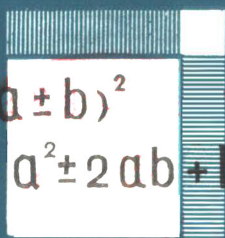
全日制十年制学校初中数学课本

代 数

DAISHU

第二册

人民教育出版社



$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

全日制十年制学校初中数学课本
（试 用 本）
代　数
第 二 册
人民教育出版社中小学数学编辑室
*
人民教育出版社出版
北京出版社重印
北京市新华书店发行
北京新华印刷厂印刷
*
1981年5月第1版　1983年1月第2次印刷
书号：K7012·0269　　定价：0.31元

说　明

这套《全日制十年制学校初中数学课本(试用本)代数》第一至四册和《全日制十年制学校初中数学课本(试用本)几何》第一、二册，是我们根据1980年10月教育部召开的中小学数学教材改革第二次座谈会时决定，将“中小学通用教材数学编写组”编写的《全日制十年制学校初中课本(试用本)数学》第一至六册分编而成的. 这次分编时，仅对原书中由于分编而引起的衔接问题在内容上作了一些调整，并对个别错误作了修改.

人民教育出版社中小学数学编辑室

1981年4月

目　录

第五章　二元一次方程组

5.1　二元一次方程

我们来看下面的问题:

已知两个数的和是 7, 求这两个数.

这个问题里有两个未知数, 如果设一个数是 x, 另一个数是 y, 那么根据题意, 可以列出方程:

$$x+y=7.$$

这个方程含有两个未知数, 并且含有未知数的项的次数都是 1, 这样的方程叫做二元一次方程.

当 $x=3, y=4$ 时, 方程 $x+y=7$ 左右两边的值相等, 我们就说 $x=3$, $y=4$ 是适合于(或满足)方程 $x+y=7$ 的. 能够适合于一个二元一次方程的一对未知数的值, 叫做这个二元一次方程的一个解. 如 $x=3$, $y=4$ 就是方程 $x+y=7$ 的一个解, 我们把它记作$\begin{cases} x=3, \\ y=4. \end{cases}$

要求二元一次方程 $x+y=7$ 的解, 可以把这个方程变形, 用含有 x 的代数式表示 y, 得

$$y=7-x.$$

在这个方程里, 如果 x 取一个值, 就可以求出与它对应的 y 的一个值. 例如,

取 $x=-1$, 可以得到 $y=8$;

取 $x=0$，　　可以得到 $y=7$；

取 $x=2.7$，可以得到 $y=4.3$；

取 $x=5$，　　可以得到 $y=2$；等等.

这样得到的每一对未知数的值都适合于方程$x+y=7$，所以它们都是这个方程的解.

在任何一个二元一次方程里，如果把其中一个未知数取任意一个值，都可求出与它对应的另一个未知数的值．因此，任何一个二元一次方程都有无数个解.

由二元一次方程的所有的解构成的一个集合，叫做二元一次方程的解的集合.

练　习

1．（口答）下列方程中，哪些是二元一次方程？哪些不是？为什么？

(1) $2x-3y=9$；　　(2) $x+1=6z$；

(3) $\frac{1}{x}+4=2y$；　　(4) $x-5=3y^2$.

2．（口答）在$\begin{cases}x=0,\\y=-2,\end{cases}$ $\begin{cases}x=2,\\y=-3,\end{cases}$ 及$\begin{cases}x=1,\\y=-5\end{cases}$ 各对数值中，

(1) 哪些是方程 $2x-y=7$ 的解？

(2) 哪些是方程 $x+2y=-4$ 的解？

3．在下列方程中，用含 x 的代数式表示 y：

(1) $2x+y=3$；　　(2) $3x-y=2$；

(3) $x+3y=0$；　　(4) $2x-3y+5=0$.

4．在方程 $3x+2y=12$ 中，设 $x=2、3、4、5$，分别求出对应的 y 的值.

5.2 二元一次方程组

我们再来看下面的问题:

甲乙两数的和是 7, 甲数比乙数大 3, 求甲乙两数.

