大地測量学

上卷　第一分册

Ф. Н. 克拉索夫斯基
В. В. 達尼洛夫
著

測繪出版社

大地測量学 上卷第一分册

大地測量学

上卷 第一分冊

Ф. Н. 克拉索夫斯基
В. В. 达尼洛夫 著
朱裕栋 譯

前苏联人民委員会高等学校委員会
審定作为高等測量学校教科書

測繪出版社

1956·北京

本書係根据前苏联內务人民委員会測繪总局編輯出版局（Издание редбюро ГУГСК НКВД СССР（1938年于莫斯科出版的“大地測量学”（Руководство по высшей геодезии, ч. 1, Вып. 1）上卷第一分册上半本譯出。本書作者是苏联权威大地測量学家、斯大林獎金獲得者 Ф. Н. 克拉索夫斯基教授和 В. В. 达尼洛夫教授。經前苏联人民委員会高等学校委員会審定作为高等測量学校教科書。

本書上卷預計分成四册出版。第一分册包括：緒論，三角測量总論，三角測量中誤差的傳播，計划三角測量的基本問題，踏勘及选点造标，基綫網等等。

本書由朱裕栋同志翻譯，其中第一、二、三章由周江文同志校訂，其余各章由胡明城同志校訂，最后并經刘述文同志審査。

大地測量学　上卷　第一分册　190,000字

著　者	Ф. Н. 克拉索夫斯基
	В. В 达尼洛夫
譯　者	朱裕栋
出版者	測繪出版社
	北京市書刊出版業營業許可証出字第081号
發行者	新華書店
印刷者	天津人民印刷厂

印数（京）10,001-13,020册　一九五五年五月北京第一版
定价（10）1.35元　一九五六年七月第二次印刷
开本31"×43" 1/25　印張9 18/25

上卷第一分册

目　　錄

原　序

我所著的"大地測量學"卷一第一版於1925—1926年問世；換句話說，該書於1923—1924年寫完。當時原大地測量局剛開始發展基本大地測量工作，在蘇聯剛開始民用大地測量事業的活動。

十四年來，蘇聯基本測量工作達到了宏大的規模。一等三角系佈滿了平行圈60°以南的蘇聯全部歐洲部分；蘇聯的亞洲部分，在哈薩克及烏茲別克蘇維埃社會主義共和國內，在西伯利亞鐵道和我國邊境之間的地帶中——從烏拉爾至海參崴——都敷設了主要一等三角鎖。近年來，並準備從鄂霍次克海岸至白令海峽敷設一等三角鎖與美國北部三角鎖相連。

上述規模巨大的工作實質上是科學技術工作，伴隨而來的當然是它的方法及組織的改善。

由於測量部門工作人員的努力，以及突擊的和斯達哈諾夫式的工作方法，在這方面已得到很大的成就。

一九二九年，蘇聯成立了中央大地測量、航測、製圖科學研究院❶；一九三〇年起，原測量學院的大地測量系改爲有大地測量、航測、製圖專業的獨立高等學院；目前該學院已改名爲莫斯科大地測量、航測、製圖工程學院❷，在它的編制中共設四個系。當然，這兩個學院——中央大地測量、航測、製圖科學研究院及莫斯科大地、航測、製圖工程學院——的工作，也表現在佈置蘇聯的測量工作上。

着手著作本書之際，我們必須顧及上述近十四年來蘇聯測量工作方面的成就，這樣，重新修改1926年所出版的「大地測量學」卷一就極其重要。現在我們來舉出這些修改之處。三角測量中的差誤傳播一

❶ 以後簡稱中央測繪科學研究院

❷ 以後簡稱莫斯科測繪工程學院

章作了重大的修改與很多補充。此章不像過去所寫的，僅限於三角形各邊的誤差之計算，而且還包括了決定單三角形鎖及完全四邊形鎖之縱向移動與橫向移動的問題，雖然後者只給出了概略的結果。因此，對保證精密大地測量工作中之最重要的一方面（即計算由這些工作所得的成果之可靠性）提供了一切必需的資料。

