

# 共振式直线电机的 机电动力学 分析和优化设计

崔广渊 著

GONGZHENSHI ZHIXIAN DIANJI DE  
JIDIAN DONGLIXUE  
FENXI HE YOUHUA SHEJI

国家自然科学基金支持项目

# 共振式直线电机的 机电动力学分析和优化设计

崔广渊 著

中国科学技术大学出版社

2004·合肥

## 内 容 简 介

本书对拖动大振幅重负载振动机械的共振式电机这一新型电机在振动力学、电磁学、优化设计、系统总体功率因数以及自动控制等方面进行了比较详细的分析与研究,此研究课题获国家自然科学基金支持。

全书共8章,主要内容包括:双质体振动机械在机电共振状态下的力学分析;共振式直线电机初级模型的机电分析;共振式直线电机中级模型的机电分析;共振式直线电机高级模型的机电分析;电机参数的优化设计;共振式直线电机磁场和电磁力的有限元分析;忽略铁磁阻时直线电机高级模型的机电分析;共振式直线电机及其变流器的总体功率因数研究等。

本书可供从事振动机械和电磁振动机械设计和制造的科技人员使用,也可作高等院校相关、相近专业的本科生和研究生教材。

## 图 书 在 版 编 目 (CIP) 数据

共振式直线电机的机电动力学分析和优化设计/崔广渊著. — 合肥:中国科学技术大学出版社,2004.8

ISBN 7-312-01585-9

I . 共… II . 崔… III . ①直线电机-动力学分析 ②直线电机-最优设计 IV . TM359.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 074254 号

中国科学技术大学出版社出版发行  
(安徽省合肥市金寨路 96 号,230026)

中国科学技术大学印刷厂印刷  
全国新华书店经销

开本:850×1168/32 印张:5.875 字数:170 千  
2004 年 8 月第 1 版 2004 年 8 月第 1 次印刷  
印数:1—1000 册  
ISBN 7-312-01585-9/TM·15 定价:12.00 元

## 前　　言

本书是 59177290 号国家自然科学基金项目关于共振式直线电机的机电动力学分析和优化设计等有关成果的综合论述。

在很多情况下,振动是一种不必要的和有害的现象。但在有些场合,振动是有益的。例如,利用振动可有效地完成许多工艺过程,或用来提高某些机器的工作效率。最近四十多年来振动机械已经在矿山和冶金工厂、选煤厂、化工厂、发电厂、铸造厂、建筑工地、水泥厂以及粮食和食品加工厂中得到了广泛的应用。例如振动给料机、振动筛分机、振动离心脱水机、振动冷却机、振动球磨机、振动落砂机和振动成型机等。这些振动机械在工业的各个部门中已发挥了重要的作用。

国内外拖动振动机械的电机有两类:旋转电机和往复振荡的直线电机。往复振荡的直线电机与旋转电机相比,它的结构简单,能适应各种振动机械的工作特点,不需要中间传动机构将旋转运动转化为直线运动,故损耗较小,使用可靠、寿命长。这种直线电机一般工作在完全的机电共振状态或近似的机电共振状态(即供电频率——电磁激振力的频率,与振动机械的固有频率完全相等或近似相等),因此学术界称之为共振式直线电机,本书则简称为电机或直线电机。

上述直线电机又分为两类:第一类小振幅(双振幅小于 3.5mm)重负载(功率数百瓦至数千瓦),已被国内外大量使用于振动给料机等振动机械上,工业界称之为“电磁振动给料机”或“电振机”;第二类大振幅(双振幅 6mm 以上)轻负载(功率 0.25 瓦至几十瓦),在国外被用于制冷和压缩机上,被称为电磁线性马达压缩

