空间解析几何

黄宣国 编著

博学 · 数学系列

復旦大學出版社
www.fudanpress.com.cn

空间解析几何

黄宣国 编著

博学·数学系列

复旦大学出版社
www.fudanpress.com.cn

图书在版编目(CIP)数据

空间解析几何/黄宣国编著. —上海:复旦大学出版社,2004.7
(博学·数学系列)
ISBN 7-309-04012-0

Ⅰ.空… Ⅱ.黄… Ⅲ.空间几何:解析几何 Ⅳ.O182.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 040879 号

空间解析几何

黄宣国 编著

出版发行 复旦大学出版社
上海市国权路 579 号 邮编 200433
86-21-65118853(发行部) 86-21-65109143(邮购)
fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com

责任编辑 范仁梅
装帧设计 马晓霞
总 编 辑 高若海
出 品 人 贺圣遂

印 刷 上海第二教育学院印刷厂
开 本 787×960 1/16
印 张 11.75 插页 2
字 数 218 千
版 次 2004 年 7 月第一版第一次印刷
印 数 1—3 100

书 号 ISBN 7-309-04012-0/O·320
定 价 17.00 元

In celebration of

the 100th anniversary of Fudan University

(1905-2005)

献给复旦大学一百周年校庆

内容提要

本书是作者在复旦大学数学系主讲《空间解析几何》课程10余年的结晶，全书共3章，第一章，直线与平面；第二章，曲线与二次曲面；第三章，非欧几何，包括球面三角形、射影平面几何与双曲平面几何等内容. 书中许多定理和事实是重新证明过的，有些章节完全是作者自己编写的. 每章附有一定数量的习题，其中不少习题是复旦大学数学系《空间解析几何》课程的考题. 本书可作为综合大学数学系和应用数学系《空间解析几何》课程的教材，也可作为教师教学参考用书.

前　　言

从 1989 年起，我开始执教复旦大学数学系一年级新生的《空间解析几何》课程. 课时为每年一学期，每周 4 节课. 除了一个学期外，已历 14 个春秋. 从照本宣科、小增小减，到呈现在读者面前的这本教材，有一个漫长的编写、修改过程. 全书含 3 章。第一章直线与平面；第二章曲线与二次曲面；第三章非欧几何，包括球面三角形、射影平面几何与双曲平面几何等内容。对照其他教材，读者从书中会发现，许多定理和事实是重新证明过的，有些章节完全是作者自己编写的. 例如第二章 § 3 中关于二次曲面的分类；和本书最后一节双曲平面几何的内容，在手边只有几个结论的情况下，我花了一个多月时间，用射影平面几何的方法给出了双曲平面几何全部重要结论的严格证明. 在 2000 年下半年，终于印成讲义. 用该讲义我又在复旦大学数学系讲授了 4 个学期. 在讲课过程中，吸收了同学们的好建议，对讲义作了一些修改，并补充了一些习题，才将书送交出版社.

凭我多年的教学经验，每周 4 节课，一学期完全能将全书讲完。

安徒生说：科学“是一条光荣的荆棘路.”热爱数学的人们只有不避艰险，才有希望到达光辉的顶峰. 愿此话与读者共勉.

2004 年 2 月

目　　录

第一章　直 线 与 平 面

在 19 世纪 30 年代,复数广泛用于表示平面上的向量.向量的理论在整个 19 世纪和 20 世纪初叶得到了蓬勃的发展,形成了一个较完整的体系.现在,我们就通过短短一学期的学习,来浏览这一体系的最基本的内容,为以后学习和工作奠定一个基础.

§1.1 向 量 代 数

一、向量

在中学阶段,我们就知道,只有大小的量称为数量;而把既有大小,又有方向的量称为向量,而且向量的起点可以任意选取.即在欧氏空间内,所有方向相同、长度相等的有向线段表示同一个向量.例如图 1.1,当 $ABCD$ 是一个平行四边形时,则有

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC},\qquad \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}.\tag{1.1.1}$$

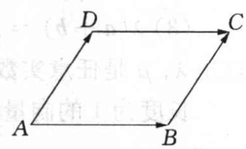

图 1.1

用有向线段$\overrightarrow{OA}$表示的向量有时记作 $\boldsymbol{a}$,它的长度记作$|\boldsymbol{a}|$.

