# 幾何學ABC

王劍生著

世界書局印行

# 自　序

歐基里得 Euclid 是希臘 Greece 幾何學的集大成者，他的幾何原本，除了討論平面，立體以外，是數學和邏輯的理論。用線段表示數理，也是他發起的。但是他的基礎，建築在不能論證的原則上，叫做自理。這不能論證原則中最重要的，是平行線自理，他說某點在一直線之外，過某點只能作一直線平行這直線。這種自理，遠古哲學家已有懷疑，在十九世紀初時，才有一種嚴確銳入的方法，繼續這種學說的，如波蘭 Poland 的羅勃采烏斯基Lobatchewsky,匈牙利 Hungary 的勃來意 Bolyai 和德國的高斯 Gauss 等。這種銳入的學說，却謂某點在一直線之外，過某點不僅只作一條平行線，或一平行線都不能作，由此推論到三角形三內角的和大於兩直角，或小於兩直角，同歐氏的自理，完全相反，所以叫做『非歐基里得幾何學』 Noneuclid Geometry, 就是德國科學家愛因斯坦 Albert Einstein 相對論學說的立足點。愛氏曾說：歐氏的空間是僅從長，闊，厚三度構成，現在再加入時間，成四度的世界，因超幾何學不僅限於三度，可由四度，五度，六度以至於無窮度。四度的世界不是全恃長，闊，厚三種條件，并且還要觀察外界的各種變動，譬如有一金屬尺，根據冷縮熱脹的定理，在溫度高時，決不能說這金屬尺在溫度低時的長度全相等，所以就發生時間和空間的關係，冷縮和熱脹，絕對不能同時，因爲不能同時，才會得到冷時和熱時長度的不同。這本幾何學，是初步的說明，暫且把時間擱起不說，僅取空間的部分來討論；但是匆促成書，不免有錯誤和疏漏的地方，很希望讀者多多的指教！

劍生序于瑞安

一九二九

# 目 次

# 幾何學ABC

## 第一章　緒論 Introduction

I. 幾何學的起源

古代埃及 Egypt 的人民，都沿着尼羅河 Nile 生活，有時河水暴漲，便把兩岸田地淹沒，等到水退之後，地面不是減少，便是增多，并且連形狀都改變了。假使重新分劃界線，整理賦稅，不能不研究地面的圖形和面積，後來慢慢的變成幾何學。所以西名的 Geometry，是從 Geo （地的意思）和 Meton（量的意思）兩字湊合而成，意義就是“量地”。明末徐光啓才把他譯成“幾何”兩字，因爲這兩字和譯音相近，同時也含有算學的意味。

II. 幾何學的應用

我們日常所看見的東西，沒有一件不是幾何圖形，天上的日，月是圓的，屋子是方的，縫衣服的線是長的，粉末和灰塵是細的，雨點是粗的，車輪是圓形可以轉動的，鐵道是成平行線等種種形狀實不勝枚舉。單就三角形和平行四邊形來說，就有許多的用處，因爲三角形的三邊長短假使固定，那三角形决不會變動。——根據三角形定理："兩三角形有三邊彼此對應相等，兩三角形就全相等"。——平行四邊形却不是這樣，四邊長短只管固定，還可以改換形式，所以有許多的建築，大都利用三角形的不活動性，使建築物不致傾歆，如橋梁的欄杆和房屋的頂，本來是成平行四邊形，中央必須再橫一條對角線，成功兩個三角形，才能够穩固。但是伸縮衣架和店舖開閉的鐵門，反利用平行四邊形的傾歆和活動性來製造。其餘如花紋，測量物理，也都常常引用幾何圖形來討論，在這裏不必細說了。

III. 幾何學的基本四形

吾們已經知道世界上物體的形狀，都離不了幾何圖形，若再把各種圖形細細的分析，就是點，線，面，體，因爲體的外表是面，面的邊界是線，線的兩端是點。點行動的痕是線，線擺動的痕是面，面浮沉的痕是體，所以上列四種圖形，有互相連帶的關係，是製造各種幾何圖形的原料。吾們現在所研究的，也就是這四種原料湊合的圖形，往後當逐步慢慢的討論。