机。由于这两类直线电机均不能满足多数振动机械既需要重负载又需要大振幅的工艺状态,因此多数振动机械只能用旋转电机来拖动。

对于上述直线电机进行改进使之既能拖动重负载、又能作大振幅运行,这一点相当困难。围绕这一难题,作者从 1985 年开始主要利用业余时间进行了 19 年的探索和研究。这期间得到了国家自然科学基金、原机械部教育司预演和开发基金以及河南科技大学(原洛阳工学院)科研基金等三级科学基金的资助,并有幸得到中国电工技术学会直线电机分专业委员会主任委员、西安交通大学电机专业博士导师陈世坤教授的精心指导和鼓励。

经过对共振式直线电机的运行原理、性能计算和设计方法的研究,研制完成了一台大振幅(双振幅近 9mm)、重负载(功率 400 瓦)的原理样机并进行了试验验证。经国家自然科学基金委员会电工学科指定专家对《共振式直线电机研制报告》(含实验报告和有关论文)进行评议,认为:试验证明各项技术指标大部分达到了预期的要求,证明所提出的理论分析和设计方法基本正确;旧式电振机双振幅一般只有 1.5~3.5mm,而本样机双振幅约 9mm,较前大大提高,具有较大的实用价值。

由于本样机变频器控制器的高成本造成设备的前期投资较高,限制了其推广和应用。随着科学技术发展带来变流控制设备的降价和工业可持续发展对技术改造的需求,本成果必将得到推广和应用。

本研究工作已经在国际电机会议和《电工技术学报》、《微特电机》和《电气自动化》等杂志发表 9 篇论文,其中两篇被 EI 摘录。本书在对上述研究成果进行整理加工的基础上,对共振式直线电机的分析和设计进行了综合论述。

作者衷心感谢陈世坤教授多年的指导和鼓励,感谢宋书中老师和沈瑞珠老师分别在电机自动控制和有限元分析方面的协作。

本书稿的计算机打印和图稿的绘制,由景丽娜和崔攀峰帮助完成,在此,亦表谢意。

由于作者的水平所限,恳切希望读者指出本书的错误和不当之处。(Tel:0379-4210095 Email:gyc194659@163.com)

崔广渊

2004年6月于河南科技大学

# 目 录

|  |               |
|--|---------------|
| 前言 .....                               | ( 1 )         |
| 绪论.....                                | ( 1 )         |
| <b>第 1 章 双质体振动机械在机电共振状态下的力学分析.....</b> | <b>( 7 )</b>  |
| <b>第 2 章 共振式直线电机初级模型的机电分析 .....</b>    | <b>( 14 )</b> |
| 2.1 电机的基本电磁关系.....                     | ( 14 )        |
| 2.2 电机稳态功率的计算.....                     | ( 19 )        |
| 2.3 绕组稳态电流有效值的计算.....                  | ( 22 )        |
| 2.4 电机初级模型优化设计的目标函数.....               | ( 26 )        |
| <b>第 3 章 共振式直线电机中级模型的机电分析 .....</b>    | <b>( 29 )</b> |
| 3.1 电机的磁路系统.....                       | ( 29 )        |
| 3.2 气隙磁通与电流的关系.....                    | ( 32 )        |
| 3.3 电流和电压的关系.....                      | ( 36 )        |
| 3.4 电磁力和电流有效值.....                     | ( 40 )        |
| 3.5 电机中级模型优化设计的目标函数.....               | ( 44 )        |
| <b>第 4 章 共振式直线电机高级模型的机电分析 .....</b>    | <b>( 47 )</b> |
| 4.1 铁芯端部扩张磁场形成的磁导分析.....               | ( 49 )        |
| 4.2 求解主磁通和磁压降的边值问题.....                | ( 51 )        |
| 4.3 边界磁通量与分布磁动势 $f$ 的关系 .....          | ( 57 )        |
| 4.4 电流和外施电压之间的关系.....                  | ( 62 )        |
| 4.5 电磁力与电压之间的关系.....                   | ( 73 )        |
| <b>第 5 章 电机参数的优化设计 .....</b>           | <b>( 79 )</b> |
| 5.1 多数模接续和多因素递增的优化算法.....              | ( 79 )        |
| 5.2 电机结构参数的计算.....                     | ( 80 )        |
| 5.3 电机高级模型优化设计的目标函数.....               | ( 83 )        |
| 5.4 显化参量逐次逼近算法.....                    | ( 85 )        |

