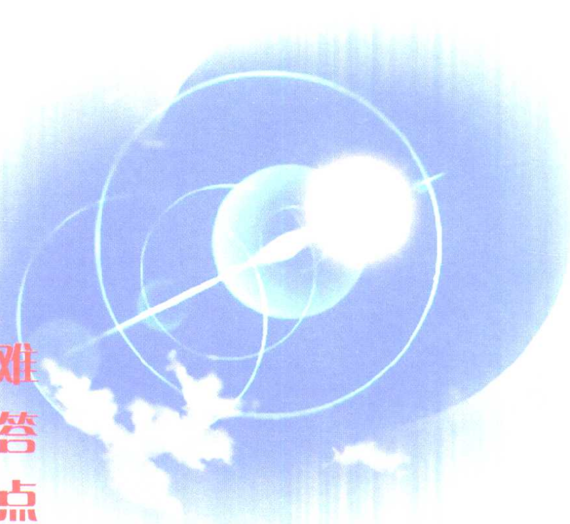
GONGCHENG SHUXUE XUEXI ZHIDAO YU XITI JIEXI

工程数学学习指导与习题解析

（下册）

概率论与数理统计

黄光谷 胡启旭
萧复生 黄 东 编



◇学习引导 释疑解难
◇精选例题 归类解答
◇抓住重点 攻破难点
◇顺利过关 决胜考研

华中科技大学出版社

工程数学学习指导与习题解析

（下册）

概率论与数理统计

黄光谷　胡启旭
萧复生　黄　东　编

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

工程数学学习指导与习题解析(下册)/黄光谷　等编
武汉:华中科技大学出版社,2004 年 1 月
ISBN 7-5609-3090-5

Ⅰ.工…
Ⅱ.①黄…　②胡…　③萧…　④黄…
Ⅲ.工程数学－高等学校－教学参考资料
Ⅳ.TB11

工程数学学习指导与习题解析(下册)　黄光谷　胡启旭　萧复生　黄　东　编

责任编辑:钟小珉　李立鹏　　封面设计:刘　卉
责任校对:封春英　　责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87542624

录　排:武汉市彩艺广告工作室
印　刷:华中科技大学印刷厂

开本:850×1168　1/32　印张:16.625　字数:400 000
版次:2004 年 1 月第 1 版　印次:2004 年 1 月第 1 次印刷　定价:19.00 元
ISBN 7-5609-3090-5/TB·62

内容介绍

本书(下册)是高等学校(主动式教学法教学改革)数学系列教材《概率论与数理统计》的辅导教材,是《高等数学学习指导与习题解析》一书(黄光谷等编,华中科技大学出版社出版,已连续印刷5次)的姊妹篇.内容上以教育部颁布的本科《教学基本要求》和部订2003年考研《数学考试大纲》为依据,各章按讲编写,便于教学与自学.各讲包括内容提要、答疑辅导、典型例题、教与学建议等栏目,各单元安排了习作课,篇末安排了结业总复习(含模拟试题及参考答案与提示等),书末还附录了"历年全国考研数学一至四的概率统计试题分类精解".

本书保持了《高等数学学习指导与习题解析》一书(上、下册)的结构、风格与特长,可独立成书;又与适用面广、最新版的浙江大学盛骤等编《概率论与数理统计》(第三版)教材密切同步.考虑到读者学概率统计解题的困难、对教材中各章习题基本上都作了解答,供读者做题时对照和参考.在本书例题、习题部分,精选了历年全国考研部分试题并作了解析(或给了答案,其中"(1999,一)"是指1999年全国考研数学一的试题,其余类似),以便读者明确教学、考试要求,使学习有参照系.例题末标有(2003,一)者,是指2003年全国考研数学一的试题,其余类似.

本书可供各工科、理科、农林、财经本科或专科各专业《概率论与数理统计》课程作为教、学参考书,还适宜作为自学辅助课本和教师上新课、习作课及复习课的讲义,以及备考和"考研"的复习资料.本书内容具有通用性,对于使用各种版本《概率论与数理统计》教材的读者都适用.

本书也是湖北省教委审定的A类《湖北省普通高等学校1997年省级教学研究项目》的一部分.