另一方面，本書第三章"計劃三角測量的基本問題"是新補充的，此章列舉了由估計大地測量結果精度而得出的幾項原理，這一章將大地測量學教程與"基本大地測量工作的組織"教程合併起來，在莫斯科測繪工程學院，將後者作為一門獨立的課程學習。

第四章研討大地測量的踏勘問題。作者認為這一工作是保證大地測量之計劃及實施的必要準備。但這一工作，看來到目前為止運用於實際尚不够。本章更用新的方式談到基線及基線網的勘選問題。第四章也談到適應於西伯利亞及遠東區內基本測量工作之現代發展的深凍土區域之中心標石及其埋設的方法（運用中央測繪科學研究院的著作集）。

第五章［基線網］鑒於必須注意到基線網中角度觀測最適宜的權分配問題而根本改寫了，1930年以來蘇聯測量工作中已採用了這種分配方法。

"基線測量"一章也作了重要修改，首次在大地測量學教程中講到用光干涉法來測定原尺的長度及24公尺線狀基線尺的長度。這樣，本書就促進了在工作中運用新的精密測定長度法，而且此法用於實踐已完全成熟了。此外，對用耶德林基線尺測量基線問題，補充了關於殷鋼及殷鋼線狀尺之特性的資料，並敘述了若干個實際上不可忽視而過去却被忽視了的改正數之考慮。

第七章"測角儀器"詳述了威特經緯儀、巴爾克赫斯特經緯儀以及其他幾種外國新的儀器。其目的在介紹幾種新的外國儀器，以適應我國目前北部的基本測量工作中的需要與情況。

第八章"儀器誤差"中，將照準部的偏心差問題與度盤的偏心差聯

繫起來重新作了研究；這裏還列入了蓋凡林克的度盤分劃檢驗法。

第九章"水平角觀測"中，根據達尼洛夫教授的研究，以新的方式提出了全部問題，提供了高精度測角法在實質上之新的論據，並指出過去所採用的規則之某些錯誤。

因爲自1930年起，蘇聯採用了高斯——克呂格投影法，故本書新添第十一章，其中提供了於處理二等及低等三角系時所必要的有關這種投影之先決材料：在"大地測量學"第二卷，對高斯——克呂格投影法有更詳細的敘述。

過去，三角測量的平差計算，本來只是按條件觀測法平差自由網，但是在實際測量工作中，在大多數情況下，都是關係到非自由網，因而過去的教程有很大的缺點。此外，近年來測量工作中以大規模進行的大量補充網，採用了間接觀測平差法以及其他許多方法。根據這些原因，故本書內關於三角測量中之平差計算問題佔了很重要的地位，共有第十二、十三和第十四章。

第十二章主要是敘述測站平差問題，這裏講到基線網點上於最適宜的權分配下之觀測綱要的確定，以及該情況下之測站平差。在第十三章中，首先完全提出了根據高斯——克呂格坐標計算的自由網和非自由網中所產生的各種條件，其次再談到按條件觀測法平差自由網，隨後敘述克呂格二組平差法，及採用二組平差法來解決二等三角測量中一系列的平差問題。此章內尚談到博爾茲法，以及依佐多夫所創的此法之變形，以適用於一等鎖的平差，並述及阿涅爾法。第十四章談到間接觀測法的平差問題，以及單獨點的平差問題。

第十五章"精密導線測量"是過去所沒有的，現在本章詳述了用導線的方法及視差導線測量的方法來佈置普通的大地控制。

第十六章和十七章"關於精密水準測量及三角高程測量"作了一些修改。

可以推想到，關於基本三角測量、基本導線以及一、二等水準測量，本書詳述了測量與觀測的方法、儀器及其檢驗、結果精度的要

求、三角鎖部和導線之佈設方案、收集的資料之初步整理，以及平差計算的方法。當敘述觀測及測量的方法到一定程度時，必然涉及到作業組織的問題，當然，關於這一問題，在莫斯科測繪工程學院大地系四年級所學的專門教程"測量作業的組織"中有詳細的敘述。

