高等专科学校教学用书

GAODENG
ZHUANKE
XUEXIAO
JIAOXUE
YONGSHU

误差理论与测量平差

冶金工业出版社

高等专科学校教学用书

误差理论与测量平差

昆明冶金专科学校 袁孔铎 主编

冶金工业出版社

（京）新登字036号

高等专科学校教学用书

误差理论与测量平差

昆明冶金专科学校　袁孔铎　主编

*

冶金工业出版社出版

（北京北河沿大街嵩祝院北巷39号）

新华书店总店科技发行所发行

冶金工业出版社印刷厂印刷

*

787×1092 1/16　印张23 3/4字数564千字

1992年3月第一版　　1992年3月第一次印刷

印数00,001～3,000册

ISBN 7-5024-0956-4

TD·161（课）定价6.05元

前　　言

本书是在昆明冶金专科学校测量专业使用的《误差理论及测量平差》讲义的基础上，根据1987年工程测量和矿山测量专业四校（长沙、昆明、本溪、连云港四所专科学校）联编教材会议上所确定的内容，按矿冶类测量专业三年制专科《测量平差》课程教学大纲要求编写的。书中除详尽地介绍了误差传播、直接平差、条件平差、间接平差等经典平差方法外，并对本学科近些年来的发展，如相关平差、秩亏自由网平差以及最小二乘滤波、推估和配置等理论和应用也作了适当介绍。此外，考虑到电算和工程上的需要，增设了线性方程组的迭代解法、误差椭圆、参数估计及误差检验等章节。本书初稿经昆明冶金专科学校测量专业试用，认为内容比较适当，理论联系实际较紧密，书中公式推导演算比较详尽，尤其是大部分公式除矩阵推导外，都给出了纯量形式，符合专科学生水平，便于学习。

为方便读者自学和检查，每章后均附有习题，并在书后附有习题答案。

本书是高等专科学校工程测量、矿山测量专业的教学用书，也可供测绘专业人员参考。

本书由昆明冶金专科学校袁孔铎（绪论、第一、四、五、八、九章）、本溪冶金专科学校姜明玉（第二、三章）和长沙有色金属专科学校喻贵才（第六、七、十、十一章）编写；袁孔铎任主编，负责全书的统一修改定稿。

本溪冶金专科学校吴永义教授审阅了本书的《编写提纲》和初稿，提出了许多宝贵意见和建议，在此表示衷心感谢。

由于编者水平有限，书中存在缺点和错误在所难免，诚恳地希望读者批评指正。

编　者

1990年12月

目　　录

绪　论

第一节　测量误差

一、测量及测量误差

人类在研究质和量的关系的过程中，都离不开测量。测量某一个量就是将被测量与作为测量单位的同类量相比较。因此，测量的过程实质上就是两个同类量互相比较的过程。经过测量，得到一个等于测量单位倍数的无名数。若以N表示此无名数，以L表示观测量，以u表示测量单位，则有下列等式

$$L = Nu \tag{1}$$

当对某量进行多次测量，按理应当只能得到一个相同量，但实际各次测量结果总是不相同。例如，往返丈量同一段距离，两次丈量的结果往往不相同；多次观测同一角度，各次所得结果也往往不尽相同。上述现象究其原因就是由于各次观测结果含有误差的缘故。

产生误差的原因是多方面的，可归纳为下列三个方面：

1. 测量仪器和工具的影响　观测工作一般都使用测量仪器，而仪器制造的精确度总是有限的，因而使测量结果受到影响，产生误差。例如，用最小读数为1′的经纬仪测角，就不能保证估读0.1′是准确的；又如用只刻有cm分划的普通水准尺进行水准测量，就不能保证估读的mm数准确；此外，仪器结构本身也有一定误差。

