微积分学 习题课教程

WEIJIFENXUE XITI KE JIAOCHENG

华中科技大学高数教研室 编

中科技大学出版社
p://press.hust.edu.cn

微积分学
习题课教程

华中科技大学高等数学教研室

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分学习题课教程/华中科技大学高等数学教研室
武汉:华中科技大学出版社,2003年9月
ISBN 7-5609-3021-2

Ⅰ.微…
Ⅱ.华…
Ⅲ.微积分学-高等学校-教材
Ⅳ.O172

微积分学习题课教程　　　华中科技大学高等数学教研室

责任编辑:龙纯曼　　　封面设计:潘　群
责任校对:陈　骏　　　责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山　　　邮编:430074　　　电话:(027)87545012

录　　排:华中科技大学出版社照排室
印　　刷:华中科技大学印刷厂

开本:850×1168　1/32　　印张:13.875　　字数:334 000
版次:2003年9月第1版　印次:2004年1月第2次印刷　　定价:16.80元
ISBN 7-5609-3021-2/O·287

内容提要

本书是为正在学习微积分学课程的本科大学生而编写的，也可供报考硕士研究生的学生参考. 本书内容紧扣教学大纲要求，编排次序与教学同步. 内容包括函数、极限与连续、一元微积分、无穷级数、矢量与空间解析几何、多元微积分、微分方程等. 所选题型典型而全面，例题分析浅显易懂，注重归纳与提高. 配套练习分为A、B两类，供不同程度的读者使用. 本书按章编写，每章分为基本要求、内容提要、学习指导、例题分析、练习题等五个部分，书末附有参考试卷. 本书可作为习题课教材及自学辅导读本使用.

前　言

正在学习微积分学课程的大学生往往希望拥有一本指导学习方法，介绍解题技巧，浅显易懂，循序渐进，与现行教学同步的习题课教程. 本书就是基于这一想法而编写的.

在书市上不难看到各种类型的大学数学参考书，大体上分为三个类型：考研辅导类，习题解答类和同步辅导类. 对于初次学习大学数学的学生来说，考研辅导书因为只是为了提高应试能力，没有学习指导，缺少基本训练，且解题方法注重综合性，可能会用后面的知识去解答前面的问题，故不大适用. 习题解答类是将流行的教材上的习题全部做出解答，供学生查阅，虽然对学生作练习有所帮助，但若是将求解变成抄解，无疑便违背了编书者的本意，因而这类书对学生是否真正有益不好定论. 而同步辅导类书针对学习过程中学生遇到的概念理解，计算技巧，论证思路，应用方式等各种疑难问题进行了较详尽的分析指导与系统的归纳总结，并配有相应的练习，因而特别适合于初学者阅读.

本书将全部微积分学课程内容分为十二章，每章分为五个部分. 第一部分简述教学要求. 第二部分系统归纳主要概念、公式与定理. 第三部分是学习指导，分析难点疑点，剖析常见错误，归纳基本题型. 第四部分为例题分析，是本书的主要部分，我们由浅入深地安排了典型而全面的例题，解题分析详尽易懂，注意解题前的切题分析与

解题后的总结，目的在于提高学生的分析思考能力．第五部分是配套习题，我们认为在掌握了例题的基础上去做习题是不会有多大困难的，程度较好的学生也可先将例题当作习题来做，然后对照检查，收获将会更大．

本书由华中科技大学高等数学教研室高等数学课程组编写，参加人员（以所编写章节为序）有毕志伟、王汉蓉、陈爱兰、薛明皋、魏宏、梅正阳、谢鹏、乔维佳、林益、刘国钧、王德荣、李莉、何涛等．

编　者

2003.7.20

目　　录

1 函　　数

一　基本要求

（1）理解函数的概念.

（2）了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性.

（3）了解反函数的概念，理解复合函数的概念.

（4）掌握基本初等函数的性质及其图形.

（5）会建立简单实际问题中的函数关系式.

二　内容提要

1. 函数概念

变量与常量　在一个确定的考察过程中，保持不变的量称为常量，而发生改变的量称为变量.

在论及变量时一般应指明相应的考察过程.

函数　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集. 如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定法则总有唯一确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$.

定义域　使函数 $f(x)$ 有定义的自变量 x 的集合 D 称作 f 的定义域.

值域　当自变量 x 在函数的定义域 D 中变动时，函数值 $f(x)$ 的集合称作 f 的值域.

函数的相等　当两个函数的定义域与对应规则都相同时，称这两个函数相等.

2. 函数性态

单调性 $f(x)$在(a,b)上单调增(单调减)是指当$x_1<x_2$时$f(x_1)\leqslant f(x_2)$ $(f(x_1)\geqslant f(x_2))$. 不等号"$\leqslant$"("$\geqslant$")换作严格不等号时即为严格单调增(严格单调减)函数.

