大学数学考试丛书

# 高等数学
## 精析与精练

主编　林正国　刘剑平

华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

大学数学考试丛书

# 高等数学精析与精练

主编　林正国　刘剑平

华东理工大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学精析与精练/林正国　刘剑平　主编.—上海:华东理工大学出版社,2003.12
(大学数学考试丛书)
ISBN 7-5628-1379-5

Ⅰ.高...　Ⅱ.林...　Ⅲ.高等数学-高等学校-习题　Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 078940 号

**高等数学精析与精练**

大学数学考试丛书　　　　林正国　刘剑平　主编

| | | | |
|---|---|---|---|
| **出版** | 华东理工大学出版社 | **开本** | 890×1240　1/32 |
| **社址** | 上海市梅陇路 130 号 | **印张** | 11.875 |
| **邮编** | 200237　**电话**　(021)64250306 | **字数** | 633 千字 |
| **网址** | www.hdlgpress.com.cn | **版次** | 2003 年 12 月第 1 版 |
| **发行** | 新华书店上海发行所 | **印次** | 2004 年 7 月第 1 次 |
| **印刷** | 常熟市华顺印刷有限公司 | **印数** | 1—6050 册 |

ISBN 7-5628-1379-5/O·77　　　　定价:20.00 元

## 内容提要

本书的主要内容包括一元微积分、多元微积分、级数和微分方程的典型例题和习题共千余题. 对每道题都作了精辟的分析和详尽的解答. 在每章的最后附有一套自我检查题,供读者检测自身水平之用.

本书内容精炼、论述清晰,选题难易兼顾,分析详略得当,讲解深入浅出. 可作为本科生学习高等数学和准备学期考试的参考书,也可作为参加硕士研究生入学考试的辅助读物.

本书也可作为大专院校数学教师的参考书.

# 大学数学考试丛书

## 编　委　会

# 前 言

高等数学的统考是比较难于应付的，其中最困难的、层次最高的是每年年初的全国硕士研究生的入学考试．而研读本书就可以应付这类考试．

本书的特点是取材丰富翔实，选题难易兼顾，分析鞭辟入里，解释画龙点睛，是作者教了一百余遍高等数学后教学经验的结晶和升华．读者若能仔细研习、反复体会，必大有裨益．

限于编者的水平，缺点、错误在所难免，欢迎读者批评指正．

作　者

2004 年 6 月

# 目　录

# 第 1 章　函　　数

## 1.1　函数定义两要素

### 1.1.1　基本要求精讲

正确理解函数的定义；定义中的两要素：定义域和对应规则；会求分段函数的定义域、函数值；会作简单的分段函数图像.

### 1.1.2　典型例题精析

**例 1**　求函数 $y=\sqrt{3-x}+\sin\sqrt{x}$ 的定义域.

**分析**　在确定函数的定义域时要注意：在分式中分母不能为零，在根式中负数不能开偶次根；在对数中，真数要大于零；反正弦函数和反余弦函数 $\arcsin x$，$\arccos x$ 的定义域为 $[-1,\ 1]$.

**解**　由 $\sqrt{3-x}$ 知 $3-x\geqslant 0$，即 $x\leqslant 3$；

又由 $\sqrt{x}$ 知 $x\geqslant 0$；

故得　$0\leqslant x\leqslant 3$，即定义域为 $[0,\ 3]$.

**例 2**　求函数 $y=\lg\dfrac{x}{x-2}+\arcsin\dfrac{3x-1}{5}$ 的定义域.

**解**　考虑 $\lg\dfrac{x}{x-2}$，要求 $\dfrac{x}{x-2}>0$，解之得 $x<0$ 或 $x>2$；

对 $\arcsin\dfrac{3x-1}{5}$，必需 $\left|\dfrac{3x-1}{5}\right|\leqslant 1$，即

$$-1\leqslant\frac{3x-1}{5}\leqslant 1$$

即有
$$-\frac{4}{3}\leqslant x\leqslant 2.$$

因此，定义域 $D(f)$ 应是上述两个集合的交集：

$$D(f)=\left\{x\,\middle|_{x>2\text{或}x<0}\right\}\cap\left\{x\,\middle|_{-\frac{4}{3}\leqslant x\leqslant 2}\right\}$$
$$=\left\{x\,\middle|_{-\frac{4}{3}\leqslant x<0}\right\}.$$