2. 观测者的影响　人的感觉器官的某些局限性，使得仪器的安置、照准、读数等方面也都会产生误差。

3. 观测时所处的外界条件　如温度、湿度、风力、大气折光等，也会使测量结果产生误差。

上述三方面是产生测量误差的主要来源。上述三方面的因素统称为**“观测条件”**。

表 1　经纬仪度盘读数结果

测量编号	角　　值	与平均值之差 Δ''	测量编号	角　　值	与平均值之差 Δ''
1	60°00′24″.64	+0″.34	10	60°00′24″.88	+0″.10
2	25.06	−0.08	11	24.94	+0.04
3	25.00	−0.02	12	24.88	+0.10
4	25.00	−0.02	13	24.94	+0.04
5	25.06	−0.08	14	25.31	−0.33
6	25.19	−0.21	15	25.21	−0.23
7	24.88	+0.10	16	25.06	−0.08
8	24.94	+0.04	17	24.75	+0.23
9	24.94	+0.04	18	24.94	+0.04
			平 均 值	60°00′24″.98	

测量工作中的误差是不可避免的。例如，用经纬仪在实验室条件下测量了一个约60°的角度，共测了18次，每次旋转度盘20°，所得结果载于表1。

由上表可以看出，用此经纬仪测角时，各次测量结果与平均值之差，均在0.4″以内。此表也表征该经纬度盘分划的质量。

又例如，在三角网观测中，对某一方向共观测了9个测回，各测回的方向值载于表2。

这9个测回是用同一台仪器同一个人，在差不多相同的外界条件下观测的。也就是说，是在相同观测条件下对同一方向进行的测量，其测量结果与平均值之差在6.5″之内(表2)。

由上面不同的测量结果中可以看出，无论测量工作进行得如何仔细和认真，也不管所采用的仪器如何精密，只要进行多次重复测量，测量结果彼此之间总是有差异的，它们与观测量的精确值也是有差异的。由此可以作出结论：在整个测量工作中**误差是不可避免的**。

表 2 各测回方向观测值

测回编号	方向值	与平均值之差 Δ″	测回编号	方向值	与平均值之差 Δ″
1	57°48′40″	−1.6	6	57°48′42″	−3.6
2	37	+1.4	7	32	+6.4
3	40	−1.6	8	37	+1.4
4	36	+2.4	9	41	−2.6
5	41	−2.6	平均值	57°48′38″.4	

所使用的测量仪器愈完善，观测员愈熟练，测量愈仔细，外界条件愈有利，即观测条件愈好，则在同一量的观测结果中所含的误差就愈小，精度也就愈高。反之，若测量仪器有某些缺陷，观测员不够熟练，测量不够仔细，观测时外界条件不怎么好，即观测条件差一些，则在同一量的观测结果中所含的误差就会大一些，其精度也就低一些。

二、测量误差的分类

测量误差根据它的性质可分为两大类。

1. 系统误差　在相同的观测条件下，作了一系列观测，若出现的误差保持在同一数值、同一符号范围内，或者随着观测条件的不同，其误差遵循着一定的规律而变化，则这种性质的误差称为**系统误差**。例如用30m长的钢尺量距，量得的距离为D'，而该尺与标准尺比较结果长了或短了ΔL，则此距离含有误差$\frac{\Delta L}{30}D'$，这种误差的大小与所量距离的长度成正比例，并且保持同一符号；又如用视准轴不平行于水准管轴的水准仪进行水准测量，则标尺读数的误差与水准仪至标尺的距离成正比，也保持同一符号。

系统误差经常是由于仪器构造有缺陷或检验校正不严格而产生的，它的变化具有一定的规律性，因此，可以采用观测的方法或计算的方法加以消除，或者使其影响减弱至最小。例如上述钢尺量距的例子，可用钢尺检定的改正数经过计算加以消除。又如，水准测

量时，使前、后视距离相等，就能消除视准轴不平行于水准管轴所引起的标尺读数误差对高差的影响。

大量观测数据表明，系统误差的产生也受外界的自然条件和观测者的影响。例如，空气温度变化使钢尺长度发生变化；大气折光对水准尺读数产生蒙气差影响，而且此种影响是读数离地面越近越大。又如，观测者照准目标时，习惯于把望远镜十字丝交点对在目标中央之右侧或左侧而产生人为的习惯性误差，通常称为**人差**。

外界条件和人差对观测影响的规律，往往是不易掌握和发现的。因此，除采用一定的观测方法和计算方法加以消除或减少系统误差外，在观测时还应注意外界条件的变化，以使其对系统误差的影响减至最小。

2．偶然误差　在相同的观测条件下，作一系列观测，如果观测误差的符号和大小，从表面上看都没有任何规律性可循，则这种误差称为**偶然误差**，例如仪器的照准误差、读数时估读小数的误差等。

