一套适合家长辅导孩子、学生自学的书

时代教育

最新修订版

小学数学奥赛辅导丛书

小学数学奥赛解题方法大全

(下)

李晋渊　王峰　主编

小学数学奥赛研究组　审定

名师导航　名题精讲

自学辅导　举一反三

挑战奥赛　走向名校

机械工业出版社

CHINA MACHINE PRESS

小学数学奥赛辅导丛书

小学数学奥赛
解题方法大全
（下）

丛书主编　韩新生　王家银

编　　委　（按姓氏笔画排序）

王　秀　王　峰　王家银　左丽华　田朝光

刘华彬　刘晓波　李双平　李晋渊　李道军

杨　磊　沈勤龙　苏　静　陈龙清　陈自文

范科科　徐煌辉　曹继国　黄凤胜　董培吉

覃　岳　韩新生　靳　强　廖康强　潘淑丽

策　　划　蔡　晔

本书主编　李晋渊　王　峰

机械工业出版社

本书是由一批有丰富教学经验的专家、一线优秀教师，根据小学生学习、记忆、思维的规律，精心设计、编写的。本书主要针对小学数学奥赛中常用的解题技巧和特殊的数学问题，归纳、总结了具有代表性的基本解题方法。本书概括全面，角度新颖，将知识与方法融为一体，仔细研读、用心体会，必能打开思路，并能举一反三，不断提高解题能力和自学能力，进入数学奥赛的殿堂。

图书在版编目(CIP)数据

小学数学奥赛解题方法大全.下/李晋渊，王峰主编.
—3版.—北京：机械工业出版社，2004.5
(小学数学奥赛辅导丛书)
ISBN 7-111-10250-9
Ⅰ.小… Ⅱ.①李…②王… Ⅲ.数学课—小学
—解题 Ⅳ.G624.505

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第044610号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)
责任编辑：邝 鸥 版式设计：郑文斌
封面设计：鞠 杨 责任印制：李 妍
北京蓝海印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行
2004年6月第3版·第1次印刷
890mm×1240mm A5·8.625印张·284千字
定价：14.50元

写在前面的话

数学是思维的体操。大文豪雨果将数学誉为开启人类智慧的"钥匙"。古希腊哲学家柏拉图曾经在他的哲学学校门口张榜声明：不懂几何学的人不得入内。他认为，未经过数学训练的人，尤其是没有掌握严格的演绎推理方法的人，难以深入讨论他所开设的课程。在英国大学里的律师专业和美国西点军校，许多高深的数学课程都是学生的必修课。著名数学教育家米山国藏说过一段寓意深刻的话："学生们在初中或高中所学到的数学知识，在进入社会后，几乎没有什么机会应用，因而这种作为知识的数学，通常在出校门后不到一两年就忘记了，然而不管他们从事什么业务工作，那种铭刻于头脑中的数学精神和数学思想方法，却长期地在他们的生活和工作中发挥着重要的作用。"

可见，数学教育主要不在于培养数学家，而在于培养人的数学思想，通过开拓头脑中的数学空间，促进全面素质的提高和发展。

编写意图

数学奥赛，集中体现了素质教育思想，它脱胎于传统数学，以开放性、创造性的思维模式，吸引了无数渴望探索数学迷宫的孩子们。同时，数学奥赛又是传统数学教学有益的补充，可以起到激发兴趣、开拓思路、提高能力、扩展知识等多重作用。正因为如此，许多重点中学开设的实验班，以数学奥林匹克的水平测试作为录取新生的首要条件。但是学校的普通数学教学与数学奥赛的要求差距很大，老师、学生和家长迫切需要一本既能作为学生自学又可帮助家长指导孩子的辅导书。

基于以上想法，我们精心策划编著了这套《小学数学奥赛辅导丛书》，希望能为提高我国小学生的数学素质出一份力，为有志进入重点中学学习的孩子们提供一个有力的帮手。

编写特点

数学素质集中体现为数学解题能力，而数学解题能力的提高取

决于三个因素：牢固的基本数学知识、正确的思维方法和丰富的解题经验。本书紧扣数学奥赛主导思想，针对小学数学奥赛中常用的解题技巧，归纳总结了具有代表性的基本解题方法，将知识与方法融为一体，引导学生跳出常规的思维定式，打开思路，举一反三。通过发散思维训练和综合训练题，让学生边学边用，温故知新，不断提高解题能力，形成系统的数学思维。