**例 3**　设 $y=f(x-2)$ 的定义域为 $[1,\ 4)$，求 $f(x)$ 的定义域.

**分析与解**　由 $f(x-2)$ 的定义域为 $[1,\ 4)$ 知 $1\leqslant x<4$，

即
$$-1\leqslant x-2<2.$$

得　$f(x)$ 的定义域为 $[-1,\ 2)$.

**例 4** 确定函数 $y=\arcsin\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ 的定义域.

**解** $\left|\dfrac{x-1}{5}\right|\leqslant 1$ 且 $25-x^2>0$

即 $-5\leqslant x-1\leqslant 5$ 得 $-4\leqslant x\leqslant 6$;

且 $-5<x<5$,

故有 $$-4\leqslant x<5.$$

于是,给定函数的定义域为 $D=[-4,5)$.

**例 5** 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+2 & 0\leqslant x\leqslant 2\\ x^2 & 2<x\leqslant 4\end{cases}$,求 $f(x-1)$.

**分析** 函数是表示一种对应的规则.

**解** 在上式中以 $x-1$ 替代 $x$,有

$$f(x-1)=\begin{cases}(x-1)+2 & 0\leqslant x-1\leqslant 2\\ (x-1)^2 & 2<x-1\leqslant 4\end{cases}$$

即

$$f(x-1)=\begin{cases}x+1 & 1\leqslant x\leqslant 3\\ (x-1)^2 & 3<x\leqslant 5\end{cases}.$$

**例 6** 已知函数 $f(x)$的定义域为$[-1,2]$,则函数 $F(x)=f(x+2)+f(2x)$ 的定义域为__________.

**解** 因为 $f(x)$的定义域为$[-1,2]$,故

由 $f(x+2)$ 得 $-1\leqslant x+2\leqslant 2$, 即 $-3\leqslant x\leqslant 0$;

由 $f(2x)$得 $-1\leqslant 2x\leqslant 2$, 即 $-\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$

求这两个集合的交,得 $$-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 0.$$

故 $F(x)$的定义域为 $$D(F)=\left[-\frac{1}{2},0\right].$$

**例 7** 设 $f(x)$满足 $2f(x)+f(1-x)=x^2$, 求 $f(x)$.

**分析** 将 $x$ 换成 $1-x$, 上式即为

$$2f(1-x)+f(x)=(1-x)^2.$$

联立

$$\begin{cases}2f(x)+f(1-x)=x^2\\ 2f(1-x)+f(x)=(1-x)^2\end{cases}$$

解之得

$$f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x-1.$$

**例 8** 设 $f(x)=\begin{cases}x^2 & |x|\leqslant 1\\ 1 & 1<|x|\leqslant 2\end{cases}$，且 $g(x)=f(x^2)+f(x-1)$，求 $g(x)$的定义域.

**分析** 分段函数的定义域为各分段之并.

**解** $f(x)$的定义域为$[-1,1]\cup[-2,-1)\cup(1,2]$即$[-2,2]$，

由 $f(x^2)$知 $0\leqslant x^2\leqslant 2$，即 $-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$，

由 $f(x-1)$ 知 $-2\leqslant x-1\leqslant 2$，即 $-1\leqslant x\leqslant 3$，

求其交集，得 $g(x)$的定义域为$[-1,\sqrt{2}]$.