与向量 $\boldsymbol{a}$ 长度相等,方向相反的向量,称为 $\boldsymbol{a}$ 的反向量,记作$-\boldsymbol{a}$.那么,可以看到

$$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB},\qquad -(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}.\tag{1.1.2}$$

我们规定零向量 $\mathbf{0}$ 是长度为零的向量.当点 A 与点 B 重合时,$\overrightarrow{AB}$表示零向量.

我们知道实数的加、减、乘、除有很多性质.例如,加法与乘法满足交换律.即 $a+b=b+a$, $ab=ba$,这里 a, b 是两个任意实数.类似地,对于向量,从中学时代就知道向量的加法与减法有以下一些性质:

(1) 设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$,则向量$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$;

(2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ (见图 1.2);

(3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ (见图 1.3);

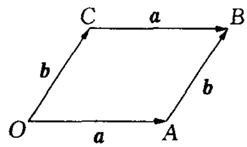

图 1.2

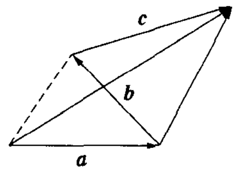

图 1.3

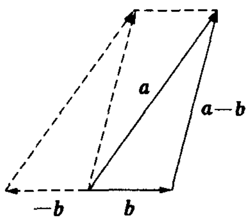

图 1.4

(4) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$;

(5) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$;

(6) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ (见图 1.4);

(7) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

从(2)～(6)可以知道,向量的加法与减法的基本运算规律,与实数的加法与减法完全一样.

二、实数乘向量

在中学里,我们还知道,实数 λ 乘向量 $\boldsymbol{a}$,得到一个向量 $\lambda\boldsymbol{a}$,它的长度 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$;当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同;当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 相反.

实数乘向量满足以下性质:

(1) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

(2) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;

(3) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

这里 λ, μ 是任意实数,$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 是任意向量.

长度为 1 的向量称为单位向量. 对于任一非零向量 $\boldsymbol{a}$,定义 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量是 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

如果一组向量,用同一起点的有向线段来表示时,它们是共线的(或共面的),则称这组向量共线(或共面). 共线的两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,又称为平行的向量,记为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 规定零向量与任何一个向量共线. 共线的向量必定共面,任意两个向量必定共面(注意向量的起点可以移动).

当 $\boldsymbol{a}$ 不是零向量时,显然与 $\boldsymbol{a}$ 共线的向量必可表示成 $\lambda\boldsymbol{a}$,这里 λ 是一个实数.

容易明白,两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是存在两个非零实数 λ 和 μ,使得

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}. \tag{1.1.3}$$

为方便,常任意选定平面或空间一点 O 作为公共起点,而将终点在 A,

B，…，X 等的向量分别记为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，…，$\boldsymbol{x}$ 等.

定理 1 (1) 设 A，B 为不同两点，则点 X 在直线 AB 上的充要条件是：存在唯一一对实数 λ_1，λ_2，使得

$$\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b},\qquad 且\ \lambda_1+\lambda_2=1,\tag{1.1.4}$$

这里向量的公共起点不在直线 AB 上. 特别地，点 X 落在线段 AB 上的充要条件是：存在唯一一对非负实数 λ_1，λ_2，使得(1.1.4)式成立.

(2) 设 A，B，C 为不在同一直线上的 3 点，则点 X 在 A，B，C 所决定的平面 π 上的充要条件是：存在唯一的一组实数 λ_1，λ_2，λ_3，使得

$$\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}+\lambda_3\boldsymbol{c},\qquad \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1,\tag{1.1.5}$$

这里向量的公共起点不在平面 π 上. 特别地，点 X 落在 $\triangle ABC$ 内的充要条件是：存在唯一的一组非负实数 λ_1，λ_2，λ_3，使得(1.1.5)式成立.

