普通高等教育“十五”国家级规划教材

（高职高专教育）

经济数学基础——线性规划

第二版

崔福荫　戴宗儒　李文辉　张自兰　李志强　编

高等教育出版社

普通高等教育“十五”国家级规划教材

（高职高专教育）

经济数学基础——

线性规划

第二版

崔福荫　戴宗儒　李文辉　张自兰　李志强　编

高等教育出版社

内容提要

本书是在《经济数学基础——线性规划》(第一版)的基础上，根据高等专科学校经济类专业数学的需要而修订的。修订之前，编者吸取了有关院校和专家的宝贵意见，在保持原书的结构和风格的前提下，依据当前学生的实际，以强化应用、培养技能为重点，对全书进行了修订和润色。重要概念和方法前增加了引例。每章后配备了标准化习题，新编了附录《利用 Mathematica 系统解决线性规划的计算问题》。

本书可作为高等专科学校财经管理类专业、高等财经院校及管理院校专科数学基础课程的教材，也可供自学考试、电视大学的师生和经济工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

经济数学基础——线性规划/崔福荫等编.—2版.
—北京:高等教育出版社,2003.5
ISBN 7-04-012407-6

Ⅰ.经… Ⅱ.崔… Ⅲ.①经济数学—高等学校:技术学校—教材②线性规划—高等学校:技术学校—教材 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 014117 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100009	网　　址	http://www.hep.edu.cn
传　　真	010-64014048		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
排　　版	高等教育出版社照排中心		
印　　刷	北京机工印刷厂		
		版　　次	1989 年 10 月第 1 版
开　　本	787×1092　1/16		2003 年 5 月第 2 版
印　　张	7.5	印　　次	2003 年 5 月第 1 次印刷
字　　数	170 000	定　　价	8.60 元

出版说明

为加强高职高专教育的教材建设工作,2000年教育部高等教育司颁发了《关于加强高职高专教育教材建设的若干意见》(教高司[2000]19号),提出了"力争经过5年的努力,编写、出版500本左右高职高专教育规划教材"的目标,并将高职高专教育规划教材的建设工作分为两步实施:先用2至3年时间,在继承原有教材建设成果的基础上,充分汲取近年来高职高专院校在探索培养高等技术应用性专门人才和教材建设方面取得的成功经验,解决好高职高专教育教材的有无问题;然后,再用2至3年的时间,在实施《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上,推出一批特色鲜明的高质量的高职高专教育教材.根据这一精神,有关院校和出版社从2000年秋季开始,积极组织编写和出版了一批"教育部高职高专规划教材".这些高职高专规划教材是依据1999年教育部组织制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》(草案)和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》(草案)编写的,随着这些教材的陆续出版,基本上解决了高职高专教材的有无问题,完成了教育部高职高专规划教材建设工作的第一步.

2002年教育部确定了普通高等教育"十五"国家级教材规划选题,将高职高专教育规划教材纳入其中."十五"国家级规划教材的建设将以"实施精品战略,抓好重点规划"为指导方针,重点抓好公共基础课、专业基础课和专业主干课教材的建设,特别要注意选择一部分原来基础较好的优秀教材进行修订使其逐步形成精品教材;同时还要扩大教材品种,实现教材系列配套,并处理好教材的统一性与多样化,基本教材与辅助教材、文字教材与软件教材的关系,在此基础上形成特色鲜明、一纲多本、优化配套的高职高专教育教材体系.

普通高等教育"十五"国家级规划教材(高职高专教育)适用于高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院、继续教育学院和民办高校使用.

教育部高等教育司

2002年11月30日

第一版前言

本书是根据高等专科学校经济类专业教学的需要而编写的.全书包括线性规划问题的数学模型、图解法和单纯形算法、对偶规划、管理决策与信息分析、特殊线性规划问题的解法(表上作业法、图上作业法)等五章.编者力求本书的阐述简明易懂,着重介绍线性规划问题的基本知识和求解方法;注重应用,不追求过分严密的数学推导和论证.书中举例较多,配有足够数量的习题,并附有习题答案.本书可作为高等专科学校财经管理类专业、高等财经院校、管理院校专科数学基础课程的教材,也可供自学考试、电视大学的师生和经济工作者参考.

本书初稿曾在有关院校试用过,效果良好.在试用期间这些院校的师生提出了许多宝贵意见,据此我们对讲稿作了相应的修改,在此对他们表示衷心的感谢.

