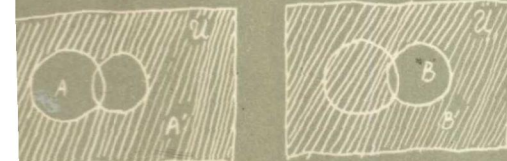


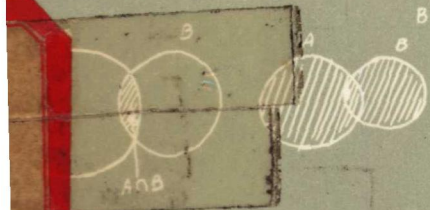
$= \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 即 B 集内共有 5 个元素
 $\subseteq B$ 表示 B 的任意子集
 $\subseteq B \iff (x \in A \Rightarrow x \in B)$
 $A \cap B \neq \emptyset \wedge A \cap C \neq \emptyset$


$$UB)' = A' \cap B'; \quad (A \cap B)' = A' \cup B'$$

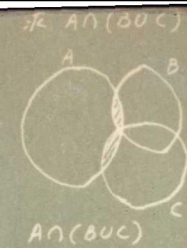
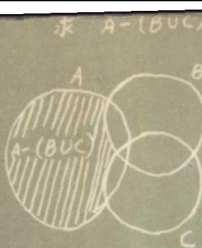
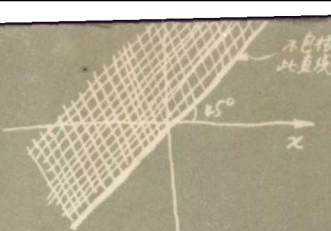
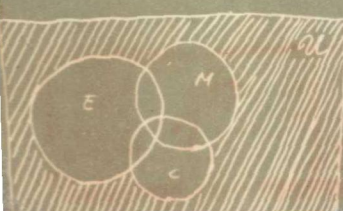
$$UB)' = \{x : x \in U \text{ and } x \notin (A \cup B)\}$$


交换律 (Commutative)

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x/x \in A \wedge x \in B\} \\ &= \{x/x \in B \wedge x \in A\} \\ &= B \cap A \end{aligned}$$



100人中5种语言都不懂的,在此题中 U 为全集, $n(U)=100$,
 $n(U) - n(E \cup M \cup U) = 100 - (1 + 7 + 19 + 12 + 5 + 4 + 19) = 100 - 67 = 33$



$A' = B$
 $B' = A$

$A = B'$
 動物界

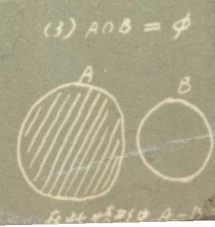
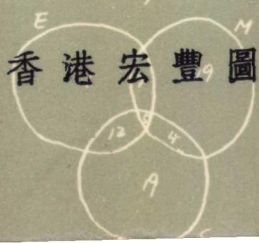
$B = A$
 植物界

映與系

黃燊權編著

分配律 (Distributive)

香港宏豐圖書公司出版



實數系與映像

香港宏豐圖書公司出版

1966

實數系與映像

黃榮權編著

出版者 香港宏豐圖書公司
Hung Fung Book Co.
香港文咸西街七十九號二樓
電話 四四二二八一
79 Bonham Strand, W., 1st fl.
H. K. Tel. 442281

總經售 世界書局
The World Book Store
香港荷李活道六十九號
電話 二二一二六七
69, Hollywood Rd., H. K.
九龍旺角亞皆老街一〇五號
電話 八一五一五三
105, Argyle St., Kowloon
Hong Kong

承印者 南昌興記印務公司
香港德己立街四十二號

出版日期 一九六六年八月版
定價 港幣六元

版權所有*翻印必究

661・81

FOREWARD

In virtually every country of the world which has an advanced technology, there is taking place a revolution in the teaching of mathematics.

Until recently, the principal users of mathematics were the physical scientists and engineers, most of whom used mathematics in a rather trivial way; that is, they used mathematical formulas and methods to help them solve their problems. However, as the sciences became more complex and more abstract, it became evident that mathematics could make a contribution to these fields not only by providing formulas and methods but also by providing new ways of looking at these disciplines. Thus the full power of abstract mathematical thinking has been applied to the sciences. At the same time, these abstract modes of thought have been applied to fields where mathematics has been used very little in the past, such as biology, economics, psychology, and political science.