|             |                                 |             |
|-------------|---------------------------------|-------------|
| 5.5         | 电机优化设计的程序框图                     | (87)        |
| 5.6         | 实验结果分析                          | (91)        |
| <b>第6章</b>  | <b>共振式直线电机电磁场与电磁力的有限元分析</b>     | … (93)      |
| 6.1         | 直线电机磁场的数值计算                     | (93)        |
| 6.2         | 直线电机电磁吸力特性的数值计算                 | (95)        |
| 6.3         | 实例计算分析                          | (97)        |
| <b>第7章</b>  | <b>忽略铁磁阻时共振式直线电机高级模型的机电分析</b>   | ..... (99)  |
| 7.1         | 求解主磁通和磁压降的边值问题                  | (99)        |
| 7.2         | 求磁通链与电流的关系                      | (101)       |
| 7.3         | 电流与电压的关系                        | (103)       |
| 7.4         | 电磁力的分析和推理                       | (104)       |
| 7.5         | 电机优化设计的目标函数                     | (105)       |
| <b>第8章</b>  | <b>共振式直线电机及其变流器的总体功率因数研究</b>    | ..... (110) |
| 8.1         | 直线电机的功率因数分析                     | (111)       |
| 8.2         | 变流器的视在功率传输比                     | (114)       |
| 8.3         | 电网侧总体功率因数分析                     | (119)       |
| 8.4         | 实验结果及结论                         | (120)       |
| <b>附录I</b>  | <b>共振式直线电机优化设计的源程序(BASIC语言)</b> | ..... (122) |
| 附1.1        | 电机中级模型优化设计的源程序                  | (122)       |
| 附1.2        | 电机高级模型优化设计的源程序                  | (135)       |
| <b>附录II</b> | <b>共振式直线电机微机控制系统</b>            | ..... (151) |
| 附2.1        | 共振式直线电机微机控制系统组成                 | (151)       |
| 附2.2        | 共振式直线电机微机控制系统的控制算法              | (158)       |
| 附2.3        | 共振式电机微机控制程序(8098单片机汇编语言<br>源程序) | (162)       |
| <b>参考文献</b> |                                 | ..... (178) |

## 绪 论

本书对拖动大振幅重负载振动机械的共振式直线电机这一新型电机在振动力学、电磁学、优化设计、系统总体功率因数以及自动控制等方面进行了较详细的分析与研究。

振动机械是利用振动原理来完成各种工艺过程的机械设备，已广泛应用于生产建设和日常生活，例如采矿、冶金、煤炭、化工、建筑、给料、输送、脱水、选分、振仓、筛分等。随着经济建设和科学的研究事业的发展，新用途的振动机械将会不断涌现，在各个部门的使用也将日益增多，并将发挥越来越重要的作用。

国内外拖动振动机械的电机有两类：旋转电机和往复振荡的直线电机（工业界称后者为电磁激振器），它们都存在一些缺点。旋转电机不但存在转动化平动的机械传动机构及其磨擦损耗，而且由于轴承部件在振动冲击下常常很快损坏（国产轴承寿命约一年，进口轴承寿命约三年但价格昂贵）、以致转子堵转烧坏电机绕组。往复振荡的直线电机又分为两类：第一类双振幅太小（小于3.5mm），第二类输出功率太小（0.25瓦至几十瓦），因此二者均不能满足多数用户对重负载（数百瓦至数千瓦以上）和大振幅（双振幅大于6mm）的工艺要求。以下把往复振荡的直线电机简称为直线电机或电机，工业界把此电机及其拖动的振动机械合称为电振机。