**例 9** 设 $f(\tan x)=\tan x+\sin 2x$ 其中 $0<x<\frac{\pi}{2}$，求 $f(\cot x)$.

**分析** 函数是表示一种关系的，要找出这种关系.

**解**
$$\begin{aligned}f(\tan x)&=\tan x+\sin 2x=\tan x+2\sin x\cos x\\&=\tan x+2\tan x\cdot\cos^2 x\\&=\tan x+\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}\end{aligned}$$

故有
$$\begin{aligned}f(\cot x)&=\cot x+\frac{2\cot x}{1+\cot^2 x}\\&=\cot x+\sin 2x.\end{aligned}$$

**例 10** 设单值函数 $f(x)$满足关系式 $f^2(\ln x)-2xf(\ln x)+x^2\ln x=0(0<x\leqslant \mathrm{e})$ 且 $f(0)=0$，求 $f(x)$.

**分析** 将函数作为一个未知元来求解.

**解** 令 $\ln x=t$，则 $x=\mathrm{e}^t$，故由原式得

$$f^2(t)-2\mathrm{e}^t f(t)+t\mathrm{e}^{2t}=0$$

这是一元二次方程，解之，有

$$f(t)=\frac{2\mathrm{e}^t\pm\sqrt{4\mathrm{e}^{2t}-4t\mathrm{e}^{2t}}}{2}=\mathrm{e}^t(1\pm\sqrt{1-t})$$

考虑到 $f(0)=0$，得 $f(t)=\mathrm{e}^t(1-\sqrt{1-t})$

故
$$f(x)=\mathrm{e}^x(1-\sqrt{1-x}).$$

### 1.1.3 自测习题精练

1. 函数 $f(x)=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$ 的定义域是________.
2. 若 $f(x)$的定义域为$[0,2a]$，则 $f(x+a)$ 的定义域为________.
3. 已知 $f(x)=\sin x$，$f[\varphi(x)]=1-x^2$，则 $\varphi(x)=$ ________，它的定义域为________.
4. $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\leqslant 0\\ x^2+x & x>0\end{cases}$，则 $f(-x)=$ ________.
5. 函数 $y=\dfrac{\sqrt{2x+1}}{2x^2-x-1}$ 的定义域是________.

6. 设 $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$，则 $f(x)=$ ______.

7. 设 $f(x+2)=2^{x^2+4x}-x$，则 $f(x-2)=$ ______.

8. 若 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}+3$，则 $f(x)=$ ______.

9. 设 $f(x)=\begin{cases}2^x & -1\leqslant x<0\\ 2 & 0\leqslant x<1\\ x-1 & 1\leqslant x<3\end{cases}$，则 $f(x)$ 的定义域 ______，$f(0)=$ ______，$f(1)=$ ______.

10. 设 $f(x)=\frac{1}{x}$，若 $f(x)+f(y)=f(z)$，则 $z=$ ______.

11. 两个函数相同是指这两个函数(　　).

A. 定义域相同　　B. 值域相同

C. 定义域相同且值域相同　　D. 定义域相同且对应法则相同

12. 设 $f(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}$，$\phi(x)=\frac{x}{1+x}$，则下列等式中成立的是(　　).

A. $f(x)=\phi(e^{-x})$　　B. $f(e^{-x})=\phi(e^{-x})$

C. $f(x)=\phi(e^{x})$　　D. $f(e^{x})=\phi(e^{x})$

13. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x & |x|\leqslant 1\\ \sin x & 1<|x|\leqslant 4\end{cases}$，则 $f(x^2)$ 的定义域为(　　).

A. $[-2, 2]$　　B. $[-4, 4]$　　C. $[-1, 1]$　　D. $[1, 4]$

14. 设 $f(x)=\begin{cases}x+1 & x\leqslant 1\\ 3-x & x>1\end{cases}$，则 $f\left[f\left(\frac{5}{2}\right)\right]=$(　　).

A. $\frac{9}{2}$　　B. $\frac{5}{2}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

15. 设 $g(x)=x-1$ 且 $f[g(x)]=\frac{x-1}{x+1}$，则 $f\left(\frac{1}{2}\right)=$(　　).