全书先后由西安交通大学游兆永教授和北京经济学院林寅副教授审阅.

由于编者水平所限,错漏之处在所难免,恳请读者批评指正.

编　者

第二版前言

本书第二版是根据高等专科学校经济类专业教学的需要而修订的.主要针对高等职业学校专科经济类专业的特点及要求,论述了线性规划的模型、基本概念、基本理论、主要算法和应用.本书可作为高等专科学校财经管理类专业、高等财经院校、管理院校专科数学基础课程的教材,也可供自学考试、电视大学的师生和经济工作者参考.

全书包括线性规划问题的数学模型、图解法和单纯形法、对偶规划、信息分析、特殊线性规划问题的解法等五章.

本书第一版自1989年出版发行以来,经有关院校使用,效果良好,获得广大师生的认同和好评.此次再版之前吸取了有关院校和专家的宝贵意见,在保持原书的结构和风格的前提下,依据当前学生的实际,以强化应用,培养技能为重点,对全书进行了修改和润色.重要概念和方法前增加了引例.每章后配备了标准化习题,新编了附录《利用 Mathematica 系统解决线性规划的计算问题》.

本书编者崔福荫先生已去世,修订工作主要由戴宗儒、李文辉、李志强完成.限于我们的水平,错漏之处在所难免,恳请读者批评指正.

编　者

2002.11

目　　录

第一章　线性规划问题的数学模型及其标准形式

§1.1　绪　　论

线性规划是数学规划中理论较完整、方法较成熟、应用较广泛的一个分支，它可以用来解决科学研究、工程设计、活动安排、军事指挥、经济管理等许多方面提出的大量问题.

我们知道，在工农业生产、运输和经济管理等方面，经常遇到两种类型的问题，一类是已给定一定数量的人力、物力资源，问怎样安排运用这些资源，才能使完成的任务量最大，收到的效益最大；另一类是已给定一项任务，问怎样统筹安排才能使完成这项任务的人力、物力资源量为最小.事实上，这两类问题是一个问题的两种提法.这样的问题就是属于线性规划所要研究和解决的问题，对于一些简单的极值问题，在微积分中我们可以用拉格朗日(Lagrange)乘子法得到解决，但当变量数目和约束条件数目相当大时，比如上千，甚至上万个，就不容易解决了，这就需要化为线性规划问题，利用计算机以求得解决.

规划论是一门称为运筹学的学科的重要分支.运筹学包括规划论、更新论、存贮论、质量控制、排队论、对策论等分支，规划论中又包括了线性规划、非线性规划、动态规划三个方面.线性规划的理论、方法比较简捷，只要把所探讨问题的性质、指标因素等，限制在约束条件之中，求出满足约束条件的解，就可以选择或确定符合要求的最优方案.因此，线性规划是运用数学模型解决有限资源最优配置的有效工具和灵活手段.

资源配置问题一直被认为是经济学的一个十分重要的问题.线性规划是一个更接近现实经济活动情况的资源最优配置方法，可以对资源配置问题提供数量的解答.因此，不论在宏观经济领域，还是在微观生产经营活动中，线性规划理论与方法愈来愈广泛地得到应用.

早在 1939 年，苏联坎托罗维奇(Л. В. Канторович)从运输问题入手开始研究，写出了《生产组织与计划中的数学方法》，它是这方面的早期著作.20 世纪 40 年代末丹齐克(G. B. Dantzig)等人进一步从理论和方法上完善了线性规划学科，他在 1947 年与 L.霍尔维茨(L. Hurwicz)共同发明了求解线性规划的单纯形法，为线性规划作为一门学科奠定了基础.D.盖尔(D. Gale)、H. W.库恩(H. W. Kuhn)和 T. W.塔克尔(A. W. Tucker)，在发展对偶理论上作出了重要贡献，从而形成了应用数学中发展迅速、应用广泛而且十分活跃的学科——线性规划.在 20 世纪 50 年代，线性规划已经成了经济学家们分析经济问题的重要工具，在这方面贡献突出的有苏联的坎托罗维奇和美国的库普曼斯(T. C. Koopmans)，他们联合获得了 1975 年诺贝尔经济学奖金.随着现代电子计算机的不断发展，计算能力的大大提高，使这一数学方法的应用，更具有广泛性.