前　言

国家要实现社会主义现代化，要参与21世纪的世界性竞争，关键是人才的培养；而人才培养的关键是教育.数学教育是教育事业的重要组成部分，改革数学教育的关键之一是教材的改革.有什么样的教材，就决定了教师采用什么样的教学方式和方法.传统数学教材有逻辑严谨、系统性强等许多优点，对培养人才起了很大的作用.但由于历史的局限性，仍有改进与完善之必要.

本套(新编)高等学校数学系列教材，共三类六门12种，是覆盖高等数学、工程数学等主要基础课程的教材，既注意吸收各门传统教材的优点，又力求转变教育思想，体现教改精神，以适应21世纪科技与信息迅猛发展的新形势，对培养具有知识面广的较高数学修养(或素养、素质)的人才，具有现实意义.

本套教材在内容上以国家教委新颁布的《高等学校工科数学课程教学基本要求》为依据，提倡主动式教学法，力求处理好传授数学知识与培养各种能力和提高素质的关系，把培养学生获取知识、解决问题的能力与开拓、创新的精神作为教材的重要任务之一，变被动式的灌输知识(注入式)为主动的参与、钻研与力行(即主动式、启发式教学法)，实行教与自学双向互动式教学.

本套教材总的构思是：按讲编写，循环配合；培养能力，便于自学；提高素质，减少课时，便于备课和电化教学.其中三类书之间既互相配合呼应，又各自分工不同，各显特色；主教材减少课时，内容少而精，便于教与自学；主教材所配习题及习题解答书则用来巩固教材内容，更多地提供方法，加大信息量；教学指导书则用来加深理解、开拓视野、扩大知识面，并介绍有关新概念、新方法和新知识.

使用本套教材时，应以主教材为蓝本.主教材的每一讲，原则

上是两学时的教学内容，使用时可更换和补充证法和例题；有些讲编入的内容较多，可从中挑选、讲授主要内容；其余内容或简单例题可留给学生自学．有些讲的内容比较简单，可以合并两讲为一讲，以节约教学时数，加强习作课或另补本专业建模、实验等教学内容．教材中所配习题，可点半数左右作为课后作业，其余由学生选做．

教学指导书中所列习作课，应纳入教学日历，作为教学内容的一个重要组成部分．习作课也是一种数学实验课，应引起重视，以便培养学生解题、思考、应用等各种能力．上习作课时应注意引导，启发思维，做到讲练结合．至于教学指导书中所列复习课，各专业可视教学时数是否充裕，或者纳入教学计划，或者由学生自学．教学指导书中的其余内容，均可留给学生自学．

习题解答书与教学指导书是学生自学的两大辅助工具，应让学生学习“摸着石头过河”，应教育学生先自做习题，自己思考；遇有困难，再看解答，并读懂弄通．不要怕学生照抄解答，由于这几门数学课程的考试一般是闭卷考试，在考场上是抄袭不到的．不要“因噎废食”——不准学生看习题解答书．习题解答书全由学生自学．在出版时对学习指导书与习题解答书进行了合并处理，即成本书．

新编的这套教材是改革现行高校数学教材的一种尝试．由于我们水平有限、资料有限、见识有限，加上时间仓促，书中可能存在一些错误、缺点或不妥之处，恳请各位同行和读者多提宝贵意见，以便再版时修改．

另外，书中提到的教材[1]和教材[2]即分别为参考文献[1]和[2]．

编写这套书，得到武汉科技学院和华中科技大学出版社等单位的大力支持和关心，在此我们表示衷心的感谢！

编　者

2003年5月于武汉

目　录

---

① 若课时允许，这次习作可分两次课(4 学时)进行.

① 本书受篇幅所限，略去了《考研大纲》上没有的本章第二、三讲和第九章的正文叙述，仅给出了它们的习题解答.

② 前面各章已选解的考研试题，本篇不重复选解.

第四篇　概率论

第一章　概率论的基本概念

第一讲　随机事件　频率与概率

一　内容提要

在个别试验中其结果呈现出不确定性，但在大量重复试验中又具有统计规律性的现象，称为随机现象．概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科．

（一）随机试验

这里的试验包括各种科学实验及对某一事物的某一特征的观察，要作广泛的理解．具有下述三个特点的试验称为随机试验：

①可以在相同的条件下重复地进行；

②每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

③进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现．

（二）样本空间

随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间，

记为 S. 样本空间的元素,即 E 的每个可能结果,称为样本点,记为 x 或 e.