(3) 设 A，B，C，D 为不在同一平面上的 4 点，则点 X 在由 A，B，C，D 所决定的四面体内的充要条件是：存在一组非负实数 λ_1，λ_2，λ_3，λ_4，使得

$$\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}+\lambda_3\boldsymbol{c}+\lambda_4\boldsymbol{d},\qquad \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=1.\tag{1.1.6}$$

证明 (1) 由于

$$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a},\qquad \overrightarrow{AX}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a},\tag{1.1.7}$$

设点 X 落在直线 AB 上，$\overrightarrow{AX}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 共线(见图 1.5)，则存在实数 k，使得

$$\overrightarrow{AX}=k\overrightarrow{AB}.\tag{1.1.8}$$

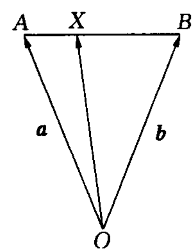

图 1.5

从(1.1.7)式和(1.1.8)式，有

$$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}=k(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}),$$

和

$$\boldsymbol{x}=(1-k)\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}.\tag{1.1.9}$$

令

$$\lambda_1=1-k,\qquad \lambda_2=k,\tag{1.1.10}$$

则 $\lambda_1+\lambda_2=1$. 从上面推导可以看出，当 A 和 B 给定时，直线 AB 上的点 X 由实数 k 唯一确定. 反之，从(1.1.9)式和(1.1.10)式，有(1.1.8)式，点 X 落在直线 AB 上. 当点 X 落在线段 AB 上，当且仅当上述 $k\in[0,1]$. 当点 X 在线段 AB 内部时，从(1.1.9)式可以知道 $\overrightarrow{AX}=\dfrac{k}{1-k}\overrightarrow{XB}$. 特别，当点 X 是线段 AB 的中点时，$k=\dfrac{1}{2}$. 这时 $\lambda_1=\lambda_2=\dfrac{1}{2}$. 由于向量的公共起点不在直线 AB 上，则向量 $\boldsymbol{a}$，

$\boldsymbol{b}$ 不平行. 从 $\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}=\mu_1\boldsymbol{a}+\mu_2\boldsymbol{b}$ 必能推出 $\lambda_1=\mu_1$, $\lambda_2=\mu_2$, 从而有唯一性. 这里, μ_1, μ_2 也是一对实数.

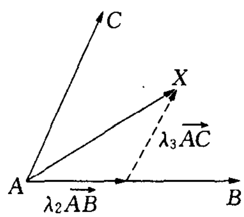

图 1.6

(2) 设点 X 落在平面 π 上, 即 $\overrightarrow{AX}$ 与 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ 共面, 如图 1.6 所示. 于是, 有实数 λ_2, λ_3, 使得

$$\overrightarrow{AX}=\lambda_2\overrightarrow{AB}+\lambda_3\overrightarrow{AC}. \tag{1.1.11}$$

那么

$$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}=\lambda_2(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})+\lambda_3(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}),$$

和

$$\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}+\lambda_3\boldsymbol{c}, \tag{1.1.12}$$

这里 $\lambda_1=1-\lambda_2-\lambda_3$.

当(1.1.12)式成立时, 必有(1.1.11)式, 则点 X 必落在 3 点 A, B, C 所决定的平面 π 内. 由于向量的公共起点不在平面 π 上, 则 3 个向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 不共面. 从 $\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}+\lambda_3\boldsymbol{c}=\mu_1\boldsymbol{a}+\mu_2\boldsymbol{b}+\mu_3\boldsymbol{c}$ 必能推出 $\lambda_1=\mu_1$, $\lambda_2=\mu_2$, $\lambda_3=\mu_3$, 这里 μ_1, μ_2, μ_3 也是一组实数, 从而平面 π 内的点 X 由唯一一组满足(1.1.12)式的 3 实数 λ_1, λ_2, λ_3 所决定.