必須說明，關於大地網的加密問題，以及關於為了純製圖的目的而在人口稀少的地區上所進行的簡單的三角測量和導線測量工作問題，在本書內未加論及。這一缺陷從 1939 年起，在莫斯科測繪工程學院大地系所講授的"製圖學"中之"關於製圖測量的外業工作"一章得以彌補。當然，這一章應該被列入大地測量學教程之內；但由於這裏常常涉及綜合地運用大地的、天文的甚至重力測量的資料的問題，因此，將此章列入大地測量學教程第二卷最為適宜；此外，編寫這一章，必須具有很多的數據與材料，但作者在寫作此章過程中却沒有這方面的足够材料。

毫無疑問，儘管本書所涉及的範圍較廣，它仍然還不能完全解決蘇聯近代大規模發展的測量工作中所有的問題，但我們認為，它還是能解決這些問題的主要部分的。

第六章"基線測量"、第九章"水平角觀測"和第十五章"精密導線測量"為達尼洛夫教授所寫；其餘十四章為克拉索夫斯基教授所寫。本書分兩卷出版。

博士·教授克拉索夫斯基

緒　論

§1. 大地測量學的目的

大地測量學的目的可分爲科學的和科學技術的兩方面。

大地測量學的主要科學目的，是研究地球形狀和地球的大小，這一目的通常又分爲兩類：（一）確定一個在整體上能表示地球形狀的某一典型幾何體之大小和形狀；（二）研究地球的實際形狀對於該典型幾何體之差異。

大地測量學的其他科學目的，是從測量成果與地球構造問題以及地球作爲行星之一而生存的問題相聯繫而產生出來的。闡明地殼的結構，雖然最主要地是直接屬於地質學和地球物理學的範圍，但其某些部分還屬於科學的大地測量學，而且某些科學研究的實踐還有賴於大地測量。地殼升降（週期的及長期的），大陸可能的變遷，海岸線的變動，海水面的變化以及地極移動等，所有這些由地球整個生存所引起的複雜現象，都影響着大地測量的成果。這些現象的研究，不但是地球物理學和地質學的範圍，同時在大地測量學以及與其密切關聯的實用天文學中也佔很重要的部分。

大地測量學的科學技術目的包括：（一）研究測量的方法，確定爲了構成國家總的天文大地網和局部大地網以及建立國家基本水準網所需用的儀器之類型；（二）確定有關建立國家基本天文大地網及水準網的科學工作組織；（三）處理有關構成天文大地網和水準控制網的觀測資料，以及推算大地控制點系的坐標和高程。

基本天文大地和水準測量工作以及一部分重力測量工作，其實施的方法和科學的組織是大地測量學的科學技術目的，這些工作的作用，在於正確地安排與順利地組織國家之總的地形測圖，在於編製精確的

地圖，以及在於奠立在廣大地區中爲了任何目的而進行的設計所依據之一切測量工作之基礎。這些基本天文大地測量工作的成果，無疑地是解決大地測量學的主要科學目的和上述其他科學目的之最重要的資料，因此，佈置這些工作，必須保證其成果在科學上利用之可能性。對於測量資料的實際需要，就是如何更方便地運用大地網的問題，而這又涉及到將地球橢圓體表面上的大地網展開（描繪）至某一球面、某一平面或許多平面上的特殊問題。它是一個數學問題，是根據測量的要求和最有效地利用測量成果的要求而求得解決的；它往往是一個和數學製圖學密切聯繫的大地測量學的問題。

當然，在大地測量事業中存在着許多實際問題和目的，本書內將詳細地敘述它們。此外，在基本大地測量工作組織教程內，也從有關方面作了說明。我們預先不加概述，但是很清楚，在廣大領域上佈置長達數千公里的現代大規模天文大地及水準控制網時，最精密的測量和觀測是一種獨特的工程上的問題，其中有它特有的探討部分，有它特有的設計和建造（從工程建築的藝術觀點來看即使是細小的）；其中在組織工作上以及克服地形和自然條件對於精密測量所給予的障礙方面，運用最新的技術成就也起着很大的作用。