小振幅重负载的电振机已经有一百多年的历史，但直至20世纪70年代才形成一个独立的学科并得到显著发展<sup>[1~6]</sup>，这些机器被应用于冶金、建筑和矿山选矿等方面。大振幅轻负载（0.25瓦至几十瓦）往复振荡的直线电机也先后成功地运用于制冷与压缩

机上<sup>[8~13]</sup>。本研究拟通过对这两类直线电机的改进,来实现既能大振幅又能重负载的运行效果,从而能满足拖动如矿山振动机械这类设备的有关工艺要求,同时又没有旋转电机的机械传动装置以及其轴承的弊端。

由于单片微机控制器和现代电力电子技术的发展,可以设计合适的变流器与控制器,使之能够给直线电机提供任意波形的电压和电流,从而使直线电机输出合适波形的电磁力,并保证电机拖动系统处于机电共振运行状态,这些比较容易实现。类似的技术已于 20 世纪 80 年代在大振幅轻负载的制冷与压缩机上得到应用<sup>[8]</sup>,因此本项目的控制系统部分不是研究重点,其内容放于附录Ⅱ中给予阐述。

对于上述直线电机本身进行改进使之既能拖动重负载、又能作大振幅运行,这一点相当困难。围绕这一难题,本书作者从 1985 年开始主要利用业余时间进行了近 20 年的探索,得到一些初步的研究结果。已研制的实验样机功率近 400 瓦,双振幅近 9mm,直线电机从结构上看是一个 E 型电磁铁,它因工作于机电共振运行状态并拖动振动机械作往复式直线运动而取名“共振式直线电机”。它的外施电压是变流器提供的周期波,电压幅值和频率可由单片机进行调节,而单片机则接收振动位移传感器的输出信号。当它被用于拖动双质量振动机械时,总体样机原理如图0-1 所示。工程上之所以采用双质体结构,是为了减少传给地基的动应力,以避免巨大激振力对地基的破坏。以下对共振式直线电机的机电动力学分析和优化设计研究内容和研究解决方案作简要介绍,同时也说明了本书各章的内容及其先后的逻辑关系。

要设计大振幅和重负载的直线电机,必须分析有关的力学关系和电磁关系,因为力学关系是电磁关系的基础,所以必须首先分析有关的力学关系。又由于机电系统工作于完全共振状态下,因此又必须首先分析完全共振状态下双质体振动的力学规律。本书

第1章完成了这一工作。在估算阻尼系数和列写振动方程的基础上,用杜哈美积分法和振型叠加法求出了完全共振时双质体位移和电磁激振力之间的幅值关系和相位关系。本章用一个算例给出了量化的概念,共振比非共振时激振力可减少几十倍,振幅也可以达到工程要求,为电机的容量计算提供了力学基础。

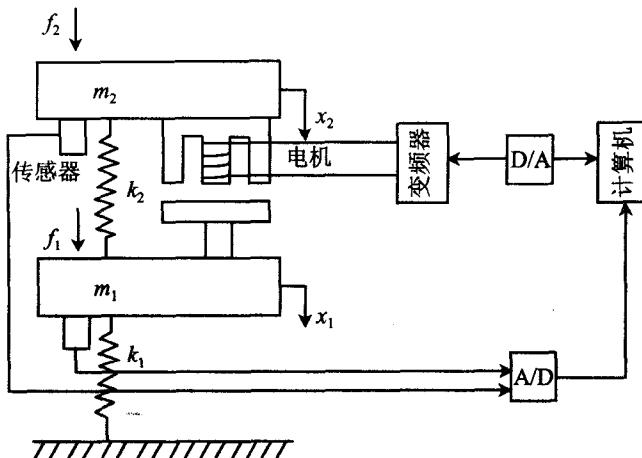


图 0-1 微机控制直线电机拖动双质体振动筛的系统示意图  
 $f_2, f_1$ —施加于上、下层筛的电磁激振力;  $k_2, k_1$ —弹簧刚度;  
 $m_2, m_1$ —上、下层筛质量;  $x_2, x_1$ —上、下层筛位移