This broadening of the applications of mathematics and emphasis on mathematical ways of thinking has spurred the revolution in the teaching of mathematics. Young people entering those fields where mathematics is used now find that it is not sufficient to have memorized certain mathematical formulas or methods. Nothing less than **understanding** suffices. Thus the most important feature of modern mathematics teaching on every level from the first year of school to the university is its emphasis on understanding rather than mere proficiency in solving problems by some well established method.

This search for understanding has also led to some changes in the subject matter taught. For example, set theory is essential to an understanding of mathematics as it is conceived today, and hence set theory is being taught more widely. The same can be said for logic.

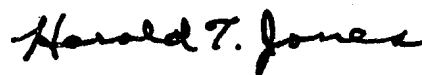
The ideas of logic and set theory provide the basis for a precise treatment of the subjects presented in this book — **the real number system and mappings**. These subjects, in turn, are the starting point for the study of many branches of mathematics, including those which are being applied to the sciences and engineering.

Mr. Hwang has, in his university studies, entered into the spirit of mathematical thought, and it is to be hoped that the present textbook will be a genuine inspiration to those students and teachers for whom understanding is the highest goal.

University of Paris

France

June 1966



HAROLD T. JONES

著 者 序

現代數學乃是以集論為基礎，故學習現代數學必須以邏輯與集為首經之途徑。集的理论可以在實數系與映像中表現得更透徹，學完邏輯與集後再學習本書是很合邏輯的步驟。

本書在第二章起，介紹了代數公理，以後數章中一切證題均採用公理法。即證題之每一步均要以定義，公理為根據，這種方法乃數學中的正式證題法。也許讀者要問，公理又根據甚麼理由呢？我不擬正面回答這問題，只是想給各讀者知道一切證明總得要有一個開始，如果沒有起點的話。則這證明如同繞着一個圓圈走路，無論走了多少時間或走了多少路程，你始終都在那裏兜圈子兜個不完。公理乃是數學理論的始點，如果沒有公理的話，數學之理論無從開始。最開始的一章為預章，俾未讀過邏輯與集之讀者，對該題目有最低限度之知識。此章因非本書研究範圍，故編入第“0”章。

全書共分二篇，第一篇為實數系，介紹了實數系之性質。第二篇為映像，我沒有把映像與函數分開，這是無傷大雅的。此二篇之材料乃是預備研究現代代數與幾何者應熟習的。其實對於歐幾里得的幾何來說只有一個模型 (model) 可以使歐氏幾何一切理論均適合，這模型就是實數系。

蒙鍾海樂 (Harold T. Jones) 教授賜序，謹此致謝。匆忙中寫成此書，錯漏之處在所難免，尚祈不吝指正，至為感荷。

黃葉標

於香港華南三育書院

一九六六年 夏

III

本書所用符號一覽表

符 號	名 稱	英 文 名 稱	在本書出現章節
$p, q, r \dots$	命 題	propositions	0·1
$\wedge$	合 取	conjunction	0·1
$\vee$	析 取	disjunction	0·1
$\Rightarrow$	蘊 涵	implication	0·1
$\Leftrightarrow$	等 價	equivalence	0·1
$\sim$	否 定	negation	0·1
$\forall$	全稱量詞	universal quantifier	0·2
$\forall x$	一切 x	for all x	0·2
$\exists$	存在量詞	existential quantifier	0·2
$\exists x$	有些 x	for some x	0·2
$A, B, C \dots$	集	sets	0·3
$a \in A$	a 屬於 A	a is a member of A	0·3
$\{ \}$	集	set	0·3
$A \subseteq B$	A 是 B 的子集	A is a subset of B	0·3
$A \cup B$	A 與 B 之併集	the union of A and B	0·4
$A \cap B$	A 與 B 之交集	the intersection of A and B	0·4
$A - B$	A 與 B 之差集	the difference of A and B	0·4