我国在这方面的研究开始于 20 世纪 50 年代，在不长的时间内线性规划理论与方法得到了广泛采用并收到了很好的效果.

1956 年以来数学家对规划论在理论上进行了一些本质性的深入研究，使得求解线性规划的规模愈来愈大，而且规划论和其他数学分支的联系愈来愈多．所以，我们学习这门功课，对于今后的学习和工作都是很有用途的．

§1.2　线性规划问题的数学模型

将数学方法应用到任何一个实际问题中去，往往首先需要把这个问题的内在规律，运用数字、图表或者公式、符号表示出来，然后经过数学处理获得定量结果，以供人们作出分析、预报、决策或者控制．这个过程就是通常所说的建立数学模型．为了了解线性规划的数学模型，我们先看下面的引例．

一、引例

某工厂计划生产甲、乙、丙三种产品．生产甲产品 1 件需要原材料 3 kg，占用劳动工时 2 h(小时)，盈利 4 元；生产乙产品 1 件需要原材料 2 kg，占用劳动工时 1 h，盈利 5 元；生产丙产品 1 件需要原材料 4 kg，占用劳动工时 3 h，盈利 3 元．若每天供应原材料 120 kg，劳动工时数为 100 h，在工时必须完全利用的条件下，问该厂应如何安排日生产，使总利润最大？

解决这一实际问题，我们应当把它归结为数学问题，一般可分以下步骤：

(1) 把问题的相关条件列成表格形式．如下表：

单位消耗 \ 产品 / 资源	甲	乙	丙	资源供给数量
原材料(kg)	3	2	4	120 kg
劳动工时(h)	2	1	3	100 h
单位利润(元/件)	4	5	3	

(2) 选择决定因素作为未知量．

设 x_1, x_2, x_3 分别表示生产甲、乙、丙产品的数量(件)．

(3) 确定问题中的所有的限制条件，用方程组或不等式组表示．

该厂每天消耗的原材料数量不能超过 120 kg．

即：

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leqslant 120.$$

该厂提供的劳动工时数 100 h，必须用完．

即：

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 100.$$

由未知量的实际意义有：

$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0$ 且均取整数．

(4) 确定该问题所寻求的目标：

使总利润 $S(x) = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3$ 取得最大值．

综上所述，该问题的数学表达式(数学模型)为：求 $x_j, j = 1,2,3$，满足约束条件

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leqslant 120, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 100, \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0 \text{ 均取整数}, \end{cases}$$

并使总利润 $S(x)=4x_1+5x_2+3x_3$ 为最大.

由引例我们可以看到,实际问题中用数学式子表述出来,就可以把这些数学式称为实际问题的数学模型.而数学模型中所有表达式都是一次的,把属于这一类的数学模型称为线性规划的数学模型.

二、线性规划的数学模型

把在一组线性等式或不等式的约束之下,求一个线性函数的最大值或最小值的问题称为线性规划问题.线性规划问题的数学模型包含两个组成部分,一是目标函数,二是约束条件.目标函数是一个由欲达到最优目的的有关量所构成的关系式,根据研究的目标是最大还是最小,在目标函数前冠以"max"或"min";约束条件是欲达到预期目的所受到的现实客观环境的制约,将这种制约用等式或不等式表示,即为约束条件,以后简记为 s.t.;是"subject to"的缩写.

研究数学模型,有助于认识这类问题的性质和寻求它的一般解法.但线性规划问题涉及到实际问题是非常广泛的,下面我们举几个典型的实际问题的例子.

例 1.1　运输问题

设 A_1、A_2、A_3 三地某时期产煤各为 7 kt(千吨)、4 kt、9 kt;销地为 B_1、B_2、B_3、B_4 四地,销量分别为 3 kt、6 kt、5 kt、6 kt,问题是如何按下列运价表编制一个调运方案,使总运费最少?

单位 kt

收货 / 发货	B_1	B_2	B_3	B_4	产　量
A_1	3	11	3	10	7
A_2	1	9	2	8	4
A_3	7	4	10	5	9
销量	3	6	5	6	

注:A_1 行与 B_1 列相交处数字 3 为运价元/kt,其他类似.

解　设 S 表示总运费,x_{ij} 表示由煤产地 A_i 运往销地 B_j 煤的数量(单位:kt),($i=1,2,3;j=1,2,3,4$),例如 x_{23} 表示由煤产地 A_2 运往销地 B_3 煤的数量等等.如下表.