判定函数的单调性,可以从定义出发,通过判定$f(x_2)-f(x_1)$的符号进行. 在第四章中将介绍利用导数的符号进行判定.

奇偶性 设定义域D为关于原点对称的区间. $\forall x\in D$,若有$f(-x)=f(x)$,则称f为偶函数,偶函数的图形是关于y轴对称的;若有$f(-x)=-f(x)$,则称f为奇函数,奇函数的图形是关于原点对称的.

四则运算对奇偶性的影响如下表所示:

f	g	$f\pm g$	$f\cdot g$ 或 f/g
奇	奇	奇	偶
奇	偶	/	奇
偶	偶	偶	偶

周期性 满足$f(x+T)=f(x)$ $(x\in D, T$为正常数$)$的函数叫周期函数.

最小正周期叫基本周期.

有界性 函数$f(x)$在区间I上有界是指存在正常数M,使得$|f(x)|\leqslant M$ $(x\in I)$.

3. 复合函数与反函数

复合函数 函数$y=f(u)$与函数$u=g(x)$的复合$y=f(g(x))$有意义的条件是:g的值域包含在f的定义域中. 复合运算就是代入运算.

反函数 严格单调函数必有反函数(注意:有反函数的函数不一定严格单调). 从$y=f(x)$中解出$x=f^{-1}(y)$便得到反函数的表

达式. 由于函数的表示与变量记号无关，$x=f^{-1}(y)$与 $y=f^{-1}(x)$是同一个函数，但所画出的曲线可能不一样. 曲线 $y=f(x)$与 $x=f^{-1}(y)$是相同的，而曲线 $y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$关于直线 $y=x$ 对称.

初等函数 由基本初等函数及常数函数经有限次四则运算及复合运算构成，且由一个解析式表示的函数称为初等函数.

三 学习指导

(1) 函数的概念与基本性质在初等数学中有一些介绍，读者也已知道并会运用许多基本初等函数，如 $y=2x+1$，$y=x^2$，$y=\sin x$，$y=\arctan x$，$y=\lg x$，$y=2^x$ 等等，这些基础无疑是非常有益的. 本章可看作关于函数基本知识的一个系统归纳与总结，是全书的基础. 函数概念是历代数学家不断完善千锤百炼而形成的，在理解函数概念时要注意以下两点：

1° 实用性 数学理论具有较广泛的应用领域，既适用于自然科学，也适用于社会科学. 其原因在于数学概念是从广泛的实际问题中抽象出来的，从而应适用于这些背景问题甚至更多的方面. 在人们日常生活、工作与研究中面临的诸如时间、气温、湿度、股价、利率、物价、生产成本与利润、世界人口数量、生态平衡、星象位置等等，都可以视为变量. 无论是定量地还是定性地表达与研究这些变化问题，都要借助于函数这一工具. 因而，掌握了函数这一数学工具，才能向科学王国进军.

2° 抽象性 尽管函数概念源于具体的实际问题，有着广泛的应用范围，但其概括与处理却是高度抽象的. 有时候，你弄不清所讨论的函数问题有什么用途，其实这正是数学方法的长处. 只有进行抽象，才能去伪存真，发现共性. 函数作为变量之间的一种对应关系，其中的变量不仅可以取实数(即 x、y 在实数中变动，本课程中均如此)，还可取复数，更一般地，可以将变量完全从数的范畴中抽象出来，让 x、y 在一般的集合中变化，而得到集合 X 到集合 Y

上的对应，此时称此对应为映射. 对映射的研究，形成了不同的数学分支，并找到更加广泛而深刻的应用.

(2) 本章的概念比较多，学习时要注意准确理解其涵义，不能满足于能背诵定义. 为了使你的理解较为深刻，可以考虑以下作法.

1° 具体化　结合一些简单而各具特色的函数例子来认识关于函数的性质与规则. 例如在学习函数的周期性时，仔细观察函数 $y=\sin x$（有最小正周期 2π）、函数 $y=D(x)$（无最小正周期的周期函数）以及函数 $y=x$（非周期函数）；在学习函数的有界性时，可以比较函数 $y=\sin x$（于 $(-\infty,+\infty)$ 上有界）、函数 $y=x$（于 $(-\infty,+\infty)$ 上无界但于有限区间 (a,b) 上有界）以及函数 $y=\frac{1}{x}$（于 $(0,1)$ 上无界，但于 $(1,+\infty)$ 上有界）. 这些具体的例子不仅有助于对抽象概念的理解，也常用来说明函数的一些重要性质.

2° 直观化　人们常说，直觉是创造的源泉，而几何上的直观描述更是十分重要，一是能借助视觉记忆来加深对事物的印象，另一方面是可从整体上把握函数的特征，如单调范围，波动情况等等. 在学习过程中，只要有可能，便应试着画出你所考虑的函数的图形，即便是不太准确的草图也可以. 在以后的学习中你会发现，一个草图往往会给问题的分析指明方向.