偶然误差产生的原因更是多方面的，例如空气不稳定，被观测目标的亮度较差，仪器构造不严密或校正无法完善，观测者的感觉器官受一定的限制等等。这些原因不论是个别的或同时的，是在一个方向上的或是在不同方向上的，都会形成偶然误差。例如，水准测量时在标尺上读数的误差，就是受各种原因的影响而产生的。

当同一个人用同一台仪器在相同的外界条件下作反复观测时，各观测结果将含有数值上和符号上各不相同的偶然误差。这些误差可能彼此相等或者不等，也可能等于零。因此，在一切观测过程中偶然误差是不可避免的。

此外，还有一种误差，虽然它的大小是偶然性的，但符号总是相同的，此即所谓“**单向误差**”。量边时定线不准确所引起的误差就属此类。

第二节　测量平差的目的和任务

由上可知，所有观测结果都不可避免的带有误差，而且系统误差和偶然误差往往是同时发生的。由于系统误差可以采用各种方法加以消除或者改正，或者使其影响减至最小，因而偶然误差就居主要地位。当偶然误差在观测结果中起主导作用时，如何来处理它，这就是本课程要研究的内容。本课程的主要任务就是，**要讨论观测误差的性质及其累积规律，研究消除观测结果与理论值（真值）之间的矛盾，这种矛盾的消除必须在求得最靠近真值的值来实现**，以求得最**可靠的结果**。

因此，测量平差必须达到下列目的：

（1）根据各观测结果求出未知量的最或然值（即最靠近真值的值）；

（2）运用合理的方法评定观测成果的精度；

（3）运用误差理论研究测量工作最合理的方案和观测方法。

第三节　观测的种类

根据不同情况观测分为以下几种。

一、按观测量与未知量之间的关系可分为直接观测与间接观测

直接确定未知量的观测称为**直接观测**。例如，用钢尺丈量直线的长度，用经纬仪测量角度，用求积仪测量图形的面积等。

若确定某未知量，不是直接观测它，而是观测它的函数，这种观测就称为**间接观测**。根据某两点间的边长和倾角来确定该两点间的高差，根据三角形的一个边和两个角来确定三角形的边长等，就是间接观测的例子。

二、按观测量之间的关系可分为条件观测和独立观测

如果所测定的一些观测量，必须严格满足理论上的条件关系，则在这种情况下的观测称为**条件观测**。如三角形三内角之和等于180°，故对三角形三内角之观测就属条件观测。

如果一些观测量之间无任何关系，则这种观测称为**独立观测**。例如，只观测三角形内任意两个角，这两个角之间无几何关系存在，这种观测就属独立观测。

三、按观测时所处的条件可分为等精度观测与不等精度观测

若一组观测结果是在相同观测条件下获得的，其观测质量可认为是相同的，则这些观测称为**等精度观测**。

若在一组观测结果中，各个观测结果是在不同观测条件下求得的，其观测质量可认为是不同的，则这些观测称为**不等精度观测**。

第四节　本学科发展简史及我国测绘技术发展概况

一、本学科的形成与发展

测量平差与其他科学一样，是由于生产的需要而产生的，并在生产实践的过程中得到了发展。在第二节已指出，由于观测值之间有矛盾，就要设法来消除这些矛盾，这就促使人们来研究"平差"问题。在生产实践中，许多观测工作都迫切要求人们来研究平差的最合理而有效的方法。在十九世纪初高斯（Gauss）和勒戎德尔（Legendre），根据前人取平均值的道理和总结出来的偶然误差规律，应用已有的或然率理论，创立了最小二乘法。这一方法在测量平差中，主要是根据一组独立观测值来求未知参数的最佳估值。本世纪四十年代，钦斯特拉（Tienstra）提出相关平差理论，解决了具有相关性的观测值也能直接参予平差的问题。经典的最小二乘平差的基本方法主要是间接平差法和条件平差法，相关平差仍属于经典的最小二乘平差范畴。