编写力量

本套丛书以三年级为起点共分为六册，可供不同层次的读者选用。丛书的主编是特级教师韩新生和数学博士王家银。参加各分册编写的均为来自北京四中、北师大实验中学、人大附中、清华附中、北京八中、首都师大附中等著名中学的一线优秀教师。

修订说明

《小学数学奥赛辅导丛书》出版以来，得到了广大读者的好评。丛书的编写本着："立足于自学辅导，服务于初学者；从基础到奥数，逐步提高；讲、练有机结合，归纳、发散全面培训"这一指导思想。事实证明，我们的做法是正确的，是符合读者需要的。

事物在变化，时代在发展。随着中小学课程改革的推进，奥数的思维方法在中小学教材里逐渐凸现出来，数学奥赛作为惟一一项带有政府背景的全国性竞赛，受到了更加广泛的关注。

丛书的全体作者遵照与时俱进、更好的服务于读者的宗旨，经过充分的调研、讨论，对本丛书进行了全面修订，使之能第一时间体现教育改革的趋势，有效提高学生的数学思维能力。

此次修订，增加了经典例题和能力训练题的数量，增设了阶段评估测试A、B卷，答案讲解更加详细。

让数学学习不再枯燥乏味，让数学奥林匹克不再高深莫测，让数学成绩快速提高，让重点中学的大门为你敞开。细读本书让你眼睛一亮：奥赛数学原来没那么难！

丛书编委会

2004年5月

目　录

专题1 枚举法(二)

名师导航

有这么一类数学问题,当题中的部分条件出现的可能情况为有限个时,我们可以把这些可能情况一一列举出来,再根据另一部分条件进行验证,这种解题的思维方法叫做枚举法。

运用枚举法解题的关键是要在列举过程中,保证既不重复,也不遗漏。这时常常要对可能情况进行恰当的分类。而这种正确的分类也有助于暴露问题的本质,降低问题的难度。常用的分类方法有按数量的大小分类、按奇偶性分类等。

枚举法解题的一般步骤:

(1)列出问题的可能答案;

(2)逐一检验;

(3)找到正确答案。

经典例题

[例1] 有一类自然数,从第三个数字开始,每个数字都恰好是它前面两个数字之和,如257,1459等等,这类数共有________个。

分析与解答

先枚举最高位是1,且满足条件的数,共9个:

10112358 , 112358 , 12358
1347 , 1459 , 156
167 , 178 , 189

再看最高位是2且满足条件的数,共8个:

202246 , 21347 , 2246
2358 , 246 , 257
268 , 279

……

最高位是9且满足条件的数有1个：

909

所以，这类数共有 9+8+7+…+2+1=45 个。

[例2] 哥德巴赫猜想说：每个大于或等于6的偶数，都可以表示成两个素(质)数之和。问：168是哪两个两位数的质数之和，并且其中一个的个位数是1?

思路剖析

本题可从"其中一个的个位数是1"入手。对符合条件的两位数进行枚举，找到本题的答案。

解　答

要把168表示成两个两位数的质数之和，则这两个质数均大于68。满足大于68和个位是1这两个条件的两位数是：71、81、91，其中只有71是质数，所以另一个质数是 168-71=97。

故本题所求的两个两位数的质数分别是71、97。

[例3] 从两位的自然数中，每次取两个不同的数，要使这两个数的和是三位数，有多少种取法?

思路剖析

我们可以采用枚举的方法，按两位自然数由小到大的顺序逐个考虑，先从最小的两位自然数10想起，它与哪些两位数的和是三位数，直到最大的两位自然数99止，然后统计一下共有多少种。

10分别加90、91、…、98、99，其和是三位数，共有10种取法；

11分别加89、90、…、98、99，其和是三位数，共有11种取法；

……

49分别加51、52、…、98、99，其和是三位数，共有49种取法；

50分别加51、52、…、98、99，其和是三位数，共有49种取法；

51分别加52、53、…、98、99，其和是三位数，共有48种取法；

52分别加53、54、…、98、99，其和是三位数，共有47种取法；

……

97分别加98、99，其和是三位数，共有2种取法；

98与99之和是三位数，共有1种取法。

解 答

由上面的研究分析,可推得共有取法:

$$(10+11+\cdots+48+49)+(1+2+\cdots+48+49)$$
$$=(10+49)\times40\div2+(1+49)\times49\div2$$
$$=59\times20+25\times49$$
$$=2405$$

答:共有2405种取法。

[例4] 一个两位数被7除余1,如果交换它的十位数字与个位数字的位置,所得到的两位数被7除也余1,那么这样的两位数有多少个?都是几?