$\mathbb{R}^{\#}$	一切實數的集	set of all real numbers	1·10
$\mathbb{Z}$	一切整數的集	set of all integers	1·10
$\mathbb{N}$	自然數集	set of natural numbers	1·10
$<$	小 於	is less than	3·1
$\leq$	小於或等於	is less than or equal to	3·1
$>$	大 於	is greater than	3·1
$\geq$	大於或等於	is greater than or equal to	3·1
$\langle a, b \rangle$	a 與 b 之開區間	open interval of a and b	3·21
$[a, b]$	a 與 b 之閉區間	closed interval of a and b	3·22
$\langle a, b \rangle$ or $[a, b]$	a 與 b 之半開區間	half-open interval of a and b	3·23
$\langle -\infty, \infty \rangle$	實 綫	real line	3·23
$ a $	a 的絕對值	absolute value of a, the	4·1
$\sum$	總 和	summation of	習題 5·12—5·19
$n!$	n 的階乘	n factorial	習題 5·20
$(G, +)$	群	group	7·2
$(R, +, \cdot)$	環	ring	7·5
(a, b)	序 偶	ordered pair	8·2
$A \times B$	笛卡兒乘積	Cartesian product	8·4
$\mathbb{R}^2$	笛卡兒平面	Cartesian plane	8·4

xRy	x 與 y 有 R 關係	x is R related to y	8.5, 8.8
$\text{dom } R$	R 的域	domain of R	8.6
$\text{ran } R$	R 的範圍	range of R	8.7
$S \circ R$	R 與 S 的合成關係	composite relation of R and S	8.9
$f: A \longrightarrow B$	f 乃由 A 至 B 之映像	f is a mapping of A into B	9.2
$f, g, h, \dots \alpha, \beta, \dots$	函數或映像	functions or mappings	9.2
fx	f 在 x 的值 (或像)	value (image) of f at x	9.2
$f = g$	函數 f 等於函數 g	the function f equals function g	9.9
f^{-1}	f 的反函數	inverse of f	9.15
j	恆同函數	identity function	10.1
abs	絕對值函數	absolute value function	10.3
$[\]$	最大整數函數	greatest integer function	10.5
sgn	正負號函數	signum function	10.6
$f + g$	函數 f 與 g 的相加	addition of functions f and g	11.1
$-f$	f 的負函數	negative function of f	11.2
$f - g$	函數 f 與 g 的差	difference between the functions f and g	11.3
$f \cdot g$	函數 f 與 g 的相乘	multiplication of functions f and g	11.4
$f \circ g$	f 與 g 的合成函數	f composition g	11.7

目 錄

FOREWARD

著者序

本書所用符號一覽表

0	預 章 (Preliminaries).....	1—3
第 一 篇	實數系 (The Real Number System)	5—65
1	數 軸 (The Number Line)	5
	習 題.....	9
2	代數公理 (Algebraic Axioms)	11
	習 題.....	24
3	不等式 (Inequalities)	28
	習 題.....	34
4	絕對值 (Absolute Values).....	37
	習 題.....	42
5	數學歸納法 (Mathematical Induction).....	44
	習 題.....	47
6	最小上界 (Least Upper Bound).....	51
	習 題.....	54
7	羣, 環, 體 (Groups, Rings, Fields)	57
	習 題.....	64
第 二 篇	映 像 (Mappings).....	67—113
8	關 係 (Relations)	67
	習 題.....	74
9	函數與映像 (Functions and Mappings).....	75
	習 題.....	89
10	幾種特別的函數 (Some Special Functions)	91
	習 題.....	99
11	函數的運算 (Operations on Functions)	100
	習 題.....	112
	英漢名詞對照表 (Index)	114—121



預 章 Preliminaries

在本章中要介紹一些邏輯與集的名詞與符號，並加以簡畧的解釋，俾讀者能更方便的閱讀本書。

0.1 命題(proposition) 命題是一個直述句，說出一件真的事實或不對的事，通常用 $p, q, r \dots$ 等字母代表。命題可以否定，或用一些邏輯的連結號連成一個新命題。若以 T, F 分別代表真與假，則這些新命題的真假值如下表。

p	q	合取 $p \wedge q$	析取 $p \vee q$	蘊涵 $p \implies q$	等價 $p \iff q$	否定 $\sim p$
T	T	T	T	T	T	F
T	F	F	T	F	F	F
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	F	T	T	T