样本空间的元素是由试验的目的所确定的. 试验的目的不一样,其样本空间也不一样.

(三)随机事件

试验 E 的样本空间 S 满足某些条件的子集 A 称为 E 的随机事件,简称事件. 在每次试验中,当且仅当这一子集中的一个样本点出现时,称这一事件发生.

由一个样本点组成的单点集,称为基本事件. 样本空间 S 包含所有的样本点,它是 S 自身的子集,在每次试验中它总是发生的,称为必然事件. 空集$\varnothing$不包含任何样本点,它也可作为样本空间的子集,它在每次试验中都不发生,称为不可能事件.

(四)事件间的关系与事件的运算

事件是集合,因而事件间的关系与事件的运算可按照集合论中集合之间的关系与集合的运算来处理. 例如:

(1)若 $A\subset B$,称事件 B 包含事件 A,是指 A 发生必然导致 B 发生.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,即 $A=B$,则称事件 A 与 B 相等.

(2)和事件 $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$.

称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 $A_k(k=1,2,\cdots,n)$的和事件.

称 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件 $A_k(k=1,2,\cdots)$的和事件.

(3)积事件 $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$.

$\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ 与 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 意义类似.

(4)差事件 $A-B=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$.

(5)若 $A\cap B=\varnothing$,称 A 与 B 是互斥事件或互不相容事件,即

A 与 B 不能同时发生.

(6)若 $A\cup B=S$ 且 $A\cap B=\varnothing$,称 A 与 B 是互逆事件或对立事件,记为 $B=\overline{A}=S-A$,这时的每次试验,A、B 有且仅有一个发生.

事件的运算有交换律、结合律、分配律(略)及对偶律(德·摩根律):

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\quad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}.$$

(五)频率

定义 在相同条件下进行 n 次试验,其中事件 A 发生的次数 n_A 称为 A 发生的频数;而比值 n_A/n 称为 A 发生的频率,记为 $f_n(A)$.

频率的性质:

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1(=100\%)$;

(2) $f_n(S)=1$;

(3) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是两两互不相容的事件,则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k).$$

当重复试验的次数 n 逐渐增大时,频率 $f_n(A)$ 逐渐稳定于某个常数,这种"频率稳定性"即统计规律性.但实际中有时不能做大量试验(如破坏性试验),这就要引入概率的定义.

(六)概率

定义 设 S 是随机试验 E 的样本空间,对于每一事件 $A\subset S$,赋于实数 $P(A)$,且集合函数 $P(\cdot)$满足条件:

①非负性 $P(A)\geqslant 0$;

②规范性 $P(S)=1$;

③可列可加性

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots,$$

其中 $A_1,A_2,\cdots$ 是两两互不相容事件，即 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j,i、j=1,2,\cdots)$，则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

当 $n\to\infty$ 时，在一定意义下，频率 $f_n(A)\to P(A)$.

概率有如下重要性质：

(1) $P(\varnothing)=0$；

(2) 有限可加性　若 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是两两互不相容事件，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)$$
$$=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n);$$

(3) 若 $A\subset B$，则 $P(A)\leqslant P(B)$，且

$$P(B-A)=P(B)-P(A);$$

(4) 对任一事件，$P(A)\leqslant 1(=P(S))$；

(5) 逆事件的概率　$P(\overline{A})=1-P(A)$；

(6) 加法公式　对任意两事件，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

推广到三个或 n 个事件，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)$$
$$=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)$$
$$-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3);$$

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)$$
$$+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

二　答疑辅导

1. 事件是集合，我们从集合之间的关系和运算引入了事件之间的关系和运算，试列表对照比较之.

答 列表 1.1. 读者自行对照、比较之，可以温故知新，加深对事件之间关系和运算的理解.