随着近代统计估计理论、矩阵代数和大型快速数字电子计算机的发展，由于物理大地测量、测绘空间技术和地球动力学等领域对数据处理的需要，测量平差方法和理论有了很大发展。六十年代初，测绘界在物理大地测量中，运用滤波方法导出了最小二乘推估法，用来解决重力异常和垂线偏差的内插计算问题。七十年代初，克拉鲁普（Krarup）和莫里兹（Moritz）等又提出了最小二乘配置法，用来解决物理大地测量上的数据处理问题。目前测量平差已进入广义最小二乘平差阶段，这是值得广大测绘工作者进一步研究的重要课题。

二、我国测绘科技发展概况

我国古代测绘科技的发展有着光辉的历史，起源悠久，成果辉煌。但近代以后，由于复杂的历史和社会原因，测绘科技的发展滞缓不前，开始逐步落后。明末至新中国成立前三百多年，我国测绘科技基本没有大的发展。解放前，我国虽然在一些地区进行了部分测图和平差计算工作，但其质量很差，而且数量也很少，测绘科研基本没有开展。

新中国成立后，在党和政府的领导下，尤其是改革开放以来，我国社会主义建设事业有了飞速发展，为国民经济建设和国防建设服务的测绘科技，不论在空间大地测量方面、

在摄影测量与遥感方面、在工程和矿山测量方面、在制图学和测量仪器制造等方面，都获得了空前的发展。珠峰位置的准确测定和通讯卫星的准确定位，标志着我国测绘科技水平已大大提高，有些测绘科目已达到或接近世界先进水平。在测量平差计算（包括计算机程序开发）与测绘研究方面，也取得了很多成果。1982年5月，我国天文大地网整体平差工作结束，其成果在1984年6月通过鉴定。这样大规模的数据处理工作，不仅在我国数值计算史和测量史上是空前的，在国际测量史上也是罕见的。这一成果完全可以满足我国社会主义经济建设、国防建设的更高要求。不容置疑，随着我国国民经济的不断发展，我国测绘科技事业必将取得更大的成就。

习　题

1．在测角中用正倒镜观测，在水准测量中使前后视距离相等。这些规定都是为了消除什么误差?

2．用钢尺丈量距离，有下列几种情况，使量得的结果产生误差。试分别判断误差的性质和符号。

（*a*）尺长不准确；　　（*b*）尺子不水平；

（*c*）估读小数不准确；　　（*d*）尺端偏离直线方向；

（*e*）钢尺垂曲

3．在水准测量中，有下列几种情况，使水准尺读数含有误差，试判别误差的性质及符号。

（*a*）视准轴与水准管轴不平行；　　（*b*）仪器下沉；

（*c*）估读小数不准确；　　（*d*）水准尺下沉

4．经纬仪的视准差、竖盘指标差、支架不等高造成的水平轴倾斜对角度观测值的影响是什么误差?这些误差可采用什么方法来消除?

5．用经纬仪测角时，对中整平误差是什么性质的？这些误差对观测角值有何影响?

6．用钢尺沿地表量边时，地表起伏不平，而使钢尺弯曲发生误差，对量得的结果有什么影响？这种影响的特点是什么?

7．水准测量时，使用两支水准尺，若其中有一支有零点差（尺底磨损），会带来什么影响？如何消除?

8．若图纸收缩变形，而使方格网的边长小于100mm时，在图上量取某点的坐标（x、y）时，应怎样量才能消除（避免）图纸收缩的影响?

第一章　测量误差及其传播律

第一节　偶然误差的特性及概率分布

一、偶然误差所依从的规律性

各观测列的偶然误差，从表面上来看虽无规律可循，但用统计学的方法，却依从于**统计规律性**。为了说明表现在观测误差中的统计规律性，现来研究几个实例。

某矿区布设了一个四等三角网，由42个三角形组成。由于观测值带有误差，三内角之和不等于理论值（真值）180°。各个三角形内角和的真误差（即闭合差）Δ_i，按

$$\Delta_i=(L_1+L_2+L_3)_i-180° \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ 42)$$

式中 $(L_1+L_2+L_3)_i$为各内角和的观测值。现将各三角形闭合差的分布载于表1-1。

表 1-1　三角形闭合差分布

三角形总数	最大误差值	三角形闭合差分布										
		为零的	正									
			0～1	1～2	2～3	3～4	4～5	5～6	6～7	7～8	8～9	和
42	+8″.5 −8″.5	2	8	2	4	4		2			1	21