0.2 量詞 (quantifier) 在本書中讀者將會遇到二種量詞, 一種是**全稱量詞** (universal quantifier) 另一種是**存在量詞** (existential quantifier)。

全稱量詞記作“ $\forall$ ”。通常的形式是:

$$\forall x, p(x)$$

前面一部分 $\forall x$, 讀作一切 x , (for all x)

後面一部分 $p(x)$ 乃是含有變量 x 的命題。

全個式子“ $\forall x, p(x)$ ”的意思是“對於一切 x 來說, $p(x)$ 爲真”

例如 $\forall x, x + 3 = 3 + x$, 意思是對於一切 x 來說, x 加 3 等於 3 加 x 。

在此例中, $p(x)$ 乃是 $x + 3 = 3 + x$ 。

存在量詞記作“ $\exists$ ”。全個式子爲

$$\exists x, p(x)$$

正如全稱量詞一樣, 此式子分作二部分, 前一部分 $\exists x$, 讀作有一些 x (for some x)

後一部分 $p(x)$ 代表含有 x 爲變量的命題。

全式 $\exists x, p(x)$ 的意思是“對於某些 x 來說, $p(x)$ 爲真。”

例如

$$\exists x, x + 5 = 3, \text{ 讀作對於某些 } x \text{ 來說, } x + 5 = 3,$$

在此題中, $p(x)$ 爲 $x + 5 = 3$,

0.3 集 (sets) 乃是一組事物的滙合, 以 $A, B, C \dots$ 等大楷字母表示。屬於集的事物稱爲**元素 (elements)**。 a 是集 A 的元素記作 $a \in A$; a 不是集 A 的元素記作 $a \notin A$ 。

通常有二種方法表示一個集:

(1) 把所有的元素列出, 寫在大括號 $\{ \quad \}$ 內, 每一元素用逗點“, ”分開。如

$$\{1, 2, a, 7, *\}$$

(2) 把集內元素之公共特性寫出, 其形式是

$$\{x \mid p(x)\}$$

即符合命題 p 的 x 的集, 如

$$\{x \mid x \text{ 是黑色且 } x \text{ 有三個輪的}\}$$

沒有元素的集稱為 **空集** (empty set), 以 $\emptyset$ 代表。

A 是 B 的 **子集** (subset) 記作 $A \subseteq B$ 乃指 $x \in A \implies x \in B$ 。

集 A 與集 B 相等記作 $A = B$ 乃是 $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$ 。

0.4 集的運算 (operations on sets) 集的運算有三種:

1. **併集** (union of sets), 記作 $A \cup B$

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$$

2. **交集** (intersection of sets), 記作 $A \cap B$

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$$

3. **差集** (difference of sets), A 與 B 的差集記作 $A - B$

$$A - B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$$

0.5 代入原理 (substitution principle), 若兩事物 a 與 b 相等, 則在任何情形下有 a 出現的地方均可以用 b 代替。例如

設

$$x + 3 = 8,$$

則

$$(x + 3) + (-2) = 8 + (-2) \quad (\text{以 } 8 \text{ 代替 } x + 3)$$

第一篇 實數系

數 軸 The Number Line

1.1 研究任何數學理論若能借助於圖解的話就會使一切的概念更明顯，所以在**集論** (set theory) 和幾何中我們都採用了不少的圖來協助解釋，在未給實數下一個正式的定義以前我們可以當作所有的**實數** (real numbers) 都是分佈在一條直線上的點。如圖 1.1

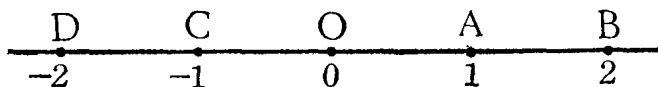


圖 1-1

直線上面的字母代表點，這些點可以和一些數目相對應，如圖中，O, A, B, C, D 分別與實數 0, 1, 2, -1, -2 相對應，像這樣的直線稱為**數軸** (the number line)

1.2 我們可以在數軸上任取一點 O 為起點，和 O 對應的數目是 0，由 O 向右為正，向左為負，假定我們選取一定的長為**單位** (unit)，在 O 的右方一單位處為 A，二單位處為 B。又在 O 的左方一單位為 C，二單位為 D。如圖 1-1 和 A, B, C 與 D 四點對應之數目為 1, 2, -1 與 -2，依照這方法一切整數都可以在數軸上找得其所對應的點。