表 1.1

符号	概率论	集合论
S	样本空间，必然事件	空间（全集）
$\varnothing$	不可能事件	空集
x（或 e）	样本点（基本事件）	元素
A	事件	子集
$\overline{A}$	A 的对立（互逆）事件	A 的余集
$A\subset B$	事件 A 发生必有事件 B 发生	A 是 B 的子集
$A=B$	事件 A 与事件 B 相等	集合 A 与 B 相等
$A\cup B$	事件"A 与 B 至少有一个发生"	A 与 B 的并集
AB	事件"A 与 B 同时发生"	A 与 B 的交集
$A-B$	事件"A 发生而 B 不发生"	A 与 B 的差集
$AB=\varnothing$	事件 A 与 B 互不相容（互斥事件）	A 与 B 无公共元素

2. 互逆（对立）事件与互斥（互不相容）事件有何区别和联系？

答 对立事件（或互逆事件）$A=\overline{B}$ 或 $B=\overline{A}$，是指两事件 A 与 B 之中，有且仅有一个发生，这时

$$A\cup B=S,\quad A\cap B=\varnothing,\quad \overline{\overline{A}}=A.$$

而互斥（互不相容）事件 A 与 B 仅指 A 与 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$. 若有 n 个事件具有关系：

$$A_iA_j=\varnothing\ (i\neq j, i、j=1,2,\cdots,n),$$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互斥事件.

从以上定义可以看出，对立事件肯定是互斥事件（有 $AB=\varnothing$），这是它们的联系. 它们的区别表现在以下三个方面：

(1) 互斥事件不一定是对立事件，因互斥仅有 $AB=\varnothing$ 的限制，而对立事件还要求

$$A\cup B=S\ (\overline{B}=A);$$

(2) 互斥概念还适用于三个以上的事件（两两互斥），而对立事件仅适用于两个事件；

(3) 两事件互斥只表明这两个事件不能同时发生，即至多只能出现其中一个，也可以都不出现；而两对立事件则表明这两个事件中必有且仅有一个发生，即肯定至少且仅有一个出现.

画集合图也可见它们之间的区别（见教材[1]p6 中的图 1-5 与图 1-6）.

3. 事件 A 的频率 $f_n(A)$ 与概率 $P(A)$ 有何区别与联系？

答 从前述频率与概率的定义可见它们的联系与区别. 频率

$$f_n(A)=n_A/n,$$

是频数 n_A（A 发生的次数）与试验次数 n 之比，随着 n 不同，n_A 也不同，其比值 $f_n(A)$ 也会不同，即频率是变量，有随机波动性. 但当 n 很大时，它稳定于 $P(A)$ 附近，即 n 很大时，$f_n(A)\approx P(A)$.

由频率定义易知它有三条重要性质（非负性、规范性、可加性），对它们进行抽象，便可引入表征事件发生可能性大小的概率的定义，它们都是区间 $[0,1]$ 上的一个非负纯小数（也可化成百分数），具有相同（或类似）的三条性质，这是它们的联系. 而且第五章的伯努利大数定律还证明了 $f_n(A)\xrightarrow{p}P(A)$，即 $n\to\infty$ 时，频率依概率收敛于概率，所以 n 很大时，$f_n(A)\approx P(A)$.

由于频率有随机波动性，不便于研究，也不可能做大量试验来测定频率，于是我们对频率进行数学抽象，对事件 A 定义一个确定的数 $P(A)$，使它具有前述三条性质，这便是概率的定义. 可见概率 $P(A)\in[0,1]$ 是一个常量，是表征事件 A 在一次试验中发生的可能性大小的量，它是事件 A 出现的客观可能性的度量，是随

机现象的客观属性，它描述了事件 A 发生的可能性大小，它是客观存在的，是一个固定的数，不再像频率那样具有随机波动性，这是它们的区别.

例如，掷硬币出现正、反面，或男、女婴出生的频数是波动的，但它们的概率各是 1/2(即 50%). 这虽然是一个理论上的、抽象的数，但却是大家公认的、确实存在的一个数，它反映了客观规律性，即统计规律性.

4. 在计算概率时，常常要将待求概率的事件进行"数学化"处理，才便于使用公式去计算. 如何通过已知事件表达待求概率(或其它)事件?