思路剖析

本题若使用枚举法解决,其关键是找出两位数的十位与个位的取值规律,从而确定枚举范围。

解 答

设所求的两位数为$\overline{ab}(a\geqslant b)$。

依题意有:$\overline{ab}=10a+b=7n+1$

$\overline{ba}=10b+a=7m+1$

(其中 m、n 均为自然数)

上述两式相减,有$9(a-b)=7(n-m)$,又$(n-m)$为整数,故可推出7整除$9(a-b)$。因为$(7,9)=1$,所以7整除$(a-b)$,又$(a-b)\leqslant9$,故可得出:$a-b=0$或$a-b=7$。

分类进行枚举,满足条件$a-b=0$的两位数有:11,22,33,44,55,66,77,88,99;满足条件$a-b=7$的两位数有:81,92;逐一检验,有22、99、92符合本题要求;

同样对$a<b$的情况进行考虑,显然只有29符合要求。

所以本题的解为22,29,92,99。

答:共有4个这样的两位数,分别是22,29,92,99。

[例5] 有这样的三位数,它除以11所得的余数等于它的三个数字的平方和,请求出这样的三位数有多少,分别是什么?

思路剖析

三位数共900个,属有限个数,可用枚举法。枚举时先对有关量进行

估计,缩小范围,减少计算量。

解　答

设这个三位数的百位、十位、个位的数字分别为 $x(x>0)$、y、z。显然,该数除以 11 所得的余数都不大于 10。

所以:$x^2+y^2+z^2\leqslant 10$

从而:$1\leqslant x\leqslant 3,0\leqslant y\leqslant 3,0\leqslant z\leqslant 3$。

有以下数符合条件:

100、101、102、103、110、111、112、120、121、122、130、200、201、202、211、212、220、221、300、301、310。

对上述数字进行逐一验证,有 101、100 两个数符合要求。

[例 6]　设有长度为 1,2、…、9 的线段各一条,现在要从这 9 条线段中选取若干条组成一个正方形,共有多少种不同的取法?这里规定当用 2 条或多条线段接成一条边时,除端点外,不许重叠;线段不能折。

思路剖析

本题属于一个组合问题,可用枚举法解决。先对正方形的边长进行适当分类,然后一一枚举。

解　答

因为$(1+2+3+\cdots+9)\div 4=\frac{45}{4}<12$

所以正方形的边长小于 12。

按边长分类枚举:

(1)边长为 11 则 $9+2=8+3=7+4=6+5$　得 1 种选法;

(2)边长为 10 则 $9+1=8+2=7+3=6+4$　得 1 种选法;

(3)边长为 9 则 $9=8+1=7+2=6+3=5+4$　经排列组合可得 5 种选法;

(4)边长为 8 则 $8=7+1=6+2=5+3$　得 1 种选法;

(5)边长为 7 则 $7=6+1=5+2=4+3$　得 1 种选法;

(6)边长$\leqslant 6$,无法选择。

答:不同的取法共有 $1+1+5+1+1=9$(种)。

[例 7]　有 3 张扑克牌,牌面数字都在 10 以内。把这 3 张牌洗好后,分别发给李强、张军、赵亮 3 人。每个人把自己的牌的数字记下后,再重新洗牌、发牌、记数,这样反复 3 次后,3 人各自记录的数字的和分别为 13、15、23。问:这 3 张牌的数字分别是多少?

思路剖析

本题乍一看无从下手，但我们可先从整体分析，由3人各自记录的数字和分别为“13、15、23”，可求出这3张牌的数字和，然后列出所有可能出现的牌面数字，再进行验证。

解　答

因为 $13+15+23=51$　（三人三次总和）

$51\div3=17$　（单次三人之和）

所以3张牌面数字之和是17。

可能的情况有以下15种：

①1、6、10　②1、7、9　③1、8、8　④2、5、10　⑤2、6、9　⑥2、7、8　⑦3、4、10　⑧3、5、9　⑨3、6、8　⑩3、7、7　⑪4、4、9　⑫4、5、8　⑬4、6、7　⑭5、5、7　⑮5、6、6

分别进行验证，只有⑧符合要求

即：$3+5-5=13$；$3+3+9=15$；$5+9+9=23$

所以这3张牌的数字分别是3、5、9。

点　津

枚举法是一种看上去很笨的方法，但在解答很多数学问题时很有效。运用枚举法解题的关键在于考虑好如何将整体进行分解，即注意分类的方法，必须适合于一一列举和研究。同时必须保证既不重复也无遗漏，另一方面，对于枚举的结果，应善于进行综合考察，分别加以验证，然后得出正确结论。