三角形总数	最大误差值	三角形闭合差分布									
		负									
		0～1	1～2	2～3	3～4	4～5	5～6	6～7	7～8	8～9	和
42	+8″.5 −8″.5	6		7	1	2		2		1	19

从表1-1中可以看出，在这一列误差中，绝对值最大的误差等于8.5″；正误差21个，负误差19个，零误差2个。由此可见，正、负误差大致是相等的；同时还可以看出，误差的绝对值越大，出现的次数越少。

为了进行比较，现在我们再来研究一个地下经纬仪导线角度观测的例子。有人为了研究角度观测的精度，布设了两条地下经纬仪导线，第一条导线是在倾斜巷道内，倾角为25°，导线长200m；第二条导线是在水平巷道内，导线长150m。导线各边长10m，角度用J_6型经纬仪观测。

沿每条导线进行了往测和返测，而每条导线中的角度用改变仪器对中而又保持照准垂球线位置的方法观测两次。取每个角度两次观测的差数为d。当测量没有误差时，此差数应为零。因此，可以把所得差数看作观测值差数的真误差。将这些差数（或误差），按符号和数值区间分别列于表1-2。

表 1-2 差数（或误差）数值与符号的分布

误差性质	误差次数				两个导线
	导线 1		导线 2		
	往测	返测	往测	返测	
零误差	1	3	3	4	11
正误差	11	9	6	4	30
负误差	9	9	7	8	33
共计	21	21	16	16	74
由0至15″	12	10	12	11	45
由15.1″至30″	6	7	3	3	19
由30.1″至60″	3	4	1	2	10
60″以上	0	0	0	0	0
共计	21	21	16	16	74
差数之平均值	−1.6″	−1.6″	−0.7″	−1.4″	−1.4″

表1-2完全可以说明，无论是就单个导线而言，或就两个导线而言：（1）误差的绝对值都未超过60″；（2）正误差与负误差出现的次数大致相等；（3）误差的绝对值愈大，则出现的次数愈少；（4）误差的平均值与误差比较起来是很小的。

在无数的测量结果中，都可显示出上述同样的规律，这就是偶然误差所依从的统计规律性。

二、偶然误差的特性

综上所述，人们已从大量实践中总结出偶然误差具有下列几种特性：

（1）**在一定的观测条件下，偶然误差的绝对值不会超过一定的限值。**或者说超过一定限值的偶然误差，其出现的概率为零。这一限值的大小决定于进行观测的条件。

（2）**绝对值相同的正误差与负误差出现的概率相等。**

（3）**绝对值较小的误差比绝对值较大的误差出现的概率大。**

（4）**偶然误差的算术平均值，随着观测次数的无限增加而趋向于零。**或者说它的数学期望等于零，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta]}{n}=E(\Delta)=0 \tag{1-1}$$

证明如下：

设X为观测量的真值，L_1、L_2、……、L_n为一列相同观测条件下的观测值，各个观测值的偶然误差（真误差）为Δ_1、Δ_2、……、Δ_n。若记

$$\underset{n\times1}{L}=[L_1 \quad L_2\cdots L_n]^T$$

$$\underset{n\times1}{\Delta}=[\Delta_1 \quad \Delta_2\cdots\Delta_n]^T$$

上式中的“T”表示转置矩阵符号。

则有

$$\Delta=L-X \tag{1-2}$$

若以被观测量的数学期望表示真值，即令

$$E(L)=X$$

则
$$\Delta = L - E(L)$$
$$E(\Delta) = E[L - E(L)] = E[L - X]$$
$$= E(L) - X = 0 \qquad (1\text{-}3)$$

对于一系列观测而言，不论其观测条件是好是差，也不论是对同一量还是对不同的量进行观测，只要这些观测是在相同的条件下独立进行的，则所产生的偶然误差必然都具有上述四个特性 而且当观测值的个数 n 愈大时，这种特性就表现得愈为明显。偶然误差的这些特性，就是所谓“统计规律性”。