1.3 在初等幾何中我們知道如何把一綫段分為任意等分，故我們可以將數軸中的單位長度等

分爲 n 分,這樣我們便可以在數軸上表示有 $\frac{m}{n}$ 形式的數目,如圖 1-2, G, E, 和 F 乃與 $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{3}$ 相對應, 用這方法一切能用 $\frac{m}{n}$ ($n \neq 0$, m 與 n 代表任何整數) 表示的數目都可以在數軸上取得對應點。

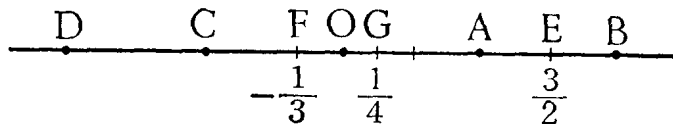


圖 1-2

到此爲止我們知道數軸最少包含下列各數:

- (1) **正整數** (positive integers) 或稱**自然數** (natural numbers) $1, 2, 3 \dots$ 。
- (2) **整數** 0
- (3) **負整數** (negative integers) $-1, -2, -3, \dots$
- (4) **能用分數** $\frac{m}{n}$ ($n \neq 0$) 表示的數。

其實(4)包括了(1),(2)與(3)各數,因爲一切整數 m 均可以寫成 $\frac{m}{1}$, 具有 $\frac{m}{n}$ 之形式。自然數, 負整數和零都是整數, 合起來稱爲 **整數集** (set of integers)。

1.4 能用分數 $\frac{m}{n}$ ($n \neq 0$) 表示的數稱爲 **有理數** (rational numbers)。整數既然可以寫成分數的形式, 所以整數是有理數的一種。我們稱這些數是有理數並不是說它們是合理的, 而其他的數是橫蠻不講理的。所謂有理數乃是能寫成分數形式的數。

1.5 假如實數只包括有理數的話, 這數軸不過是許多密集的點, 而不是連接起來的。雖然它們可以非常接近, 但每二點之間總有一個空隙 (gap) 使數軸成爲 **不連續** (discontinuous)。如圖 1-3 所示, 在 0 與 1 之間一部分的有理數所成的“數軸”乃是一些不連續的點:

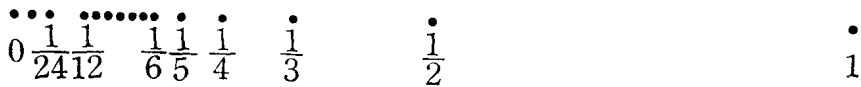


圖 1-3

不能用分數表示的呢，答案是有的，也就是說有理數以外是存在着其他實數的。下一段將舉出這些數的例子。

1.6 歐幾里得曾證明過

(*) 沒有一個有理數平方後等於 2

證明之步驟如下：

假定有一個有理數 $\frac{p}{q}$ 平方後等於 2，則結果是矛盾的。所以這假定不能成立，這樣便得着我們所要證明的。

$$\text{若 } \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2,$$

此處 p 與 q 均為整數而且 p, q 之間沒有公約數，（如果有公約數的話，可以用約分的方法約簡，故此設其沒有公約數是可以的）。

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$$

$$\iff \frac{p^2}{q^2} = 2 \iff p^2 = 2q^2$$

因此 p^2 必定是一個偶數則 p 也是一個偶數。（習題 1.4）

故可以有一個整數 p_1 存在使 $p = 2p_1$

這樣

$$p^2 = 2q^2 \quad \text{變成}$$

$$(2p_1)^2 = 2q^2 \quad \text{或}$$

$$2p_1^2 = q^2$$

用相同的理由可得 q^2 是偶數，進而 q 亦是偶數，既然 p 與 q 均為偶數則 p, q 之間有公因子 2，與假設不符，這矛盾證明了(*)是對的。

1.7 我們已證明有一數是不屬於**有理數集**(set of rational numbers)的，事實上這樣的數有無限多，這些不能用分數 $\frac{m}{n}$ ($n \neq 0$) 表示的實數叫作**無理數**(irrational numbers)如 $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, π 等都是無理數。