§2. 弧度測量 總的地球橢圓體

大地測量學的主要科學目的，是根據所謂"弧度測量"和重力測量所供給的資料而解決的。

在大地測量學中，到處成水平的面，即其任一點上法線與該點鉛垂線方向相重合的面，叫做水準面。我們可以作出無窮多個這樣的面。大地測量學特別要研究的是接近於地球自然表面的水準面。假設取一相應於水在完全均衡狀態的海洋面，那麼，它就是水準面之一。再把這個面向大陸延伸，以使這一延伸面在任何位置都與鉛垂線方向相交成直角，那麼我們就得到一個連續不斷的、無叠痕和稜角的、閉合的水準面，這一水準面叫做基本水準面或理想的地球表面，也是大地測

量學中所要研究的表面。這一地球基本水準面又叫做大地水準面，被這個面所圍成的幾何形體叫做大地球體。

根據多年來觀測的結果，各海洋的平均海水面之高程各異，就是說它們不是屬於一個水準面，因而在確定大地水準面時，就有它的條件性和不定性。但是這裏所講到的差小於一公尺，而從幾何的觀點來看，這是無關重要的，因爲確定大地球體之總的大小甚至有數十公尺的誤差，而總的大地球體之確定迄今還未實現。當然，確定大地水準面的這一不定性，對於基本水準測量及地球物理方面有重大的意義。

假設我們將大陸鑿成很密的小運河網，它們相互溝通，並與海洋連接。這些運河應該非常狹窄，以使從其中挖出的土量很少，而這些土在地球表面上大約平均分配之後，在地表面的每一點上，其垂線方向的變化完全可以忽視。當然，這些狹小的運河中不應該有毛細管現象。那末就很明顯，通過這些運河之水面的表面就是大地水準面（仍假設海洋的水爲完全靜止）。

須注意者，大地水準面是水準面之一；重力則由地球吸引力與離心力兩部分組成。我們可以將大地水準面公式寫成次之形式：

$$V+U=c,$$

式中 V 是大地水準面上某點的引力勢，U 是該點上的離心力勢，c 是常數，它等於大地水準面上一點的重力勢或海洋面上一點的重力勢。因爲甚至於在離心力爲最大的赤道上，離心力之值爲地球引力的 1:288，因此，根據理論力學，運用衆所週知的關於地球近乎球形的原理，而且對地球內部的構造不作任何假定，那麼很容易證明大地球體應該最近似於兩極稍扁的橢圓體（所謂橢圓體，理解爲近似於球體的旋轉體），甚至可以用最簡單的一種橢圓體（即旋轉橢圓體）來表示，而能保持最佳的近似。大地測量的成果證明，這種橢圓體兩極的扁率約爲 1:297，而大地水準面與這個橢圓體之差，最大未必超過 100—150 公尺（幾乎是地球扁率的二次方）。

地球往昔是處在熾熱的流體狀態中，這一假說具有重要的論據。

當地球冷却的時候，吸引物質之分佈的變化主要應發生在地球外層，其所佔的物質較之地球的整個物質當然是微不足道的。因此，現在的大地水準面之形狀，應該是大體上接近於以一定的速度作均勻旋轉的流體之均衡形態，在此速度之下，離心力遠小於吸引力。由此可見，兩極稍扁的旋轉橢圓體可以採用作爲大地球體的一般形狀。大地水準面與旋轉橢圓體相差不大，研究這些差異，就使得研究地球形狀的問題，由第二趨近轉變到第三趨近。

設大地水準面爲旋轉橢圓體表面，我們現在研討下述決定其大小和形狀的方法。

設在圖1中，P和P_1爲地球的兩極，曲線PAE是平面APP_1（即A點的子午面）在地球橢圓體表面上的截線，0點爲橢圓體中心。曲線PAE是一橢圓，其短半軸PO等於極軸b，而長半軸OE是地球橢圓體的赤道半軸a。我們得：

