上最引人注意的事情是：有些最抽象的構造，起自數學本身而非源自自然科學或工藝需要的直接刺激，但後來却有很大的用途．例如，虛數最初起源於代數，它在實際世界上的意義經過很長的一段時間還不能爲人瞭解，而它的名字叫虛數或想像的數也正說明這一事實．但是自從在1800年左右，數學家們給它一個幾何的解釋（參閱第四章第三節）以後，它乃根深蒂固地躋身在數學裏，衍生出廣博的複變數（即形如 $x+y\sqrt{-1}$ 的變數）之函數論．這個由虛變數形成的虛函數，不但一點也不虛，而且還是求解工藝技術的一種很實用的工具．譬如，朱可夫斯基的關於飛機機翼昇力的基本結果就是藉這函數論證出來的．又複變數函數論在求解堤壩下面滲水問題時也非常有用，現在世界各國紛紛都在興建大的水力發電廠，這當然是一個很重要的實際問題．

另一個同等重要的例子是非歐幾何*．這幾何是從歐幾里得時代起，前後歷經兩千年，爲證明一個純數學的問題——平行公設——而產生．勞巴柴夫斯基是這新幾何的創立人．他小心地給它起個名字爲想像的幾何．這是因爲他看不出這幾何在現實世界裏有任何意義．不過，他相信人們遲早會找出它的意義來．他的這種幾何對於大部份的數學家不只是想像的，而且甚至是荒謬而不可想像的．然而，他的觀念却成爲幾何的一種新的發展基礎，產生了種種不同的非歐幾里得空間的理論，而這些觀念後來還成爲一般相對論（相對論裏的數學是四維空間的非歐幾何）的基礎．數學的抽象構造，就像這樣的，最初似乎是不可理解，最後則成爲導出物理學裏一個最重要理論的有力工具．同樣地，在現在的原子理論裏，在所謂量子力學裏，都曾用到很多並且很抽象的數學觀念與理論，例如無限維度空間就是其中的一個．

我們用不着再多舉例子，因爲上面的幾個例子已足夠說明數學如何廣泛地應用於日常生活與工程及科學上．在數學自身內產生的理論甚至能在精確科學及工藝的重大問題裏找到用處．這是數學除了抽象

*我們在此僅提出這個例子而不作進一步的說明．讀者欲知其詳，可參閱第十七章．