这个问题, 除了可以设一个未知数列方程求解外, 还可以设两个未知数来解. 如果设甲数是 x, 乙数是 y, 那么就可以列出下面的两个方程:

$$x+y=7, \tag{1}$$

$$x-y=3. \tag{2}$$

上面的问题就是要求出既适合于方程(1), 又适合于方程(2)的 x 和 y 的值, 也就是要求出这两个方程的公共解.

$\begin{cases}x=0,\\y=7;\end{cases}$ $\begin{cases}x=2.7,\\y=4.3;\end{cases}$ $\begin{cases}x=5,\\y=2;\end{cases}$ ……都是方程(1)的解.

$\begin{cases}x=2.7,\\y=-0.3;\end{cases}$ $\begin{cases}x=5,\\y=2;\end{cases}$ $\begin{cases}x=8,\\y=5;\end{cases}$ ……都是方程(2)的解.

可以看出, $\begin{cases}x=5,\\y=2\end{cases}$ 既是方程(1)的一个解, 又是方程(2)的一个解. 我们就说 $\begin{cases}x=5,\\y=2\end{cases}$ 是这两个方程的公共解.

上面所说, 可以用下图表示:

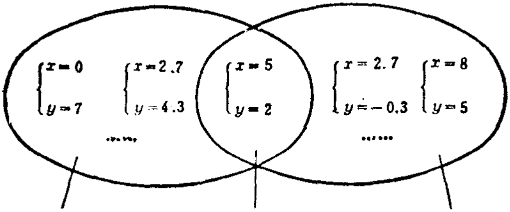


图 5-1

由几个方程组成的一组方程，叫做方程组. 由几个一次方程组成的、含有两个未知数的方程组，叫做二元一次方程组，例如，上面的方程(1)和(2)合在一起就组成一个二元一次方程组，记作$\begin{cases}x+y=7,\\x-y=3.\end{cases}$

方程组里各个方程的公共解，叫做这个方程组的解. 例如，上面所说的方程(1)和(2)的公共解$\begin{cases}x=5,\\y=2\end{cases}$就是方程组$\begin{cases}x+y=7,\\x-y=3\end{cases}$的解. 求方程组的解的过程，叫做解方程组.

本章中所说的二元一次方程组，都是指由两个一次方程所组成的二元一次方程组.

练　习

1. (口答)下列方程组中，哪些是二元一次方程组？哪些不是？为什么？

(1) $\begin{cases} x+3y=5, \\ 2x-\ \ y=3; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+3y=6, \\ x^2-y^2=8; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+3y=9, \\ y+\ \ z=7; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x+3y=5, \\ xy=2; \end{cases}$

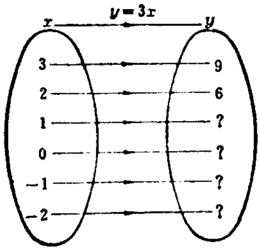
(5) $\begin{cases} x+3y=3, \\ \dfrac{x}{6}+\dfrac{2y}{3}=1; \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} x+3y=2, \\ \dfrac{6}{x}-2y=3. \end{cases}$

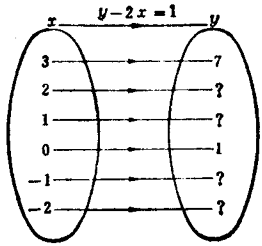
2. (口答)在 $\begin{cases} x=1, \\ y=-1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=2, \\ y=1; \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x=4, \\ y=5 \end{cases}$ 三对数值中,

(1) 哪一对数值是方程组 $\begin{cases} 2x-\ \ y=3, \\ 3x+4y=10 \end{cases}$ 的解?

(2) 哪一对数值是方程组 $\begin{cases} y=2x-3, \\ 4x-3y=1 \end{cases}$ 的解?

3. 求下列各图中的“?”:





(第3题)

并找出方程组 $\begin{cases} y=3x, \\ y-2x=1 \end{cases}$ 的解.

5.3 用代入法解二元一次方程组

我们来解方程组:

$$\begin{cases} y=2x, \\ x+y=3. \end{cases}$$

这就是要求这两个二元一次方程的公共解．如果这两个二元一次方程有公共解，那么两个方程里同一个未知数就应取相同的值．因此第二个方程中的 y 可用第一个方程中表示 y 的代数式 $2x$ 来代替．

$$y=\boxed{2x}, \tag{1}$$

$$x+y=3. \tag{2}$$

把(1)代入(2)，得 $x+2x=3$.