A. $\frac{1}{5}$　　B. $-\frac{1}{3}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $-\frac{3}{5}$

16. 函数 $y=\ln^2 x$ 与函数 $y=2\ln x$ 表示同一个函数，则 $x$ 应满足(　　).

A. $-\infty<x<+\infty$　　B. $x>0$

C. $x\geqslant 0$　　D. $x\geqslant 1$

17. 下列各组函数中表示同一函数的是(　　).

A. $f(x)=\sqrt{x^2}$，$g(x)=x$　　B. $f(x)=e^{\ln x}$，$g(x)=\sqrt[3]{x^3}$

C. $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$，$g(x)=x+1$　　D. $f(x)=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$，$g(x)=\sqrt{x^2}$

18. 设 $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=2+\cos x$，则 $f\left(\cos\frac{x}{2}\right)=$(　　).

A. $2+\cos x$　　B. $2-\cos x$　　C. $2+\sin x$　　D. $-\cos x$

19. 函数 $f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$ 的值域是(　　).

A. $[-1, 1]$ B. $[-1, 1)$ C. $(-1, 1]$ D. $[0, 1)$

**20.** 设 $g(x)=\begin{cases}2-x & x\leqslant 0\\ x+2 & x>0\end{cases}$；$f(x)=\begin{cases}x^2 & x<0\\ -x & x\geqslant 0\end{cases}$，则 $g[f(x)]=($　　$)$.

A. $\begin{cases}2+x^2 & x<0\\ 2-x & x\geqslant 0\end{cases}$ B. $\begin{cases}2-x^2 & x<0\\ 2+x & x\geqslant 0\end{cases}$

C. $\begin{cases}2-x^2 & x<0\\ 2-x & x\geqslant 0\end{cases}$ D. $\begin{cases}2+x^2 & x<0\\ 2+x & x\geqslant 0\end{cases}$

**21.** 设函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{9-x^2} & |x|\leqslant 3\\ x^2-9 & 3<|x|<4\end{cases}$，则它的定义域是(　　).