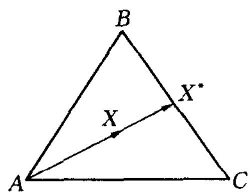

图 1.7

当点 X 落在△ABC 内时, 延长线段 AX 必交 BC 边于 X^*, 如图 1.7 所示, 则有非负实数 $k\in[0,1]$, 使得

$$\overrightarrow{AX}=k\overrightarrow{AX^*}, \tag{1.1.13}$$

从上式, 有

$$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}=k(\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{a})=k(\lambda_1^*\boldsymbol{b}+\lambda_2^*\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}), \tag{1.1.14}$$

这里 λ_1^*, λ_2^* 是满足 $\lambda_1^*+\lambda_2^*=1$ 的两个非负实数.

从(1.1.14)式, 有

$$\boldsymbol{x}=(1-k)\boldsymbol{a}+k\lambda_1^*\boldsymbol{b}+k\lambda_2^*\boldsymbol{c}. \tag{1.1.15}$$

记

$$\lambda_1=1-k,\qquad \lambda_2=k\lambda_1^*,\qquad \lambda_3=k\lambda_2^*, \tag{1.1.16}$$

则 λ_1, λ_2, λ_3 都是非负实数, 且满足

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1. \tag{1.1.17}$$

当(1.1.15)式～(1.1.17)式成立时, 必有(1.1.13)式和(1.1.14)式, 于是点 X 落在△ABC 内.

注 从上面的推导还可以看出，点 X 在 $\triangle ABC$ 内的充要条件是 $\overrightarrow{AX}=k\overrightarrow{AX^*}=k(\lambda_1\overrightarrow{AB}+\lambda_2\overrightarrow{AC})$（这里 λ_1，λ_2 是两个和为 1 的非负实数）$=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，这里 $\lambda=k\lambda_1\in[0,1]$，$\mu=k\lambda_2\in[0,1]$，$\lambda+\mu=k(\lambda_1+\lambda_2)=k\in[0,1]$.

(3) 如果点 X 落在四面体 $ABCD$ 内部，连接 AX 并延长至交平面 BCD 于点 X^*，且点 X^* 落在 $\triangle BCD$ 内，那么存在实数 $k\in[0,1]$，使得

$$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AX}=k\overrightarrow{AX^*}=k(\boldsymbol{x}^*-\boldsymbol{a}),\tag{1.1.18}$$

且利用(2)的结论(1.1.12)公式，有

$$\boldsymbol{x}^*=\lambda_2^*\boldsymbol{b}+\lambda_3^*\boldsymbol{c}+\lambda_4^*\boldsymbol{d},\tag{1.1.19}$$

这里 λ_2^*，λ_3^*，λ_4^*是 3 个非负实数，满足 $\lambda_2^*+\lambda_3^*+\lambda_4^*=1$.

从(1.1.18)式和(1.1.19)式，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}&=(1-k)\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{x}^*=(1-k)\boldsymbol{a}+k(\lambda_2^*\boldsymbol{b}+\lambda_3^*\boldsymbol{c}+\lambda_4^*\boldsymbol{d})\\&=\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}+\lambda_3\boldsymbol{c}+\lambda_4\boldsymbol{d},\end{aligned}\tag{1.1.20}$$

这里 $\lambda_1=1-k$，$\lambda_2=k\lambda_2^*$，$\lambda_3=k\lambda_3^*$，$\lambda_4=k\lambda_4^*$，

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=1,\tag{1.1.21}$$

λ_1，λ_2，λ_3，λ_4 都是非负实数. 当 A，B，C，D 4 点固定时，四面体 $ABCD$ 内一点 X 由满足(1.1.21)式的 4 个非负实数 λ_1，λ_2，λ_3，λ_4 确定，充分性显然. 下面举两个向量应用的例题.