答 首先将这些待求概率的事件和已知事件进行数学化处理，并冠以字母 A、B、C 等(相当于以字母代事件)，则它们的概率分别为 $P(A)$、$P(B)$、$P(C)$ 等(即可转变成量化处理)，再根据这些事件之间的关系，利用相应公式去计算即可. 其中关键的一着是运用事件之间的关系和运算，通过已知事件去表达待求概率的事件或其它事件. 例如:

(1) "A 发生而 B 与 C 都不发生"的事件可表示为 $A\overline{B}\overline{C}$，或 $A-B-C$，或 $A-(B\cup C)$;

(2) "A 与 B 都发生而 C 不发生"的事件可表示为 $AB\overline{C}$，或 $AB-C$，或 $AB-ABC$;

(3) "A、B、C 三事件都发生"可表示为 ABC;

(4) "A、B、C 三事件都不发生"可表示为 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$，或 $\overline{A\cup B\cup C}$ (对偶律);

(5) "A、B、C 三事件至少有一个发生"可表示为 $A\cup B\cup C$，或 $A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC$;

(6) "A、B、C 中至少有两个发生"可表示为 $AB\cup BC\cup AC$，或

$AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC$;

(7) “A、B、C 中不多于(至多、顶多)一个发生”表示为 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\cup A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$，或$\overline{AB\cup BC\cup AC}$(读者画草图验证之)；

(8) “A、B、C 中至多两个发生”表示为$\overline{ABC}$，或 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\cup A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup A\overline{B}C\cup AB\overline{C}$；

(9) “A、B、C 中恰好有一个发生”表示为 $A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$；

(10) “A、B、C 中恰好有两个发生”表示为 $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$，或 $AB\cup BC\cup AC-ABC$；等等.

5. 今后计算概率问题，经常用到排列与组合，加法原理与乘法原理，很易混淆出错.

(1) 怎样判断是排列问题还是组合问题?

(2) 何时用加法原理? 何时用乘法原理?

答 当代概率论权威钟开莱曾说:“组合数学既是鼓舞的源泉，也是沮丧的根源，这是因为同一问题可以在不同的外表下出现，而需要人们努力去识别这些外表的真相.”而且，不同的问题还可以在相同或相似的外表下出现.这些都是很容易混淆导致错误的地方，必须仔细地分析，严密地去求证.

(1) 排列与组合的区别，主要在于排列与顺序有关，而组合与顺序无关.

一般地，从 n 个(可以分辨的)元素中任取 $r(\leqslant n)$ 个元素(每个元素至多只能取一次)排成一排，则共有

$$A_n^r=n(n-1)\cdots(n-r+1)$$

种排法.当 $r<n$ 时称为选排列；当 $r=n$ 时称为全排列，这时记

$$A_n^n=P_n=n!.$$

若从 n 个(可以分辨的)元素中任取 r 个元素(每个元素都允

许被取任意多次，因此允许取 $r>n$）排成一排，则共有 n^r 种排法，称为可重复的排列.

无重复的排列（选排列与全排列）相当于不放回取样；可重复的排列相当于有放回的取样.

再看组合. 一般地，从 n 个（可分辨的）元素中任取 $r(\leqslant n)$ 个元素构成一组，便是组合问题. 共有

$$C_n^r=\binom{n}{r}=\frac{A_n^r}{r!}=\frac{n!}{r!\ (n-r)!}=C_n^{n-r}(\text{种}).$$

读者仔细阅读上述文字，从中体会三种排列与组合的细小区别和计算公式，可以发现它们的区别与联系；再思考下列各问题，可加深体会.

① 有 10 个同学两两握手，问共握了几次？如果两两互赠照片一张，总共需多少张？ （答：C_{10}^2；A_{10}^2）.

② 从 5 本不同的书里选两本，一共有多少种不同的选法？如果选两本分送给甲、乙两人，一共又有多少种送法？（答：C_5^2；A_5^2）.

③ 用 1，2，3，4 四个数字能组成多少个无重复数字的二位数、三位数、四位数？

（二位数 $4\times3=12$ 个，三位数 24 个，选排列；四位数 $4!=24$ 个，全排列.）

④ 用 1，2，3，4 四个数字能组成多少个（数字可以重复的）二位数、三位数、四位数、五位数？

（可重复排列，分别为：4^2，4^3，4^4，4^5 个.）

（2）加法原理与乘法原理的选用，类似于多元微分学中连锁规则的“分线相加，连线相乘”，在复杂问题中，还需将二者并用.

乘法原理：设完成一件事有 n 个步骤，第 i 步有 m_i 种方法（$i=1,2,\cdots,n$），并且完成这件事必须经过每一步骤，则完成这件事共