单位 kt

收货 / 发货	B_1	B_2	B_3	B_4	产　量
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	7
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	4
A_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	9
销量	3	6	5	6	

因为由产地 A_1 运往四个销地煤的总数应为 A_1 的产量 7 kt,即有

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=7.$$

同样由产地 A_2、A_3 运往四个销地煤的总数应分别为 A_2 的产量 4 kt 和 A_3 的产量 9 kt,即

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=4,$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=9.$$

另一方面,三个产地供给销地 B_1 煤的数量应等于 B_1 的需要量 3 kt,即

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}=3.$$

同理可得

$$x_{12}+x_{22}+x_{32}=6,$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}=5,$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}=6.$$

因此,这一问题的数学模型为

$$\begin{aligned}\min S=&3x_{11}+11x_{12}+3x_{13}+10x_{14}\\&+x_{21}+9x_{22}+2x_{23}+8x_{24}\\&+7x_{31}+4x_{32}+10x_{33}+5x_{34}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{s.t. }\ &x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=7,\\&x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=4,\\&x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=9,\end{aligned}$$

在本例中发货点 A_1,A_2,A_3 产煤总量为

$$7+4+9=20(\text{kt}).$$

收货点 B_1,B_2,B_3,B_4 销量为

$$3+6+5+6=20(\text{kt}).$$

两者相等.这一类问题称为收发平衡型的运输问题,当然也可以研究收发不平衡运输问题.

一般的运输问题可以表述如下:要把某物资从 n 个发货点 A_i, $i=1,2,\cdots,n$,调运给需要这种物资的 m 个收货点 B_j, $j=1,2,\cdots,m$;发货点 A_i 拥有物资量为 a_i, $i=1,2,\cdots,n$;收货点 B_j 的需求量是 b_j, $j=1,2,\cdots,m$,已知

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{j=1}^{m}b_j,$$

从 A_i 运一个单位物资到 B_j 的运价是 c_{ij}.现在要确定一个调运方案,即确定由 A_i 到 B_j 的运输量 x_{ij}, $i=1,2,\cdots,n$, $j=1,2,\cdots,m$,在满足供需要求的前提下,使总运输费用最省.

类似地分析,我们知道一般运输问题的数学模型是:

$$\min S=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}c_{ij}x_{ij},$$

$$\begin{aligned}\text{s.t. }\ &\sum_{j=1}^{m}x_{ij}=a_i,\ i=1,2,\cdots,n.\\&\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=b_j,\ j=1,2,\cdots,m.\end{aligned}$$

$$x_{ij} \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,n, j = 1,2,\cdots,m.$$

实际问题中,收发不平衡运输问题是很普遍的,类似于上面方法,读者可以尝试建立不平衡运输问题的数学模型.

例 1.2 产品安排

某工厂有生产甲、乙两种产品的能力,且生产 1 t(吨)甲产品需要 3 个工日和 0.35 t 小麦,生产 1 t 乙产品,需要 4 个工日和 0.25 t 小麦.该厂仅有技工 12 人,一个月只能出 300 个工日,小麦一个月只能进 21 t,并且还知生产 1 t 甲产品可盈利 8 000 元,生产 1 t 乙产品可盈利 9 000 元.那么,这个工厂在一个月中,应如何根据现有条件安排这两种产品的生产,使之获得最大盈利?建立这个问题的数学模型.

解 设 x_1、x_2 分别表示一个月中生产甲、乙两种产品的数量,则最大盈利为

$$S = 8\,000x_1 + 9\,000x_2,$$

工日的约束为 $3x_1 + 4x_2 \leqslant 300$;原料小麦的约束为 $0.35x_1 + 0.25x_2 \leqslant 21$,该问题的数学模型即为

$$\begin{aligned}\max\ & S = 8\,000x_1 + 9\,000x_2,\\ \text{s.t.}\ & 3x_1 + 4x_2 \leqslant 300,\\ & 0.35x_1 + 0.25x_2 \leqslant 21,\\ & x_1, x_2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

例 1.3 下料问题

已知工厂有一批(数量充分多)长为 180 cm 的钢管.现需要 70 cm 长的不少于 100 根,52 cm 长的不少于 150 根和 35 cm 长的不少于 100 根,问如何下料才能使边料最少?

解 由题意知,经过试算可以有 8 种不同的下料方法.