# 第二章　證明 Proof

## I. 證明的重要

幾何學既是討論空間形狀的學問，當然是研究圖形的性質或形和形的關係，中間最重要的事實，就是證明，因爲用眼睛或想像去測定圖形的性質或形和形的關係，決比不上用論理方式去證明的確實。所以吾們用直覺 Intuition 去決定一個定理和事實，或用近似值 Approximate Value 去計算一個數目和替代數目的字母，是沒有標準的，不精確的，且看下面的圖形

，就可以知道直覺的靠不住。


圖

如圖一的第一例，看去似乎a線大於b線，其實是兩條相等的直線，因為眼睛被兩個义蒙混了，所以覺得a線比b線長。第二例似乎是兩條向內曲的雙曲線，其實是兩條平行直線。所以用直覺或臆想的確定，在幾何學上是絕對的不適用。

II.證明的方式

吾們普通談話的時候，常常可以聽到"因為什麼，所以這樣"。譬如說：

因為空氣是物質，

所以空氣有重量。

找尋這兩句話的原因，中央是省掉一句"凡物質都有重量"。把這些話仔細的分析，可以有三段，就是假設，證明和結論。邏輯上也有同樣的說法，兩個

端 Term, 中間必須有一個綴系 Copula 去連絡。譬如說：

凡人都要死的　端

孔子也是人　　綴系

孔子也要死　　端

上例"凡人都要死的"一句，就是證明，假定孔子的要死不要死，還沒有確定；現在已經證實人都要死的，孔子既是人，當然也要死。幾何學上的證明方式，也可以分做三轉：

假設　假定他如此的

證明　證明他是否如此

結論　如此或不如此

III. 證明的工具

造一樣東西，必須要用工具，幾何學上的證明，也要用工具來幫助。

名詞解釋：——

(1 定義 Definition　用最簡單的語言文字來解析

一個名詞，并且能够表現他的特性和限制他的範圍的。大概含有三種要素：

A.要包含概念主要的性質。

B.字句恰當，不可太多，也不可太少。

C.沒有含糊和循環，矛盾的毛病。

(2)作圖題 Construction 作一圖形能够適合於一定條件的。

(3)問題 Problem 就是一件事須待證明的。

(4)解法 Solution 就是計算和解釋。

(5)假設 Hypothesis 未曾證明，假定如此的。

(6)證明 Proof 根據論理方式來辨別眞僞的。

(7)結論 Conclusion 經過證明所得出來的結果。

(8)公理 Axiom 用我們經驗所確定和大家所承認的理。

(9)定理 Theorem 經過證明而確定的。

(10) 系（就是推論）Corollary 由定理直接推定出來的。

定理種種：——

(1)定理 Theorem　如$A=B,C=D$

(2)矛盾定理 Contradictory　如$A=B,C\neq D$

(3)反定理 Opposite　如$A\neq B,C\neq D$

(4)逆定理 Converse　如$C=D,A=B$

還有三種名稱：——

(1)反轉 Reverse　如B,反轉成ᗺ

(2)互換 Converse　如AB,互換成BA

(3)倒置 Inverse　如A,倒置成∀

普通符號：——

(1)>大於 Is Great Than

(2)<小於 Is Less Than

(3)=等於 Equal To

(4)≠不等於 Not Equal To

(5)∽相似 Similar

(6)≌或≡全相等 Identically Equal

(7)∠角 Angle

(8)⊥垂直 Perpendicular

(9)∥平行 Parallel

(10) △三角形 Triangle

(11) ▱平形四邊形 Parallelogram

(12) ⊙圓 Circle

(13) ⌒弧 Arc

(14) ∠R.直角 Right Angle