这样就消去了未知数 y，得到一个关于 x 的一元一次方程．解这个方程，得 $x=1$，把 $x=1$ 代入(1)，得 $y=2$．经过检验，得出方程组的解为$\begin{cases} x=1, \\ y=2. \end{cases}$

例1 解方程组:

$$\begin{cases} y=1-x, & (1) \\ 3x+2y=5. & (2) \end{cases}$$

解: 把(1)代入(2)，得

$$3x+2(1-x)=5,$$

$$3x+2-2x=5,$$

$$\therefore \quad x=3.$$

把 $x=3$ 代入(1)，得

$$y=-2.$$

$$\therefore \begin{cases} x=3, \\ y=-2. \end{cases}$$

要检验所得结果是不是原方程组的解，应把这对数值代入原方程组中的每一个方程进行检验.

检验: 把 $x=3, y=-2$ 代入方程(1), 得

$$左边=-2, \quad 右边=1-3=-2,$$

$$左边=右边.$$

再代入方程(2), 得

$$左边=3\times3+2\times(-2)=5, \quad 右边=5,$$

$$左边=右边.$$

$$\therefore \begin{cases} x=3, \\ y=-2 \end{cases} 是原方程组的解.$$

(检验一般可用口算, 不必写出, 以下同.)

例2 解方程组:

$$\begin{cases} 2x+5y=-21, & (1) \\ x+3y=8. & (2) \end{cases}$$

在这个方程组里, 先把方程(2)变形, 用含 y 的代数式表示 x, 然后再解.

解: 由(2), 得

$$x=8-3y. \qquad (3)$$

把(3)代入(1), 得

$$2(8-3y)+5y=-21,$$

$$16-6y+5y=-21,$$

$$-y=-37,$$

$$\therefore \quad y=37.$$

把 $y=37$ 代入(3)，得

$$x=8-3\times 37,$$

$$\therefore \quad x=-103.$$

$$\therefore \quad \begin{cases} x=-103, \\ y=37. \end{cases}$$

想一想，如果要先消去未知数 y，应当怎样做？

例 3 解方程组：

$$\begin{cases} 2x-7y=8, & (1) \\ 3x-8y-10=0. & (2) \end{cases}$$

解：由(1)，得

$$x=\frac{8+7y}{2}. \quad (3)$$

把(3)代入(2)，得

$$\frac{3(8+7y)}{2}-8y-10=0,$$

$$24+21y-16y-20=0,$$

$$5y=-4,$$

$$\therefore \quad y=-\frac{4}{5}.$$

把 $y=-\frac{4}{5}$ 代入(3)，得

$$x=\frac{8+7\times\left(-\frac{4}{5}\right)}{2},$$

$$\therefore\quad x=1\frac{1}{5}.$$

$$\therefore\quad \begin{cases} x=1\frac{1}{5}, \\ y=-\frac{4}{5}. \end{cases}$$

上面几个例题的解法都是先将方程组中的一个方程变形，用含有一个未知数的代数式表示另一个未知数，然后代入另一个方程中，这样就消去了一个未知数，使解二元一次方程组转化为解一元一次方程．这种解方程组的方法，叫做代入消元法，简称代入法．

练　习

用代入法解下列方程组，并写出检验(第 1～2 题)：

1. $\begin{cases} y=2x, \\ 7x-3y=1. \end{cases}$　　2. $\begin{cases} x+5z=6, \\ 3x-6z=4. \end{cases}$

用代入法解下列方程组(第 3～8 题)：

3. $\begin{cases} y=2x-3, \\ 3x+2y=8. \end{cases}$　　4. $\begin{cases} 6x-5y=-1, \\ x=\frac{2}{3}. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2s=3t, \\ 3s-2t=5. \end{cases}$　　6. $\begin{cases} 2x-z=5, \\ 3x+4z=2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x+3y=-1, \\ 4x-9y=8. \end{cases}$　　8. $\begin{cases} 3m-4n=7, \\ 9m-10n+25=0. \end{cases}$