设 x_i 为用第 i 种截料的方法所截钢管的根数,列表如下:

规 格	截			法					需要量
	x_1 (一)	x_2 (二)	x_3 (三)	x_4 (四)	x_5 (五)	x_6 (六)	x_7 (七)	x_8 (八)	
70(cm)	2	1	1	1	0	0	0	0	100
52(cm)	0	2	1	0	3	2	1	0	150
35(cm)	1	0	1	3	0	2	3	5	100
边料(cm)	5	6	23	5	24	6	23	5	

设 f 为剩余边料的总长.数学模型为

$$\begin{aligned}\min\ & f = 5x_1 + 6x_2 + 23x_3 + 5x_4 + 24x_5 + 6x_6 + 23x_7 + 5x_8,\\ \text{s.t.}\ & 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geqslant 100,\\ & 2x_2 + x_3 + 3x_5 + 2x_6 + x_7 \geqslant 150,\\ & x_1 + x_3 + 3x_4 + 2x_6 + 3x_7 + 5x_3 \geqslant 100,\\ & x_1, x_2, \cdots, x_8 \geqslant 0.\end{aligned}$$

例 1.4 营养问题

假定在市场上可以买到各种不同的食品，第 j 种食品每单位售价为 c_j 元. 现在要求考虑 m 种基本营养成分，若要保证良好健康，对第 i 种营养成分，每人每天不能少于 b_i 个单位. 最后假定第 j 种食品每单位含有 a_{ij} 个单位的第 i 种营养. 在满足保证良好健康的起码营养要求的条件下，来确定最经济的饮食. 试建立这个问题的数学模型.

解 设 x_j 为购买第 j 种食品的单位数. 设 S 为购买食品的总费用. 于是，这个问题的数学模型为

$$
\begin{aligned}
\min\ S &= c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j,\\
\text{s.t.}\ \ & a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\geqslant b_1,\\
& a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\geqslant b_2,\\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
& a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\geqslant b_m,\\
& \quad x_j\geqslant 0,(j=1,2,\cdots,n).
\end{aligned}
$$

以上这些从实际问题中建立起来的数学表达式，如果约束条件是由一些线性不等式或线性方程所组成，而且目标函数是欲求未知变量线性函数的一类条件极值问题，则统称为线性规划问题(简记为 LP).

§1.3 线性规划问题的标准形式

一、线性规划问题的标准形式

上面列举了一些线性规划问题的数学模型，在模型的约束条件中可能是线性等式，也可能是线性不等式；目标函数可能是求最大值，也可能是求最小值；个别具体问题中一些变量甚至没有非负限制，这些形式上的不一致，给我们在研究线性规划问题的性质和求解过程中都会带来困难，所以必须将各种形式的线性规划问题化为下面这种等价的标准形式：

$$
\begin{aligned}
\min\ S &= c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n,\\
\text{s. t.}\ \ & a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\
& a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
& a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m,\\
& x_j\geqslant 0,(j=1,2,\cdots,n).
\end{aligned}
$$

其中 $x_j, j=1,2,\cdots,n$ 为待定的决策变量，已知的系数 a_{ij} 组成的矩阵

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}
$$

称为约束矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的列向量记为

$$\boldsymbol{p}_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj})^{\mathrm{T}}$$

(T 为转置符号)目标函数的系数组成的向量记为

$$\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$$

称为价值向量;向量 $\boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}$$

称为右端向量.利用向量和矩阵的符号,线性规划可简记为

$$\begin{aligned}&\min\ S=\boldsymbol{cX},\\&\text{s.t.}\ \ \boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b},\\&\qquad \boldsymbol{X}\geqslant\boldsymbol{0}.\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}&\min\ S=\boldsymbol{cX},\\&\text{s.t.}\ \ \sum_{j=1}^{n}x_j\boldsymbol{p}_j=\boldsymbol{b},\\&\qquad \boldsymbol{X}\geqslant\boldsymbol{0}.\end{aligned}$$

也可以用集合形式描述线性规划的标准形式

$$\left\{\min\ \boldsymbol{cX}\,\middle|\,\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{X}\geqslant\boldsymbol{0}\right\}.$$

所谓线性规划问题的标准形式(也称标准型),应该具备以下四点:

(1) 目标函数是求最小值(或最大值);

(2) 在约束条件中,除了非负约束用"$\geqslant$"号外,其他所有约束条件均用等式(或称方程)表示;

(3) 每个约束方程的常数项均是非负的($b_i\geqslant0$);

(4) 所有未知量受非负限制.