发散思维训练

1. 将长、宽、高分别为20厘米、18厘米、16厘米的长方体木块，削成一个最大的圆柱体，圆柱体的体积是多少？

2. 有甲、乙、丙、丁、戊五个足球代表队进行比赛，每个队都要和其他队赛一场，总共要赛多少场？

3. 甲、乙、丙、丁四位同学排成一排从左到右数，如果甲不排在第一个位置上，乙不排在第二个位置上，丙不排在第三个位置上，丁不排在第四个位置上，那么不同的排法共有______种。

4. 如图1所示，在高为35厘米的圆筒形管子的横截面上，最长直线

段为 20 厘米，求这个管子的体积。

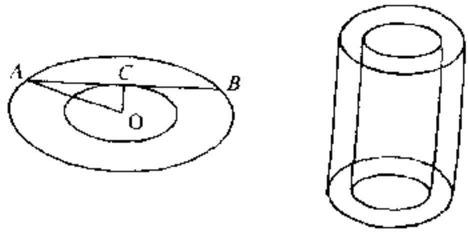

图 1

5. 有多少种方法可以把 6 表示为若干个自然数的和？

6. 把 70 表示为 11 个不同自然数的和，这样的方法一共有多少种？将不同的方法分别写出来。

7. 如图 2 所示，*ABCD* 是一个正方形，边长为 2 厘米，沿着图中线段从 *A* 到 *C* 的最短长度为 4 厘米，问这样的最短路线共有多少条？请一一画出来。

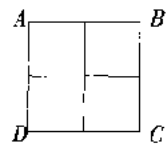

图 2

8. 12 枚硬币的总值是 1 元，其中只有 5 分和 1 角两种，问每种硬币各多少个？

专题2 图示法(二)

名师导航

在解答数学问题时,可以用图形把题中的数量关系具体化,使较复杂问题的数量关系简单化,从而悟出解题思路。这种运用直观图形来分析思考、求解的方法叫做图示法。其特点是直观、可靠、便于分析数量关系,同时不受逻辑推导限制,思路灵活开阔。

常用的图示有实物图、示意图、线段图三种。实物图图示法就是把题中的实物画成具体的图形,展示出题中数量关系,通过观察图形找出解题思路;示意图图示法是把题中数量关系用长方形、正方形、圆等示意图的形式来表示,通过观察,找出解题思路;线段图图示法是把题中数量关系用线段的形式表示出来,使题中较复杂的数量关系具体化、简单化,便于从中找出解题思路。

经典例题

[例 1] 一辆汽车往线路上运送电线杆,从出发地装车,每次拉 4 根,线路上每两根电线杆间距为 50 米,共运了两次,装卸结束后返回原地共 3 小时,其中装一次车用 30 分钟,卸一根电线杆用 5 分钟,汽车运行时的平均速度是每小时 24 千米,则从出发点到第一根电线杆的距离是______千米。

分析与解答

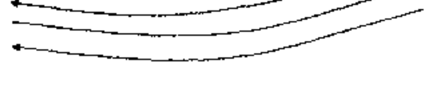

图 1

如图 1,汽车从 A 地(出发地)装上 4 根电线杆到达 B 地,卸下后返回 A 地,又装上 4 根开往 C 地,卸下后并返回 A 地。(每 50 米卸下一根。)

共用 3 小时,其中装车共用 $30\times2=60$ 分钟,卸电线杆用 $8\times5=40$ 分钟,所以汽车用于行驶的时间为 $3\times60-60-40=80$ 分钟($1\frac{1}{3}$小时)

可设从出发点到第一根电线杆的距离是 x 米远,则有方程:

$$4x+(50\times3+50\times7)\times2=24\times1\frac{1}{3}\times1000$$

解之得:$x=7750$ 米 $=7.75$ 千米

即从出发点到第一根电线杆的距离是 7.75 千米。

[例 2] 甲、乙、丙、丁与小强五位同学一起比赛打乒乓球,每两人都要打一盘,到现在为止,甲已经打了 4 盘,乙打了 3 盘,丙打了 2 盘,丁打了 1 盘,问小强已经打了多少盘?