根据偶然误差的上述特性，建立了测量误差理论及处理这类误差的原理和方法。

三、误差分布曲线

在一观测列中，若避免了粗差，消除了系统误差，那末，该观测列所含的主要是偶然误差。此时该观测列的误差，就能表现出偶然误差的全部性质来，而且观测次数越多，这种特性就表现得越明显。下面研究一个具有大量观测数据的例子。

在相同观测条件下，共观测了408个三角形的三内角。现将408个三角形的闭合差（即真误差Δ），按绝对值的大小分区间排列，组成表1-3。

表 1-3 三角形闭合差按绝对值大小分区间排列

误差的区间	Δ 为 正 值		Δ 为 负 值	
″	个 数 γ	频 率 γ/n	个 数 γ	频率 γ/n
0.00～0.50	61	0.150	61	0.150
0.51～1.00	45	0.110	52	0.127
1.01～1.50	39	0.095	37	0.091
1.51～2.00	26	0.063	27	0.066
2.01～2.50	20	0.050	13	0.032
2.51～3.00	7	0.017	10	0.025
3.01～3.50	5	0.012	5	0.012
3.50以上	0		0	
和	203	0.497	205	0.503

误差分布的情况，除了采用上述误差分布表的形式表达外，还可以利用图形来表达。如图1-1所示，以横坐标表示误差Δ的大小，以纵坐标表示各区间内误差出现的频率γ/n除以区间的间隔值$d\Delta$(本例间隔值为0.5″)，这样，每一误差区间的长方形面积，就表示误差在该区间内出现的频率。例如，图1-1中画有斜线的长方形面积，就代表误差出现在0.00″～+0.50″区间内的频率0.150。这种图通常称为**直方图**，它能形象地表示误差的分布情况。

如概率论中所描述的随机事件一样，在一定观测条件下所得到的一列独立观测误差，只要误差的总个数 n 相当多时，则误差出现在各区间的频率总是稳定在某一常数（理论频率）附近，而且随着观测个数的增加，稳定的程度就愈大。例如，就表1-3的一组误差而言，在观测条件不变的情况下，如果再继续观测更多的三角形，随着观测个数的增多，误差出现在各区间的频率，其变动的幅度也就愈来愈小。当 $n\to\infty$时，各频率也就趋于一个完全确定的数值。这就是误差出现在各区间的误差分布。

当 $n\to\infty$时，由于误差出现的频率已趋于完全稳定，如果把误差区间间隔无限缩小，图1-1中的长方形则无限变仄。这样，将无数长方形顶点联接起来就成为一条光滑的曲线。

这种曲线也就是误差概率分布曲线，或称为**误差分布曲线**，其方程为

$$y=f(\Delta) \qquad (1\text{-}4)$$

即误差曲线上任一点的纵坐标 y 均为误差 Δ 的函数。

在图1-1中，各个小长方条的面积为

$$\frac{\nu/n}{d\Delta}d\Delta=f(\Delta)d\Delta \qquad (1\text{-}5)$$

在概率论中上式称为概率元素。

由于最或然误差 v（改正数）与真误差 Δ 同样具有偶然误差的四个特性，故有

$$p(v)=f(v)dv \qquad (1\text{-}6)$$

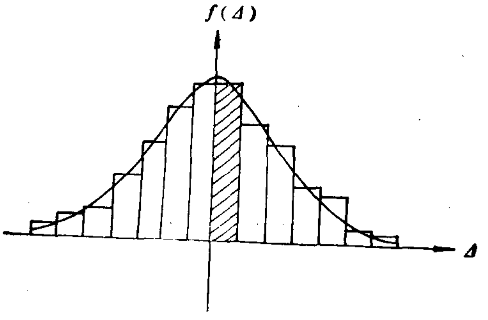

图 1-1　三角形内角和之误差分布曲线

由（1-5）式可知，当 $f(\Delta)$ 较大时，则误差出现于小区间 $d\Delta$ 上的概率也较大，反之则较小。因此，称 $f(\Delta)$ 为误差分布的**概率密度函数**，简称**密度函数**或**概率密度**。

第二节　衡量精度的标准

前面已经讲过，在一定观测条件下，进行一组观测，它对应着一种确定的误差分布。如果分布较为密集，则表示该组的观测质量较好，即这一组的观测精度较高；反之，如果分布较为离散，则表示该组的观测质量较差，即这一组的观测精度较低。因此，所谓精度，就是指误差分布的密集或离散程度。如果两组观测成果误差分布相同，则这两组观测成果的精度相同；反之，如果误差分布不同，则精度也就不同。