3° 多方位　即从不同角度进行理解. 多方位理解包括两层涵义，一是相互联系地理解，如单调函数是否一定有界？圆是否也是椭圆？另一方面是从“反面”即否命题的角度去理解概念. 以下写几个常见概念的否命题，请读者体会其涵义及构造方式.

$f(x)$ 于 $[a,b]$ 上无界：任给 $M>0$，总存在 $x_M\in[a,b]$ 使得 $|f(x_M)|>M$.

$f(x)$ 于 $(0,+\infty)$ 上不单调增：存在 $x_1,x_2>0$，使 $x_1<x_2$ 但是 $f(x_1)>f(x_2)$.

$f(x)$ 于 $(-\infty,+\infty)$ 上不是周期函数：任给 $T>0$，存在 x，使得 $f(x+T)\neq f(x)$.

(3) 本章的主要题型为:求解不等式,求函数的定义域与值域,判断函数的奇偶性、周期性、单调性与有界性,复合运算,求反函数与列函数关系式等.

四 例题分析

例 1 解下列不等式:

(1) $|x-5|<8$.　　(2) $|2x-4|\geqslant 10$.

(3) $|x+1|-|x-1|<1$.　　(4) $\dfrac{2(x+1)(x-2)}{3x-1}>0$.

解 (1) $|x-5|<8$,即 $-8<x-5<8$,故有不等式组:

$$\begin{cases} -8<x-5, \\ x-5<8, \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} -3<x, \\ x<13, \end{cases} \quad \text{或} -3<x<13.$$

(2) 由定义,$|2x-4|\geqslant 10$,相当于 $2x-4\leqslant -10$ 或 $2x-4\geqslant 10$,亦即 $2x\leqslant -6$ 或 $2x\geqslant 14$.综合即 $x\leqslant -3$ 或 $x\geqslant 7$.用区间表示即 $x\in(-\infty,-3]\cup[7,+\infty)$.

(3) 因 $x=-1,1$ 时相应的绝对值为零,故在 $(-\infty,-1)$,$[-1,1]$ 及 $(1,+\infty)$ 上分别求解该不等式时,绝对值内的符号是不变的,可以去掉取绝对符号.

(i) 当 $x<-1$ 时,$x-1<0$,$x+1<0$,故原不等式等价于

$$-(x+1)-(1-x)<1,$$

即 $-2<1$,这是恒等式!这说明 $x<-1$ 时不等式恒成立.

(ii) 当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时,$x-1\leqslant 0$,$x+1\geqslant 0$,原不等式等价于

$$x+1-(x-1)<1,$$

即 $2x<1$.得 $x<\dfrac{1}{2}$.这说明在此时($-1\leqslant x\leqslant 1$)应有 $-1\leqslant x<\dfrac{1}{2}$.

(iii) 当 $1<x$ 时,$x-1>0$,$x+1>0$,故原不等式即为

$$x+1-(x-1)<1,$$

即 $2<1$.这是不可能的,从而说明当 $x>1$ 时不等式无解.

综上而知，不等式的解为$-\infty<x<\frac{1}{2}$.

(4) 此题属于分式不等式.通常用分析因式的符号来化作简单的不等式组.不等式左边为三个因式的积或商，所给不等式成立等价于下列4个不等式组：

$$① \begin{cases} x+1>0, \\ x-2>0, \\ 3x-1>0; \end{cases} \qquad ② \begin{cases} x+1<0, \\ x-2<0, \\ 3x-1>0; \end{cases}$$

$$③ \begin{cases} x+1>0, \\ x-2<0, \\ 3x-1<0; \end{cases} \qquad ④ \begin{cases} x+1<0, \\ x-2>0, \\ 3x-1<0. \end{cases}$$

分别求解知：②、④不等式组无解；不等式组①的解是$x>2$；不等式组③的解是$-1<x<\frac{1}{3}$.故综合起来即$-1<x<\frac{1}{3}$和$x>2$是不等式的解.

注 不等式求解在初等数学中已经学过，在高等数学中，经常需要求解不等式(如估计函数的界，判定函数的单调性，凸凹性，估计积分值等等)，故必须熟练掌握.