旧式小振幅直线电机由于气隙小,漏磁与磁场扩张效应不明显,因此电磁关系比较简单,所以电机的机电分析和参数设计比较容易。大振幅直线电机运行中的大气隙动态交变磁阻,使电磁关系大大复杂化,因此分析推理过程烦琐,优化设计也比较困难。具体来说,在磁路分析中除考虑铁心磁极端部气隙中非扩张磁场形成的气隙主磁阻之外,还要考虑铁心端部扩张磁场效应,考虑铁心磁阻和窗口漏磁效应;在电路分析中除考虑电感压降之外还要考虑电阻压降,以上这些就是要设计大振幅直线电机必须同时考虑

的“电磁六因素”。

但是实践证明如果在优化设计的初始就把电磁六因素安排在同一个模型里，则由于无法设定合适的待寻优自变量的初始值，而使叠代计算过程一直振荡发散而不能得到收敛的结果。为解决单一模型优化设计不收敛的问题，电机的理论分析必须采用由简单到复杂的三级模型：磁路中只考虑气隙磁阻、电路中只考虑电感压降的双因素初级模型；磁路中增加窗口漏磁与铁磁阻的四因素中级模型；磁路中又增加磁极端部的扩张磁场效应、电路中增加电阻压降的六因素高级模型。这三个模型的理论分析已经分别在第2章、第3章和第4章中完成。此三章的分析思路基本相同：(1)由对应的磁场分布特性得到相应的磁路模型；(2)由磁路的苛希克夫定律列写并求解主磁通方程和磁压降方程，可得主磁通和绕组电流之间的解析关系表达式；(3)在时间域利用法拉第电磁感应定律，在空间域利用微元长度  $dx$  内的磁链表达式，可得未知电流和已知电压之间相互关系的微分方程，求解该方程可得到电流和电压之间的解析关系——指数函数和变上限积分相互多重嵌套的时域表达式；(4)利用磁路的欧姆定律和磁阻定律可以得到磁通和电压之间的解析关系；(5)利用虚位移原理或麦克斯威尔公式可求出电磁力和电压之间的解析关系；(6)在以上分析的基础上推理电机结构参量的表达式，并由此构造电机优化设计的目标函数。

由于初级模型电机的电磁关系简单，目标函数是自变量的显函数，所以叠代计算的优化过程很容易收敛而不是发散；中级模型的目标函数已经是自变量的隐函数，但是由于可以使用初级模型的优化结果构造合适的待寻优变量的初始值，从而使中级模型的优化过程不再发散而很快收敛；同理高级模型的优化设计由于使用了中级模型的优化结果构造合适的初始值，从而使高级模型的优化过程也较快收敛。这样电磁六因素在三级模型中递增出现，较好地解决了单一模型优化不收敛问题，这一寻优思路可称之为

“多数模接续和多因素递增优化算法”。

以上电机的力学关系和电磁关系的分析,为电机的优化设计提供了理论基础。

第5章介绍直线电机优化设计的内容。经推理把电机的各种结构参数和运行参数表示为三个待寻优自变量的函数,然后再把电机优化设计的目标函数表示为以上参数的函数。在具体的优化过程中除采用松弛变量法、拉格郎日乘子法和单纯形加速法等现有的计算方法之外,又构思了化隐函数为显函数的“显化参量法”,第5章对此方法有详细的介绍。

以上电机的设计中,虽然考虑了电磁六因素,但使用的仍然是磁路分析法,和真实的电机磁场相比较,仍然存在一定的误差。第6章用电磁场有限元法分析了这些误差。当误差未超出工程许可的范围时,上述设计结果可以使用;当误差偏大时,应该改造磁路模型,使之更接近真实的磁场分布,并在此基础上,按照前几章的顺序对电机重新进行分析和设计。