A. $[-3, 4]$ B. $(-3, 4)$ C. $[-4, 4)$ D. $(-4, 4)$

**22.** 设 $f(x-1)=x^2+1$，则 $f(x_0+h)=($　　$)$.

A. $(x_0+h)^2+1$ B. $(x_0+h)-1$

C. $(x_0+h)^2+2(x_0+h)+2$ D. $(x_0+h)^2-1$

**23.** 函数 $y=\dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域是(　　).

A. $\{x|_{x>-1}\}$ B. $\{x|_{x>1}\}$ C. $\{x|_{x\geqslant -1}\}$ D. $\{x|_{x\geqslant 1}\}$

**24.** 函数 $y=\dfrac{x-1}{\ln x}+\sqrt{16-x^2}$ 的定义域为(　　).

A. $(0, 1)\cup(1, 4]$ B. $(0, 1)$ C. $(0, 4)$ D. $(0, 1)\cup(1, 4)$

**25.** 设 $f(x)=\ln 2$，则 $f(x+1)-f(x)=($　　$)$.

A. $\ln\dfrac{3}{2}$ B. $\ln 2$ C. $\ln 3$ D. $0$

**26.** 已知函数 $f(x)$的定义域为$[0, 1]$，则 $f(x+a)$ 的定义域是(　　).

A. $[0, a]$ B. $[-a, 0]$ C. $[-a, 1-a]$ D. $[a, 1+a]$

**27.** 设函数 $f(x)=\begin{cases}|2x+1|+\dfrac{|x-1|}{x+1} & x\neq -1\\ 0 & x=-1\end{cases}$ 则 $f(-2)=($　　$)$.

A. $-6$ B. $0$ C. $6$ D. $1$

**28.** 将函数 $f(x)=2-|x-2|$ 表示为分段函数时，$f(x)=($　　$)$.

A. $\begin{cases}4-x & x\geqslant 0\\ x & x<0\end{cases}$ B. $\begin{cases}4-x & x\geqslant 2\\ x & x<2\end{cases}$

C. $\begin{cases}4-x & x\geqslant 0\\ 4+x & x<0\end{cases}$ D. $\begin{cases}4-x & x\geqslant 2\\ 4+x & x<2\end{cases}$

**29.** 函数 $f(x)=3+2\cos x$ 的值域是(　　).

A. $[2, 4]$ B. $[1, 5]$ C. $[-1, 1]$ D. $[-2, 2]$

**30.** 设函数 $f(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2 & 1<x\leqslant 2\end{cases}$，则函数 $g(x)=f(2x)+f(x-2)$ (　　).

A. 无意义 B. 在$[0, 2]$上有意义

C. 在$[0, 4]$上有意义 D. 在$[2, 4]$上有意义

### 1.1.4 自测习题精解

1. $[-4,-\pi]\cup[0,\pi]$　2. $[-a,a]$　3. $\arcsin(1-x^2)$, $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

4. $\begin{cases}x^2-x & x<0\\ x^2 & x\geqslant 0\end{cases}$　5. $\left(-\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,+\infty)$　6. $\begin{cases}\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} & x>0\\ \dfrac{1-\sqrt{1+x^2}}{x} & x<0\end{cases}$　7. $2^{x^2-4x}-x+4$

提示：$f(x+2)=2^{x^2+4x}-x=2^{(x+2)^2-4}-(x+2)+2$　故 $f(x-2)=2^{(x-2)^2-4}-(x-2)+2$ $=2^{x^2-4x}-x+4$.　8. $x^2+1$　提示：$f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}+3=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+1$　故 $f(x)$ $=x^2+1$.　9. $[-1,3)$, 2, 0.　10. $\dfrac{xy}{x+y}$.

| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| D | C | A | C | A | B | D | B | C | D |
| **21** | **22** | **23** | **24** | **25** | **26** | **27** | **28** | **29** | **30** |
| D | C | B | A | D | C | B | B | B | A |

## 1.2 函数的性质

### 1.2.1 基本要求精讲

了解函数的四个基本性质：单调性、周期性、奇偶性、有界性，了解反函数和复合函数的基本概念，熟悉基本初等函数的性质及其图形.

### 1.2.2 典型例题精析

**例 1**　已知 $f(x)=e^{x^2}$, $f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$并写出它的定义域.

**分析**　这是一个复合函数，由对应规则来求解.

**解**　$f[\varphi(x)]=e^{\varphi^2(x)}=1-x$，求解 $\varphi(x)$并考虑到 $\varphi(x)\geqslant 0$，可得

$$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}.$$

再由 $\ln(1-x)\geqslant 0$，得 $1-x\geqslant 1$ 即 $x\leqslant 0$，得 $\varphi(x)$的定义域为$(-\infty,0]$.

**例 2**　求函数 $y=\pi+\arcsin\dfrac{x}{2}$ 的反函数.

**分析**　求反函数的基本思路是：从 $y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$，对换 $x$, $y$ 的变量记法，即得反函数 $y=f^{-1}(x)$，其中 $y=f(x)$ 的值域即为 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域.

**解**　由反三角函数的主值区间知

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}\text{，即}$$

$$\frac{\pi}{2} \leqslant \pi + \arcsin\frac{x}{2} \leqslant \frac{3}{2}\pi$$

由 $y = \pi + \arcsin\frac{x}{2}$，可得 $x = 2\sin(y - \pi)$，故所求的反函数为

$$y = 2\sin(x - \pi). \qquad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right].$$

**例 3**　设 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leqslant 0 \\ -x^3 & x > 0 \end{cases}$ 的反函数是 $\phi(x)$，求 $\phi(4)$.