思路剖析

本题看上去比较抽象,关系较复杂,可利用关系图进行分析,即用点表示对象,用连结点的线条表示对象间的某种关系。这样不仅直观、形象,而且能直接找到问题的答案。

解 答

我们将五个人看成五个"点" – 两人比赛过,就用线条连结相应的两点。根据"甲赛了 4 盘",可以画出图 2。

图 2

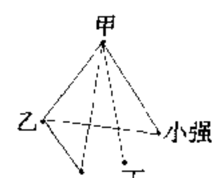

图 3

再依次根据"乙赛了 3 盘"、"丙赛了 2 盘"、"丁赛了 1 盘"等条件,得出图 3。

从图 3 可以直接看出:小强已经赛了 2 盘。

[例 3] 正三角形的边长增加$\frac{1}{3}$,面积增加了几分之几?

思路剖析

对这种相似多边形面积比的问题,可以借助图形思考。如图 4 所示,将已增加边长的正三角形的边长四等分,则该三角形可分摊 16 个同样大小的正三角形,观察图形,不难得出结论。

解 答

如图4所示,大正三角形由16个小正三角形构成,原正三角形由9个小正三角形构成,这些小正三角形面积均相等,所以可得出结论:

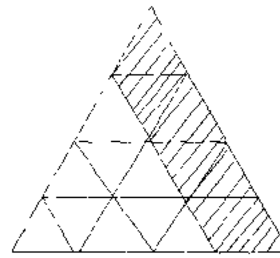
图4

正三角形的边长增加$\frac{1}{3}$后,面积增加了:

$$(16-9)\div 9=\frac{7}{9}$$

[例4] 计算$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}$

思路剖析

为解答本题,先构造一个面积为1平方单位的正方形,则该正方形的一半为$\frac{1}{2}$平方单位,正方形的$\frac{1}{4}$为$\frac{1}{4}$平方单位,依此,如图5所示。

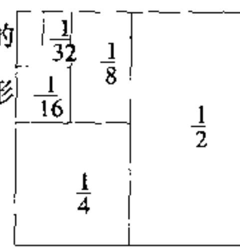

图5

解 答

由图5可知:

$$原式=1-\frac{1}{32}=\frac{31}{32}$$

[例5] 甲、乙、丙、丁四人共有60本书,如果甲的书增加4本,乙的书减少1本,丙的书增加4倍、丁的书减少一半,则四人的书一样多。这四人原来各有多少本书?

思路剖析

为使本题中条件更为直观,可用图6表示题意。

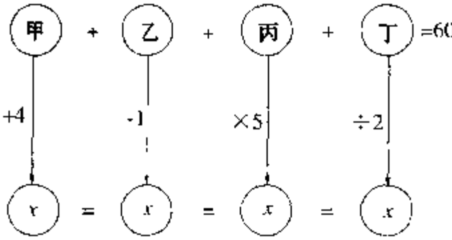

图6

由图6可以看出甲乙丙丁四人原有书数之间的关系，不难求出本题答案。

解　答

设变化后每人有书 x(本)，可得方程

$$(x-4)+(x+1)+\frac{x}{5}+2x=60$$

$$2x+\frac{x}{5}+2x=60+3$$

$$\frac{10x}{5}+\frac{x}{5}+\frac{10x}{5}=63$$

$$\frac{21x}{5}=63$$

$$x=15$$

所以，甲、乙、丙、丁原来各有书11本、16本、3本、30本。

[例6]　从2、3、5、7四张数字卡片中，任取三张排成三位数，能排成多少个不同的三位数？

思路剖析

解答本题，可先考虑百位上可以排哪些数字卡片，然后考虑十位、个位，这种依次考虑各种可能性的问题，可用树形图进行直观表示。

解　答

先考虑排好百位上的数字卡片；百位上的数字排好后，再考虑排好十位上的数字卡片；百位上的数字、十位上的数字都排好后，剩下的就是个位上的数字。树形图如图7所示。

由图7可知，从2、3、5、7四张卡片中任取三张排成三位数，可以排成24个不同的三位数。

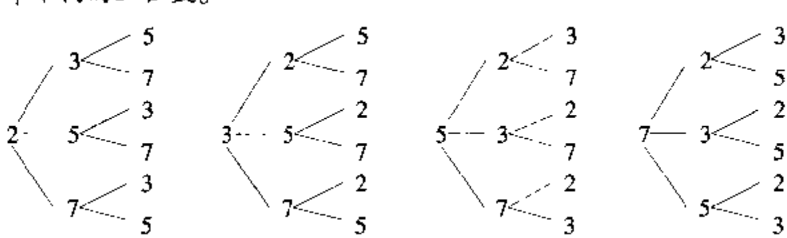

图7

[例7]　某修路队抢修一段公路，原计划36天可以完成任务，为了赶