例2 求以下函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{x^2}{1+x}$. (2) $y=(x-2)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

(3) $y=\arcsin(1-x)+\lg(\lg x)$. (4) $y=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0, \\ 1, & x=0. \end{cases}$

分析 求定义域的关键在于写出使解析式有意义的自变量x的取值范围.这只要列出相应的不等式并求其解便可.针对初等函数的特点，通常遵循以下几条：

(i) 分式$\dfrac{v(x)}{u(x)}$中，应当使$u(x)\neq 0$；

(ii) 偶次方根如$\sqrt{u(x)}$中，应当使$u(x)\geqslant 0$；

(iii) 对数函数$\log_a u(x)$中，应当使$u(x)>0$；

(iv) 对$\arcsin u(x)$或$\arccos u(x)$，应当使$|u(x)|\leqslant 1$；

(v) 若函数是 $u(x)$、$v(x)$ 的和或积(商见(i))时,它的定义域是 $u(x)$ 及 $v(x)$ 的定义域之交集.

解 (1) 分式函数,应当使 $1+x\neq0$,即定义域是 $(-\infty,1)$ 与 $(1,+\infty)$.

(2) 含有平方根,应当使 $\dfrac{1+x}{1-x}\geqslant0$,其中又包含分式,应当使 $1-x\neq0$. 故有不等式组

$$\begin{cases}1+x\geqslant0,\\1-x>0,\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}1+x\leqslant0,\\1-x<0.\end{cases}$$

求得其解为 $-1\leqslant x<1$.

(3) 应当同时要求 $|1-x|\leqslant1$, $\lg x>0$ 及 $x>0$. 亦即 $0\leqslant x\leqslant2$, $x>1$ 及 $x>0$. 联立解得 $1<x\leqslant2$.

(4) 无论 x 取何值,函数 $y(x)$ 均有定义,故定义域是 $(-\infty,+\infty)$.

例 3 判别下列各对函数是否相等:

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$, $\qquad g(x)=x-1$.

(2) $f(t)=1+\sin t$, $\qquad g(t)=\sin(1+t)$.

(3) $f(x)=x$, $\qquad g(x)=\sin(\arcsin x)$.

(4) $f(x)=\ln(1+x+x^2)^2$, $g(x)=2\ln(1+x+x^2)$.

分析 两函数相等的充分必要条件是它们的定义域与对应规则均相同.

解 (1) 不相等. 因为 f 的定义域是 $x\neq-1$,而 g 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$,定义域不相同.

(2) 不相等. 因为对应规则不相同,例如, $f(0)=1$,而 $g(0)=\sin1$, $f(0)\neq g(0)$.

(3) 不相等. f 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$,但 g 的定义域是 $[-1,1]$.

(4) 相等. 因为对任意 x, $1+x+x^2>0$,故两个函数的定义域均是 $(-\infty,+\infty)$,并且由对数性质知,对应规则也一样.

例 4 求下列函数的反函数:

(1) $y=x^3+1$.　　　　　　(2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ $(x\neq-1)$.

(3) $y=x^2$.　　　　　　　(4) $y=\begin{cases}\ln x, & x\geqslant 1,\\ x-1, & x<1.\end{cases}$

分析　一个函数 $y=f(x)$ 有反函数的充分必要条件是从 x 到 y 的对应是 1-1 对应的，即不同的 x 之值应对应着不同的 y 值. 通常是从所给函数关系中解出自变量 x 而得到反函数的表达式.

解　(1) 由 $y=x^3+1$ 解出 $x=(y-1)^{\frac{1}{3}}$，此即为所求反函数.

(2) 同样可解出 $x=\dfrac{1-y}{1+y}(y\neq-1)$ 为其反函数.

(3) 由 $y=x^2$ 解出 $x=\pm\sqrt{y}$，不同的 x 之值 1 、-1 对应着同一个函数值 $(\pm1)^2=1$，故该函数没有反函数.

若限定函数的定义域，例如 $-\infty<x\leqslant 0$ 或 $0\leqslant x<+\infty$，则有相应的反函数 $x=-\sqrt{y}$ 或 $x=\sqrt{y}$.

(4) 函数关系 $y=f(x)$ 是分段给出的，因此须分段求反函数. 当 $x\geqslant1$ 时，由 $y=\ln x$ 得 $x=e^y(y\geqslant0)$；当 $x<1$ 时，由 $y=x-1$ 得 $x=y+1(y<0)$，故所求反函数为

$$x=\begin{cases}e^y, & y\geqslant 0,\\ 1+y, & y<0.\end{cases}$$

例 5　设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}(x\neq1)$，求 $f(3)$、$f(\dfrac{1}{x})$ 以及 $f(f(x))$ 与 $f(f(f(x)))$.

分析　将条件 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ 理解为关于 x 的恒等式，两边的 x 可以同时取同一个值 x_0 或表达式 $u(x)$.

解　$f(3)=\dfrac{1}{1-3}=-\dfrac{1}{2}$.

$$f(\frac{1}{x})=\frac{1}{1-\dfrac{1}{x}}=\frac{x}{x-1}\ (x\neq0,1).$$

$$f(f(x))=\frac{1}{1-f(x)}=\frac{1}{1-(1/(1-x))}=\frac{1-x}{(1-x)-1}$$