(15) π圓周率 Ratio of Circumference to Diameter of a Circle

(16) D.直徑 Diameter

(17) R半徑 Radius

(18) ∵因爲 Because

(19) ∴所以 Therefore

IV. 證明的步驟

有了工具，更要知道進行的步驟，才會解析清楚，不致於亂七八糟，沒有系統。

作圖器械：——

(1)直尺 Rule

2 圓規 Compass

幾何學是研究圖形的學問，畫圖當然是第一要務。在一平面上，無論何種幾何圖形，總是直線和曲線湊成的，所以基本上只須用直尺作直線，和圓規作圓周或曲線，就很够了。

器械用法：——

把直尺固定，沿尺邊用鉛筆劃去，便成功直線。把圓規的一脚固定，另一脚旋轉，不移動兩脚的距離，便是圓周。其餘丁字規 T. Square 和平行尺 Parallel Rule 等等，完全是補充作圖便利起見，在論理上是不合用的。就如直尺，都不應該刻分寸，因爲刻分寸還要用幾何作圖法才可以得出來。

作圖要素：——

(1)普通——問題上假使沒有指定如何圖形，切不可偏於一方面。如只說一角形，決不能畫等邊或等腰的三角形。

⑵準確——圖形一定要準確，否則容易引起錯誤，如畫一直角，決不可畫89度的角。

第一步，看題：假使有一個問題，須把他全部看個仔細，再分別假設和結論，好知道要證明的是什麼。

第二步，畫圖：先照假設的條件，把圖形畫好，再依圖索驥，慢慢的推求，有時原圖還不能解決，可再添補助線。

第三步，解釋：畫好了圖，再把已知，要證，未知等找出，分別繕寫如下式：

〔假設〕已知：………

要證：………

〔證明〕………

〔結論〕∴………

第四步，證明：引用公理或定理來補足結論的理由。

V.證明的方法

知道步驟，就是說方法了，但是吾們看普通的定理或證明，似乎一個一樣，整理起來，約略可以分做三種：

(1)綜合法 Synthetic Method　一個問題，吾們已經找出假設和結論，要得到結論的正確，中央必須經過一番證明，上面已經說過了。綜合法的證明是從已知推求到未知，比方說，假使 A=B,要證 A=C, 根據某公理或某定理，推到 B=C, 那麼 A=C,就沒有疑義了。

(2)解析法 Analytic Method　綜合法是由假設一層一層的推到結論，解析法却由結論分析到假設，因爲結論是從假設推出來的，所以結論裏一定包含着假設，就是由未知追溯到已知。比方說，已知 A=B, A=C 是結論，可由 A=C 推到 B=C, 由 B=C 推到 A=B, 因 A=B 恰和已知的條件符合，所以證明A=C是沒有錯誤。

(3)歸謬法 Reduction to Absurdity　有些問題，用

綜合法或解析法，都不好探求，只好用歸謬法來反逼，法子同解析法很像，不過先暫認結論的反面爲眞，再依反面證回去，引到荒謬無理的時候，同假設全不符合，才反映結論是眞。因爲借用矛盾命辭 Contradictory Proposition 來逼到正面，所以也叫做間接法 Indirect Method. 比方說，$A=B$ 是假設，$A=C$ 是結論，先認 $A\neq C$ 是眞，由 $A\neq C$ 推到 $B\neq C$, 由 $B\neq C$ 推到 $A\neq B$, 但是假設爲 $A=B$, $A\neq B$ 是不可能，所以不得不認 $A=C$ 是眞。

(4)三種證法的討論　邏輯上的判斷，含有相反兩方面，就是分析和綜合，依普通解釋，分析是把全體分做若干部分，綜合是把若干部分湊成全體。化學上的合成 Synthesis 和分析 Analysis 也是這個意思，如水用電流通過，分解成氫和氧，由氫，氧可以直接化合成水。在處置物質現象的時候，要分析和綜合同時並行，是很難做得到的事情，但是意識上的活動，不是物質的東西，可以二法參用，不僅沒有妨礙，幷且