例 1 (1) 如图 1.8 所示，在 $\triangle ABC$ 中，O 是外心，G 是重心，H 是垂心，求证：

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC});\ \overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC};$$

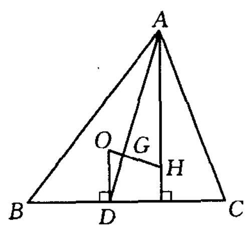

图 1.8

(2) $\triangle ABC$ 是一个锐角三角形，H 为垂心，弦 AB 分 $\triangle ABC$ 的外接圆圆周为 1 ∶ 2 的两段圆弧，点 N 是小圆弧$\overset{\frown}{AB}$的中点. 求证：$CN\perp OH$（见图 1.9）.

证明 (1) 设 D 是边 BC 的中点，利用平面几何知识知道

$$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD},\tag{1.1.22}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}\text{（利用(1.1.22)）}\\&=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)\text{（利用定理 1(1)证明的最后叙述）}\end{aligned}$$

$$=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+\frac{1}{3}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$$

$$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}). \tag{1.1.23}$$

注 这里 O 改为空间任意一点,(1.1.23)式仍然成立.

从平面几何知识知道,点 G 在线段 OH 上,且 $OG=\frac{1}{2}GH$,如图 1.8 所示.例如,当$\triangle ABC$是锐角三角形时,利用$\triangle AHG$与$\triangle DOG$相似,这里 G 是 AD 与 OH 的交点,以及 $OD=R\cos A=\frac{1}{2}AH$,这里 R 是$\triangle ABC$的外接圆半径;当$\triangle ABC$是钝角三角形时,例如设 A 为钝角,对应有 $OD=R\cos(\pi-A)=\frac{1}{2}AH$. 当角 A 是直角时,点 A 即垂心 H,斜边 BC 中点即外心 O. 于是,有

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OH}. \tag{1.1.24}$$

从(1.1.23)式和(1.1.24)式有结论(1).

(2) 由于$\triangle ABC$是锐角三角形,外心 O,垂心 H 都在$\triangle ABC$内部,因此

$$\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}. \tag{1.1.25}$$

这里利用了(1)的结论.

又

$$\angle AOB=\frac{2\pi}{3}, \tag{1.1.26}$$

且点 N 是小圆弧$\widehat{AB}$的中点,则

$$\angle AON=\angle BON=\frac{\pi}{3}, \tag{1.1.27}$$

因而$\triangle AON$与$\triangle BON$都是等边三角形. 四边形 $AOBN$ 是一个菱形. 于是

$$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CH}\ (\text{利用}(1.1.25)\text{式}). \tag{1.1.28}$$

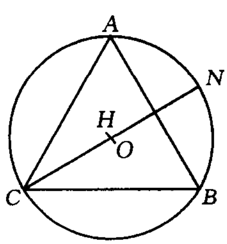

图 1.9

当两条直线 ON 与 CH 不重合时,$OCHN$ 是一个平行四边形. 又 $OC=ON$,则 $OCHN$ 也是一个菱形,对角线 CN 与 OH 互相垂直.

由(1.1.28)式,当点 C, O, H, N 4 点在同一条直线上时,CN 为直径,O, H 两点重合,结论仍然认为成立(这

里规定零向量垂直于任一向量).

例 2　$ABCD$ 是平面内一个凸四边形,BC 平行于 AD. M 是 CD 的中点,P 是 MA 的中点,Q 是 MB 的中点. 直线 DP 和 CQ 交于点 N.

求证:点 N 不在$\triangle ABM$ 的外部的充要条件是 $\frac{1}{3}\leqslant\frac{AD}{BC}\leqslant 3$.