为了判断观测误差对观测结果的影响，也就是说为了衡量观测结果的精度，在实际工作中，人们还需要对精度有一个具体数字，这个数字必须要能反映误差分布的密集或离散程度。因此，应该要建立衡量精度的尺度。下面介绍几种常用的评定精度的标准。

一、方差和中误差

在相同观测条件下，一组真误差平方的平均值之极限称为**方差**。方差的平方根称为**中误差**或**标准差**，即

$$\left.\begin{aligned}\sigma^2=D(\Delta)&=\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta\Delta]}{n}=E(\Delta^2)\\ \text{或}\qquad \sigma&=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}\end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}7)$$

式中的 Δ 可以是同一个量的观测值真误差，也可以是不同量的观测值真误差，但必须都是等精度观测。方差 σ^2 和中误差 σ，分别为 $\frac{[\Delta\Delta]}{n}$ 和 $\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}$ 的极限值，它们都是理论上的值。

在实际作业中，观测个数 n 总是有限的，由有限个观测值的真误差求得的方差和中误差，只能是它的估（计）值。方差和中误差的估值一般用 m^2 和 m 表示，即

$$
\left.\begin{aligned}
m^2=\hat{\sigma}^2=\frac{[\Delta\Delta]}{n}\\
m=\hat{\sigma}=\pm\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}
\end{aligned}\right\} \tag{1-8}
$$

上式就是由一组等精度真误差计算方差和中误差的实用公式。

二、平均误差

在相同观测条件下，一组真误差绝对值的算术平均值的极限，称为平均误差，以θ表示，即

$$
\theta=\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta\Delta]}{n}=E(|\Delta|) \tag{1-9}
$$

平均误差θ与中误差σ的理论关系式为

$$
\left.\begin{aligned}
\theta=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma\simeq0.7979\sigma\simeq\frac{4}{5}\sigma\\
\sigma=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\theta\simeq1.253\theta\simeq\frac{5}{4}\theta
\end{aligned}\right\} \tag{1-10}
$$

由于观测值个数n总是有限的，因此，在实用上只能是它的估值，以$\hat{\theta}$表示，即

$$
\hat{\theta}=\pm\frac{|\Delta|}{n} \tag{1-11}
$$

三、或然误差

在相同观测条件下，一组真误差按绝对值的大小递增（或递减）顺序排列，居中的那个误差称为**或然误差**，以ρ表示。也就是说，误差出现在（$-\rho$，$+\rho$）之间的概率等于1/2，即

$$
P(-\rho<\Delta<+\rho)=\frac{1}{2} \tag{1-12}
$$

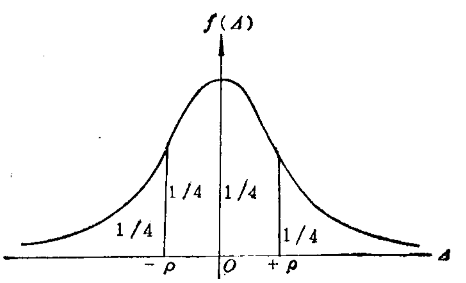

图 1-2　或然误差示意图

如图1-2所示，图中的误差分布曲线与横轴所包围的面积为1，在曲线下（$-\rho$，$+\rho$）之间的面积为1/2。

或然误差ρ与中误差σ的理论关系式为

$$
\left.\begin{aligned}
\rho\simeq0.6745\sigma\simeq\frac{2}{3}\sigma\\
\sigma\simeq1.4826\rho\simeq\frac{3}{2}\rho
\end{aligned}\right\} \tag{1-13}
$$

因为观测值的个数n总是有限的，实用上只能得到ρ的估值$\hat{\rho}$。当n为偶数时，则取中间两个误差值的平均值作为$\hat{\rho}$。

中误差m、平均误差$\hat{\theta}$以及或然误差$\hat{\rho}$都可以作为衡量精度的标准。一般讲，对于有限的观测个数，只有用中误差m来估算观测结果的精度才是可靠的，故我国采用中误差作为估算精度的标准。