如果在电机的磁路系统中忽略铁心磁阻,则理论分析和优化设计的内容将得到简化,当电机的工作磁通密度较低时这种忽略和简化造成的误差并不大,第7章对这一模型的电机作了分析。

本研究的原理样机在试验中实际测出的变流器入端功率因数,和电机理论分析所得到的电机入端功率因数相差较多,经分析可知是因为变流器的视在功率传输比小于1所造成。为了获得有关的定量关系,本研究又以原理样机中可控硅组成的变流器为对象,分析了变流器的视在功率传输比和变流器与电机的总体功率因数,其结果为提高系统的总体功率因数提供了理论基础。这一研究内容将在第8章得到阐述。

本工作设计制作了专用的变流器和控制器,这一方面能使系统处于完全的机电共振运行状态(即供电频率或电磁激振力频率等于机械系统的固有频率)而不是旧式电振机的近共振运行状态,

同时又可以把增减板弹簧片数的机械调频(只能调至近共振运行)转化为单片微机的电气调频(可调至完全的共振运行),从而提高了力能指标(效率和功率因数),也简化了设备调试和维护的工作量。但是由于变频控制器的高成本造成设备的前期投资较高,限制了本成果的推广和应用。随着科学技术发展带来变流控制设备的降价和工业可持续发展对技术改造的需求,本成果必将得到推广和应用。变流控制的内容作为附录Ⅱ放于本书末尾,本书的附录Ⅰ是电机中级模型和高级模型优化设计的源程序。