证明　如图 1.10 所示,设点 M 为坐标原点,与 AD 平行的直线为 x 轴,建立直角坐标系. 于是点 M 的坐标为$(0,\ 0)$,设点 C 的坐标是$(a,\ b)$,这里 $b<0$. 点 D 的坐标为$(-a,\ -b)$. 记点 B 的坐标是$(c,\ b)$,点 A 的坐标为$(d,\ -b)$,则线段 MA 的中点 P 的坐标是 $\left(\frac{d}{2},\ -\frac{b}{2}\right)$,线段 MB 的中点 Q 的坐标是 $\left(\frac{c}{2},\ \frac{b}{2}\right)$. 直线 CQ 的方程是

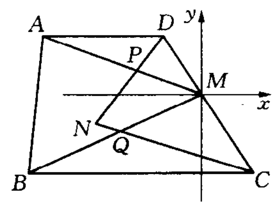

图 1.10

$$y-b=\frac{b}{2a-c}(x-a),\tag{1.1.29}$$

直线 DP 的方程是

$$y+b=\frac{b}{2a+d}(x+a).\tag{1.1.30}$$

解由(1.1.29)式和(1.1.30)式组成的联列方程组,可以求出点 N 的坐标为 $\left(\frac{2(c-a)(2a+d)}{c+d}-a,\ \frac{b(c-d-2a)}{c+d}\right)$. 记 x 轴的单位正向量为 $\boldsymbol{e}_1$, y 轴的单位正向量为 $\boldsymbol{e}_2$,则

$$\overrightarrow{MN}=\left[\frac{2(c-a)(2a+d)}{c+d}-a\right]\boldsymbol{e}_1+\frac{b(c-d-2a)}{c+d}\boldsymbol{e}_2,\tag{1.1.31}$$

$$\overrightarrow{MA}=d\boldsymbol{e}_1-b\boldsymbol{e}_2,\qquad \overrightarrow{MB}=c\boldsymbol{e}_1+b\boldsymbol{e}_2.\tag{1.1.32}$$

求实数 λ 和 μ,使得

$$\overrightarrow{MN}=\lambda\overrightarrow{MB}+\mu\overrightarrow{MA}.\tag{1.1.33}$$

由(1.1.31)式、(1.1.32)式和(1.1.33)式知道 λ, μ 满足下述方程组:

$$\begin{cases}\lambda c+\mu d=\dfrac{2(c-a)(2a+d)}{c+d}-a,\\[2ex] \lambda b-\mu b=\dfrac{b(c-d-2a)}{c+d}.\end{cases}\tag{1.1.34}$$

解上述方程组,得

$$\begin{cases}\lambda = \dfrac{(a+d)(3c-4a-d)}{(c+d)^2}, \\ \mu = \dfrac{(a-c)(c-4a-3d)}{(c+d)^2}.\end{cases} \tag{1.1.35}$$

由于

$$AD = -a-d, \qquad BC = a-c, \tag{1.1.36}$$

利用(1.1.35)式和(1.1.36)式,有

$$\begin{cases}\lambda = \dfrac{AD(3BC-AD)}{(AD+BC)^2}, \\ \mu = \dfrac{BC(3AD-BC)}{(AD+BC)^2}.\end{cases} \tag{1.1.37}$$

从上式,有

$$\lambda+\mu = \frac{6AD\cdot BC-(AD^2+BC^2)}{(AD+BC)^2}. \tag{1.1.38}$$

明显地,有

$$2AD\cdot BC \leqslant AD^2+BC^2,$$

$$4AD\cdot BC \leqslant (AD+BC)^2. \tag{1.1.39}$$

从(1.1.38)式和(1.1.39)式,有

$$\lambda+\mu \leqslant \frac{4AD\cdot BC}{(AD+BC)^2} \leqslant 1. \tag{1.1.40}$$

由定理1(2)的注,(1.1.37)式和(1.1.40)式,点 N 不在$\triangle ABM$ 的外部的充要条件是

$$3BC \geqslant AD, \quad 3AD \geqslant BC. \tag{1.1.41}$$

(1.1.41)式等价于

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{BC}{AD} \leqslant 3. \tag{1.1.42}$$

这就是结论.