**解**　分段求出反函数，然后再综合起来.

当 $x \leqslant 0$ 时，$y = x^2$，故 $y \geqslant 0$ 得 $x = -\sqrt{y}$；

当 $x > 0$ 时，$y = -x^3$，故 $y < 0$ 得 $x = -\sqrt[3]{y}$，

综上所得

$$\phi(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & x \geqslant 0 \\ -\sqrt[3]{x} & x < 0 \end{cases},$$

故有
$$\phi(4) = -\sqrt{4} = -2.$$

**例 4**　设 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leqslant 0 \\ \lg x & x > 0 \end{cases}$，$\phi(x) = \begin{cases} 2 - \cos x & x \leqslant 0 \\ 1 - \sqrt{x} & x > 0 \end{cases}$，求 $\phi[f(-1)]$.

**解**　$f(-1) = (-1)^2 = 1$，

故　$\phi[f(-1)] = \phi(1) = 1 - \sqrt{1} = 0.$

**例 5**　当 $x \neq 0$ 时，$f(x)$ 满足 $af(x) + bf\left(\frac{1}{x}\right) = 2x + \frac{3}{x}$，且 $x = 0$ 时，$f(0) = 0$，$|a| \neq |b|$. 证明 $f(x)$ 为奇函数.

**分析**　先求出 $f(x)$，由 $f(-x)$ 出发来证明 $f(x)$ 是奇函数.

**证明**　由 $af(x) + bf\left(\frac{1}{x}\right) = 2x + \frac{3}{x}$ 将 $x$ 换为 $\frac{1}{x}$，得

$$af\left(\frac{1}{x}\right) + bf(x) = \frac{2}{x} + 3x$$

将 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 消去，解出 $f(x)$，得

$$f(x) = \frac{1}{a^2 - b^2}\left[(2a - 3b)x + \frac{3a - 2b}{x}\right].$$

因为 $a^2 - b^2 \neq 0$，且 $2a - 3b$，$3a - 2b$ 不同时为零，又 $f(0) = 0$，故

$$f(-x) = -\frac{1}{a^2 - b^2}\left[(2a - 3b)x + \frac{3a - 2b}{x}\right] = -f(x).$$

从而得 $f(x)$为奇函数.

**例 6** 已知偶函数 $f(x)$在$[0,4]$上是单调增函数,试比较 $f(-\pi)$与 $f(\log_{\frac{1}{2}}8)$的大小关系.

**分析** 利用偶函数的性质和单调增来判别.

**解** $f(-\pi)=f(\pi)$, $f(\log_{\frac{1}{2}}8)=f\left(\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right)=f(-3)=f(3)$,

而 $3<\pi$, 故 $f(\pi)>f(3)$, 即得

$$f(-\pi)>f(\log_{\frac{1}{2}}8).$$

**例 7** 判别函数 $f(x)=x\cdot\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$ 的奇偶性.

**解** $f(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$,且

$$f(-x)=(-x)\cdot\frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=(-x)\cdot\frac{1-2^x}{1+2^x}$$
$$=x\cdot\frac{2^x-1}{2^x+1}=f(x),$$

故 $f(x)$是偶函数.

**例 8** 求函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})\ (x\geqslant 1)$ 的反函数.

**解** 显然 $e^y=x+\sqrt{x^2-1}$,

故有 $e^{-y}=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}=x-\sqrt{x^2-1}$,

以上两式相加,得

$$x=\frac{1}{2}(e^y+e^{-y}).$$

因为 $x\geqslant 1$, 有 $x^2-1\geqslant 0$, 于是 $x+\sqrt{x^2-1}\geqslant 1$, 得 $y\geqslant 0$, 因此,所求的反函数为

$$y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}),\ x\geqslant 0.$$

**例 9** 设函数 $f(x)=\begin{cases}4-x^2 & |x|\leqslant 2\\ 0 & |x|>2,\end{cases}$ 求 $f(f(x))$.

**解** $f(f(x))=\begin{cases}4-f^2(x) & |f(x)|\leqslant 2\\ 0 & |f(x)|>2,\end{cases}$

当 $|x|>2$ 时, $f(x)=0$, 有 $|f(x)|\leqslant 2$, 即

$$f(f(x))=4-0^2=4,$$

当 $|x|\leqslant 2$ 时, $f(x)=4-x^2$.