# 第1章 双质体振动机械 在机电共振状态下的力学分析

这一章的内容将为共振式直线电机的电磁分析和优化设计提供力学基础。

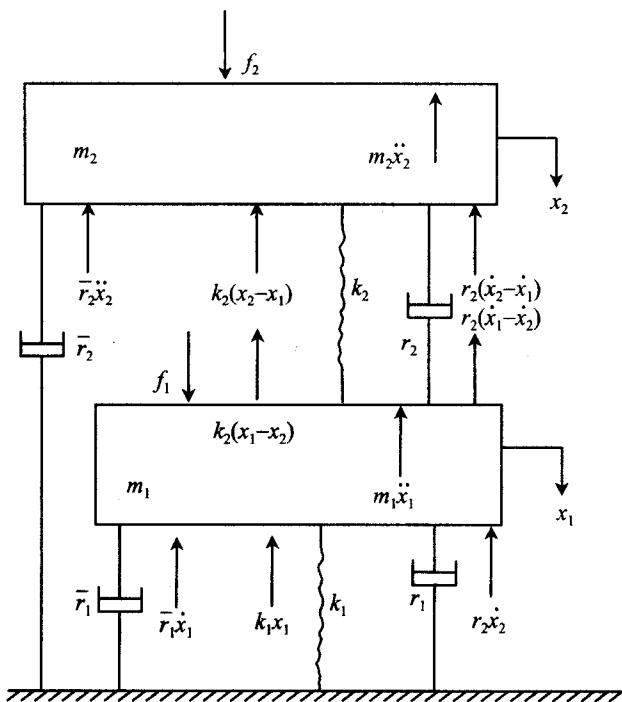


图 1-1 双质体振动筛力学模型图

图 1-1 为双质体振动筛的力学模型,  $f_1$ 、 $f_2$  分别为固定于两层振动筛上的两块电磁铁所产生的正弦激振力, 大小相等, 方向相

反，分别作用于二层筛子上。各参数意义及数值如下：

$m_1 = 10000\text{kg}$ , 下层筛质量。

$m_2 = 15556\text{kg}$ , 上层筛质量。

$\omega = 2\pi \times 12.5\text{rad/s} = 78.573981625\text{rad/s}$

是正弦电磁激振力的角频率。

$f_1 = -F_m \sin \omega t$ , 正弦电磁激振力, 作用于  $m_1$  上。

$f_2 = F_m \sin \omega t$ , 正弦电磁激振力, 作用于  $m_2$  上。

$\eta = (1-6) \times 10^{-4}$ , 钢材损耗系数, 本文取上限  $6 \times 10^{-4}$ 。

$k_1 = 280877984.3\text{N/m}$ , 下层筛与基础之间的弹簧刚度。

$k_2 = 170971119.3\text{N/m}$ , 上、下两层筛之间的弹簧刚度。

$r_1 = \frac{\eta}{\omega} k_1$ ,  $k_1$  结构阻尼的等效粘性阻尼系数。

$r_2 = \frac{\eta}{\omega} k_2$ ,  $k_2$  结构阻尼的等效粘性阻尼系数。

$x_1$  ——  $m_1$  偏离平衡位置的位移。

$x_2$  ——  $m_2$  偏离平衡位置的位移。

设上层筛物料最大值  $m = 1000\text{kg}$ , 振幅  $x_m = 8\text{mm}$ , 物料抛掷高度为  $2x_m$ , 下层筛物料的质量、振幅均减少一半, 则共振时抛掷物的能量(功  $W_e$ )折合的等效粘性阻尼系数为:

$$\bar{r} = \bar{r}_1 = \bar{r}_2 = \frac{mg \cdot 2x_m}{\pi \omega x_m^2} = \frac{2mg}{\pi \omega x_m} \approx 10000 \quad (\text{本文取 } 12000)$$

(1-1)

以上参数取值可使系统一阶固有频率  $P_1 = \omega$ , 见后文计算。考虑系统弹性力、惯性力、阻尼力, 则系统受力情况已如前图所示, 可得振动方程组:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + \bar{r}_1 \dot{x}_1 + r_1 x_1 + r_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) &= f_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 + \bar{r}_2 \dot{x}_2 + r_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 (x_2 - x_1) &= f_2 \end{aligned} \quad (1-2)$$

经整理化为:

$$m_1 \ddot{x}_1 + (r_1 + r_2 + \bar{r}_1) \dot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = f_1$$

$$m_2\ddot{x}_2 - r_2\dot{x}_1 + (r_2 + \bar{r}_2)\dot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 = f_2 \quad (1-3)$$

系统的质量矩阵  $M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$

激振力列振  $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} F_m \sin \omega t \quad (1-4)$

刚度矩阵  $K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \quad (1-5)$

阻尼矩阵

$$\begin{aligned} C &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 + r_2 + \bar{r}_1 & -r_2 \\ -r_2 & r_2 + \bar{r}_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\eta}{\omega} \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{r}_1 & 0 \\ 0 & -r_2 \end{bmatrix} = \frac{\eta}{\omega} K + \bar{r}_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1-6)$$

系统的无阻尼自由振动方程为：

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 = 0 \end{cases} \quad (1-7)$$

令  $a = \frac{k_1 + k_2}{m_1}, b = \frac{k_2}{m_1}, c = \frac{k_2}{m_2}, d = \frac{k_2 + k_3}{m_2}$

(1-7)式化为  $\begin{cases} \ddot{x}_1 + ax_1 - bx_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 - cx_1 + cx_2 = 0 \end{cases} \quad (1-8)$

设(1-8)式的解为  $x_1 = A_1 \sin(Pt + \phi)$

则  $\ddot{x}_1 = -A_1 P^2 \sin(Pt + \phi)$ , 代入(1-8)式得:

$$\begin{cases} (-A_1 P^2 + aA_1 - bA_2) \sin(Pt + \phi) = 0 \\ (-A_2 P^2 - cA_1 + cA_2) \sin(Pt + \phi) = 0 \end{cases} \quad (1-9)$$

得

$$\begin{cases} (a - P^2)A_1 - bA_2 = 0 \\ -cA_1 + (c - P^2)A_2 = 0 \end{cases} \quad (1-10)$$