5.4 用加减法解二元一次方程组

我们来解方程组:

$$\begin{cases} x+y=5, \\ 2x-y=4. \end{cases}$$

在这个方程组的两个方程中，未知数 y 的系数互为相反数，如果把这两个方程的两边分别相加，就可以消去 y，得到一个一元一次方程.

$$x \boxed{+y} = 5, \quad (1)$$

$$2x \boxed{-y} = 4. \quad (2)$$

(1)+(2)，得

$$3x=9. \quad (3)$$

由(3)，得 $x=3$. 把 $x=3$ 代入(1)，得 $y=2$. 经过检验，$\begin{cases} x=3, \\ y=2 \end{cases}$ 是原方程组的解.

例1 解方程组:

$$\begin{cases} 3x+7y=-20, & (1) \\ 3x-5y=16. & (2) \end{cases}$$

在这两个方程中，未知数 x 的系数相等，把方程(1)和(2)的两边分别相减，就可以消去 x.

解: (1)−(2)，得

$$12y=-36,$$

$$\therefore \quad y=-3.$$

把 $y=-3$ 代入(1)，得

$$3x+7\times(-3)=-20,$$

$$3x=1,$$

$$\therefore \quad x=\frac{1}{3}.$$

$$\therefore \quad \begin{cases} x=\frac{1}{3}, \\ y=-3. \end{cases}$$

例2 解方程组:

$$\begin{cases} 9u+2v=15, & (1) \\ 3u+4v=10. & (2) \end{cases}$$

在这两个方程中，同一个未知数的系数的绝对值都不相等，如果直接把这两个方程的两边分别相加或相减，都不能消去任何一个未知数. 但是我们可以把方程(1)的两边同乘以 2，就可使两个方程中的未知数 v 的系数相等，然后再把方程两边分别相减消去 v.

解: (1)×2, 得

$$18u+4v=30, \qquad (3)$$

(3)－(2), 得

$$15u=20,$$

$$\therefore \quad u=1\frac{1}{3}.$$

把$u=1\frac{1}{3}$代入(2), 得

$$3\times 1\frac{1}{3}+4v=10,$$

$$4v=6,$$

$$\therefore\quad v=1\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\ \begin{cases}u=1\frac{1}{3},\\ v=1\frac{1}{2}.\end{cases}$$

想一想：如果要先消去未知数 u，应当怎样做？

例 3 解方程组：

$$\begin{cases}3x+4y=16, & (1)\\ 5x-6y=33. & (2)\end{cases}$$

把方程(1)的两边同乘以 3，方程(2)的两边同乘以 2，就可使未知数 y 的系数绝对值相等，然后把方程两边分别相加消去 y.

解：(1)×3，得

$$9x+12y=48. \qquad (3)$$

(2)×2，得

$$10x-12y=66. \qquad (4)$$

(3)+(4)，得

$$19x=114,$$

$$\therefore\quad x=6.$$

把 $x=6$ 代入(1)，得

$$3\times6+4y=16,$$

$$4y=-2,$$

$$\therefore \quad y=-\frac{1}{2}.$$

$$\therefore \begin{cases} x=6, \\ y=-\frac{1}{2}. \end{cases}$$

上面几个例题的解法，都是把方程组中的一个方程或两个方程的两边分别乘以一个适当的数，使其中某一个未知数的系数的绝对值相等，然后通过把方程两边分别相加或相减，消去这个未知数，使解二元一次方程组转化为解一元一次方程. 这种解方程组的方法，叫做加减消元法，简称加减法.

例 4 解方程组:

$$\begin{cases} 2(x-150)=5(3y+50), & (1) \\ 10\% \cdot x+6\% \cdot y=8.5\% \times 800. & (2) \end{cases}$$

解: 把方程(1)、(2)分别化简，得

$$\begin{cases} 2x-15y=550, & (3) \\ 5x+\ \ 3y=3400. & (4) \end{cases}$$

(3)+(4)×5，得

$$27x=17550,$$

$$\therefore \quad x=650.$$

把 $x=650$ 代入(4)，得

$$5\times 650+3y=3400,$$

$$3y=150,$$