另外,如果未知量无非负约束时,称为自由变量,这时,这个未知量可用两个受非负限制的变量 y_1、y_2 之差描述,如 $x=y_1-y_2$,其中 $y_1,y_2\geqslant0$.

若约束条件带有绝对值号时,比如$|a_1x_1+a_2x_2|\leqslant b$,则可等价地化为

$$\begin{cases}a_1x_1+a_2x_2\leqslant b,\\a_1x_1+a_2x_2\geqslant -b;\end{cases}\text{即等价于}\begin{cases}a_1x_1+a_2x_2\leqslant b,\\-a_1x_1-a_2x_2\leqslant b.\end{cases}$$

二、任一线性规划问题等价地转化为标准形式的方法

1. 引进松弛变量

在约束条件中,除未知量为非负限制外,其余的约束条件全为"$\leqslant$"非严格不等式,那么可以通过增加非负变量的办法,即引进松弛变量,化"$\leqslant$"的情况为"="的情况.

如果第 i 个约束条件为

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n\leqslant b_i$$

时,则引进松弛变量 $x_{n+1}\geqslant0$ 使

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n+x_{n+1}=b_i$$

成立.

例 1.5 化

$$\min S = 9x_1 + 7x_2,$$
$$\text{s.t.}\quad 4x_1 + 5x_2 \leqslant 6,$$
$$x_1 + 3x_2 \leqslant 4,$$
$$7x_1 + 2x_2 \leqslant 8,$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

为标准型.

解 依次引进松弛变量 x_3、x_4、x_5 得标准形式为

$$\min S = 9x_1 + 7x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5,$$
$$\text{s.t.}\quad 4x_1 + 5x_2 + x_3 = 6,$$
$$x_1 + 3x_2 + x_4 = 4,$$
$$7x_1 + 2x_2 + x_5 = 8,$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0.$$

引进的松弛变量 x_3、x_4、x_5 应与 x_1、x_2 同等看待,将松弛变量纳入目标函数时,其系数均应取零.

2. 引进剩余变量

当将约束条件中"≥"转化为"="时,在各方程中所附加变量的前面均应取负号,则称这样的附加变量为剩余变量.

如果第 i 个约束条件为

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geqslant b_i$$

时,则引进剩余变量 $x_{n+1} \geqslant 0$ 使得

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - x_{n+1} = b_i$$

成立.

将剩余变量纳入目标函数时,其系数也应取零.

例 1.6 若将上例不等号"≤"反向,那么约束条件为

$$\text{s.t.}\quad 4x_1 + 5x_2 \geqslant 6,$$
$$x_1 + 3x_2 \geqslant 4,$$
$$7x_1 + 2x_2 \geqslant 8,$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0.$$

引进剩余变量后,显然等价于

$$\text{s.t.}\quad 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 6,$$
$$x_1 + 3x_2 - x_4 = 4,$$
$$7x_1 + 2x_2 - x_5 = 8,$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0.$$

从上面例子看出:当引进松弛变量或剩余变量之后,比原约束条件中的变量增加了 m 个,使得总变量数为 $n+m$ 个,一般来讲,对于约束条件 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i$, $(i=1,2,\cdots,m)$,引进松弛变量后约束条件的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{I})$$

当约束条件 $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i$ 时,引进剩余变量后其约束条件的系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{A} \vdots -\boldsymbol{I})$$

上面出现的$(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{I})$和$(\boldsymbol{A} \vdots -\boldsymbol{I})$是一种特殊矩阵,它将矩阵的列分为两部分,前 n 列是原问题的系数矩阵,后 m 列是$m\times m$ 的单位阵或负单位阵,这种特殊矩阵在今后求解线性规划问题时,将经常要用,应引起重视.

3. 若常数 b_i 为负数时,则可在该约束条件的两边同乘"-1"使常数 b_i 变为正数 $-b_i$. 即

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i,$$

同乘"-1"则转化为

$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots - a_{in}x_n = -b_i.$$

4. 若原问题目标函数是求最大值

$$\max S = \boldsymbol{cX},$$

则可化成等价问题求最小值,即

$$\max S = -\min(-S).$$

令 $S' = -S$,于是得到

$$\min S' = -\boldsymbol{cX}.$$

5. 含有自由变量

设 x_j 为自由变量,则总可以找到 $y_1\geqslant 0, y_2\geqslant 0$,使得 $x_j = y_1 - y_2$,代入约束方程,此时约束方程中就不再有不受非负限制的变量了.