分两种情况讨论:

$|4-x^2|\leqslant 2$ 即 $-2\leqslant x^2-4\leqslant 2$, 得 $\sqrt{2}\leqslant|x|\leqslant\sqrt{6}$, 结合 $|x|\leqslant 2$, 可得 $\sqrt{2}\leqslant|x|\leqslant 2$;

由 $|4-x^2|>2$, 可解得 $|x|<\sqrt{2}$, 或 $|x|>\sqrt{6}$, 结合 $|x|\leqslant 2$, 可得 $|x|<\sqrt{2}$.

综上所述可得

$$f(f(x))=\begin{cases}0 & |x|<\sqrt{2} \\ 4-(4-x^2) & \sqrt{2}<|x|\leqslant 2 \\ 4 & |x|>2\end{cases}.$$

**例 10**　设对任何 $x\in(-\infty,+\infty)$，存在 $c\neq 0$，使 $f(x+c)=-f(x)$，证明 $f(x)$是周期函数.

**证明**

因为　$\forall x\in(-\infty,+\infty)$有

$$f(x+2c)=f(x+c+c)=-f(x+c)=f(x)$$

所以　$f(x)$是周期为 $2c$ 的周期函数.

**例 11**　设 $f(x)=\begin{cases}x & -\infty<x<1 \\ x^2 & 1\leqslant x\leqslant 4 \\ 2^x & 4<x<+\infty\end{cases}$　求 $f^{-1}(x)$.

**分析**　求分段函数的反函数，只需分别求出各区间段内函数的反函数即可.

当 $-\infty<x<1$ 时，$y=x$，反函数为 $x=y$，$-\infty<y<1$；

当 $1\leqslant x\leqslant 4$ 时，$y=x^2$，反函数为 $x=\sqrt{y}$，$1\leqslant y\leqslant 16$；

当 $x>4$ 时，$y=2^x$，反函数为 $x=\log_2 y$，$y>16$.

综上所述，有

$$y=f^{-1}(x)=\begin{cases}x & -\infty<x<1 \\ \sqrt{x} & 1\leqslant x\leqslant 16 \\ \log_2 x & 16<x<+\infty\end{cases}.$$

**例 12**　试将 $y=\arctan[a^x\sqrt{1-x^2}+\ln(x^2+2)]$ 表示成基本初等函数的复合.

**解**　设 $u_1=1$，$u_2=x^2$，$u_3=a^x$，$u_4\circ=\ln x$，$u_5=2$，$f\circ=\arctan x$，$g\circ=\sqrt{x}$，

则　$y=f\circ[u_3\cdot(g\circ(u_1-u_2))+u_4\circ(u_2+u_5)]$.

其中“$\circ$”表示函数的复合作用.

**例 13**　设 $f(x)=\begin{cases}e^x & x>1 \\ 2x & x\leqslant 1\end{cases}$，$\varphi(x)=\begin{cases}\sin x & x>0 \\ x^2 & x\leqslant 0\end{cases}$，求 $f(\varphi(x))$.

**解**

$$f(\varphi(x))=\begin{cases}e^{\varphi(x)} & \varphi(x)>1 \\ 2\varphi(x) & \varphi(x)\leqslant 1\end{cases}$$

当 $x<-1$ 时，$\varphi(x)>1$；当 $x\geqslant -1$ 时，$\varphi(x)\leqslant 1$

所以

$$f(\varphi(x))=\begin{cases}e^{x^2} & x<-1 \\ 2x^2 & -1\leqslant x\leqslant 0 \\ 2\sin x & x>0\end{cases}.$$

**例 14**　判定函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的奇偶性.

**分析**　判断奇偶性一般由 $f(-x)$出发.

**解**　$f(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$，

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1})$$