三、内积

设 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量. 将这两个向量的起点平行移动到同一点 O. 向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 分别所在的两条直线有两个夹角,一个在$[0, \pi]$内,另一个在$(\pi, 2\pi]$内. 我们规定

两向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 之间的夹角$\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$是在$[0, \pi]$内的一个，那么$\angle(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

力 $\boldsymbol{F}$ 作用在位移 $\boldsymbol{S}$ 上，它所作的功记为 W. 从物理学知道，

$$W = |\boldsymbol{F}|\,|\boldsymbol{S}|\cos\angle(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{S}). \tag{1.1.43}$$

由此引入向量内积的定义.

定义 1　两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的内积定义为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}),$$

当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 中有一个零向量时，定义 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的内积是零.

特别要指出，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 是一个实数. 内积又称为数量积.

从上述定义立即可以看出内积具有如下性质.

内积的性质

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

(2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$，有 3 种可能：或 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$，或 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$，或 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 都不是零向量，但 $\boldsymbol{a}$ 垂直于 $\boldsymbol{b}$;

(3) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$;

(4) $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$，这里 λ 是一个任意实数.

定义非零向量 $\boldsymbol{a}$ 在非零向量 $\boldsymbol{b}$ 上的有向投影

$$\pi_b\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\cos\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}). \tag{1.1.44}$$

$\pi_b\boldsymbol{a}$ 是一个实数，从内积的定义和(1.1.44)式，有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\pi_b\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\pi_a\boldsymbol{b}. \tag{1.1.45}$$

对于向量的有向投影，有以下简单性质：

$$\pi_c(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \pi_c\boldsymbol{a} + \pi_c\boldsymbol{b}, \tag{1.1.46}$$

这里 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 都是非零向量(见图 1.11).

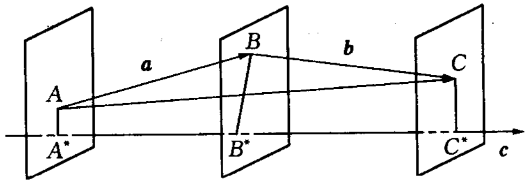

图 1.11

现在建立内积的另一性质.

(5) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

如果 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 中有一个是零向量时,性质(5)显然成立.下面考虑 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 都是非零向量情况.

从(1.1.45)式和(1.1.46)式,有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} &= |\boldsymbol{c}|\pi_c(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{c}|(\pi_c\boldsymbol{a}+\pi_c\boldsymbol{b})\\ &= |\boldsymbol{c}|\pi_c\boldsymbol{a} + |\boldsymbol{c}|\pi_c\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}.\end{aligned} \tag{1.1.47}$$

从内积的性质(4)和性质(5),立即可以看到

$$(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})+\mu(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}), \tag{1.1.48}$$

这里 λ, μ 是任意两个实数, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 是 3 个任意向量.

从内积的定义,还可以看到对于两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,有下列性质.

(6) $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|$. 等号只在 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 时成立(这里注意零向量与任一向量平行).性质(6)称为 Schwarz 不等式.

下面举两个内积应用的例题.

例 3 在$\triangle ABC$中,$\angle A$ 不是直角,O 是$\triangle ABC$ 的外心,H 是$\triangle ABC$ 的垂心.问:$\triangle ABC$ 要满足什么条件,才能使得 $AH = OA$?

解 设 R 是$\triangle ABC$ 的外接圆半径.如果 $AH = OA$,则

$$|\overrightarrow{AH}| = |\overrightarrow{OA}| = R, \tag{1.1.49}$$

即

$$|\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}| = R. \tag{1.1.50}$$

从上式及例 1 可以知道

$$|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}| = R, \tag{1.1.51}$$

那么,利用内积的性质(3)及(1.1.51)式,有

$$(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}) = R^2. \tag{1.1.52}$$

利用

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OB}|^2 = R^2,\quad \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OC} = |\overrightarrow{OC}|^2 = R^2, \tag{1.1.53}$$

有

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = -\frac{1}{2}R^2, \tag{1.1.54}$$

再由内积定义和向量$\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$长度皆为 R,有

$$R^2\cos\angle(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}) = -\frac{1}{2}R^2, \tag{1.1.55}$$