例 1.7 化
$$\begin{aligned} &\max S = 3x_1 - 3x_2 + 7x_3, \\ &\text{s.t. } x_1 + x_2 + 3x_3 \leqslant 40, \\ &\quad x_1 + 9x_2 - 7x_3 \geqslant 50, \\ &\quad 5x_1 + 3x_2 = 20, \\ &\quad |5x_2 + 8x_3| \leqslant 100, \\ &\quad x_1, x_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

为标准型.

解 分别依次化最大为最小,引进松弛变量、剩余变量,$y_1, y_2\geqslant 0$ 等化为标准型:

$$\begin{aligned} &\min S' = -3x_1 + 3x_2 - 7(y_1 - y_2) + 0\cdot x_4 - 0\cdot x_5 + 0\cdot x_6 + 0\cdot x_7 \\ &\text{s.t. } x_1 + x_2 + 3(y_1 - y_2) + x_4 = 40, \\ &\quad x_1 + 9x_2 - 7(y_1 - y_2) - x_5 = 50, \end{aligned}$$

$$5x_1+3x_2=20,$$
$$5x_2+8(y_1-y_2)+x_6=100,$$
$$-5x_2-8(y_1-y_2)+x_7=100,$$
$$x_1,x_2,x_4,x_5,x_6,x_7\geqslant 0,y_1,y_2\geqslant 0.$$

§1.4 线性规划问题的基本解和最优解

上节讨论了线性规划问题的标准形式,但未涉及到求解的问题,为了寻求线性规划问题的求解方法,我们先从标准型入手介绍一下有关解的概念.

线性规划问题的标准型为:

$$\min S=\boldsymbol{cX},$$
$$\text{s.t. } \boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b},$$
$$\boldsymbol{X}\geqslant\boldsymbol{0}.$$

$\boldsymbol{A}$ 是约束方程的系数矩阵,今后一般都假定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=R(\widetilde{\boldsymbol{A}})=m$($\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 为增广矩阵),现在我们从 $\boldsymbol{A}$ 中任取 m 个线性无关的列向量,并用 $\boldsymbol{B}$ 表示由这些列组成的 $m\times m$ 阵,显然 $\boldsymbol{B}$ 是非奇异的,这时 $\boldsymbol{A}$ 总可以表示为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{B}\ \vdots\ \boldsymbol{N})$. 相应地,$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_B\\ \boldsymbol{X}_N\end{pmatrix}$,则约束方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$,记为:

$$(\boldsymbol{B}\ \vdots\ \boldsymbol{N})\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_B\\ \boldsymbol{X}_N\end{pmatrix}=\boldsymbol{b},$$

$$\boldsymbol{BX}_B+\boldsymbol{NX}_N=\boldsymbol{b},$$

其中 $\quad \boldsymbol{B}=(a_{ij})_{m\times m},\qquad \boldsymbol{N}=(a_{ij})_{m\times(n-m)},$

$$\boldsymbol{X}_B=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_m\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{X}_N=\begin{pmatrix}x_{m+1}\\x_{m+2}\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\ \vdots\\b_m\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{B}$ 称为约束方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的一个基,这类基 $\boldsymbol{B}$ 的选取至多有 $C_n^m=\dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}$ 种,它的全体构成了一个基集合,与基 $\boldsymbol{B}$ 相对应的 m 个分量称为基本变量,记为 $\boldsymbol{X}_B$,其余 $n-m$ 个分量称为非基本变量,记为 $\boldsymbol{X}_N$. 随着基 $\boldsymbol{B}$ 的改变,基本变量和非基本变量也将相互转变,故基本变量和非基本变量都不是固定不变的,而是相对于基 $\boldsymbol{B}$ 而定.

下面介绍关于解的重要概念:

一、基本解

在约束方程 $\boldsymbol{BX}_B+\boldsymbol{NX}_N=\boldsymbol{b}$ 中,若令非基本变量为 0 时,即 $\boldsymbol{X}_N=\boldsymbol{0}$,则

$$\boldsymbol{BX}_B=\boldsymbol{b},$$

故