$$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\text{地球橢圓體的偏心率。}$$

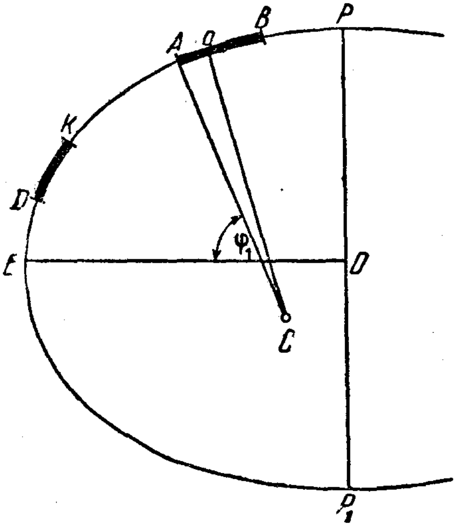

圖1

A點的垂線位於其子午面PAE中，它和PAE橢圓的法線AC重合。直線AC與長軸OE間的夾角φ_1，顯然等於A點的垂線與地球赤道面所夾的角；換句話說，φ_1就是A點的天文緯度。取橢圓PAE上無限接近於A的一點a，且其緯度爲$\varphi_1+d\varphi$；橢圓上A及a點的法線當然相交於Aa這一段子午線之曲率中心C上。很明顯，$AC=aC$即是Aa這一段子午線的曲率半徑M。以d

表 Aa 的弧長，寫成：

$$ds=Md\varphi.$$

以後將證明：

$$M=\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

故·

$$ds=\frac{a(1-e^2)\,d\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}},$$

假如在同一子午線 PAE 上的 B 點具有較大的北緯 φ_2，弧長 AB 等於 S_1，那末很明顯：

$$S_1=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}d\varphi.$$

積分此方程式，S_1 作爲積分的上、下限 φ_1 和 φ_2 與包含在被積分的函數中之參數 a 和 e 的已知函數 f 而求得之。換句話說：

$$S_1=f(\varphi_1,\varphi_2,a,e), \tag{1}$$

或如本書第二卷所示：

$$S_1=\frac{a(\varphi_2-\varphi_1)''}{\rho''}\left\{1-\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos(\varphi_1+\varphi_2)\right)e^2-\cdots\cdots\right\}^{❶} \tag{1'}$$

假如在同一或另外任一子午線上，我們取緯度爲 φ_3 和 φ_4 ($\varphi_4>\varphi_3$)的兩點 D 和 K，且 DK 的弧長爲 S_2，則同樣：

$$S_2=f(\varphi_3,\varphi_4,a,e)\cdots\cdots \tag{2}$$

$$S_2=\frac{a(\varphi_4-\varphi_3)''}{\rho''}\left\{1-\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos(\varphi_3+\varphi_4)\right)e^2-\cdots\cdots\right\} \tag{2'}$$

再設我們從天文觀測中精確地測定了緯度 φ_1，φ_2，φ_3 和 φ_4，並從大地測量中決定了子午線弧長 S_1 和 S_2，同時我們完全沒有利用任何有關地球橢圓體之大小和扁率的假定（例如從 A 點沿子午線向 B

❶ ρ'' 是弧度的秒數(206265″)。

點推進，安置測量儀器，直接在實地上量出弧長 AB)。那末從方程式(1)和(2)或(1′)和(2′)中，我們可得兩個未知數 a 和 e。很明顯，從這些方程式中解算出來的未知數 a 和 e，有不同的可靠程度，這種可靠程度取決於緯幅 $\varphi_2-\varphi_1$ 和 $\varphi_4-\varphi_3$ 之大小與弧的地理位置——$\varphi_1+\varphi_2$ 和 $\varphi_3+\varphi_4$。求出 a 和 e 之後，我們按下式計算橢圓體之短極軸 b:

$$b=a\sqrt{1-e^2}.$$

因此，已知位於不同緯度處的兩子午線弧長，以及其端點的天文緯度之後，我們可用上述方法決定出被認爲是旋轉橢圓體的地球之大小和極扁率。子午線弧長測量，與其兩端點之天文緯度測量相接合，叫做弧度測量。進行下列的探討之後，就可以理解這一名詞。我們首先寫出。

$$S_1=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi=M_m\frac{(\varphi_2-\varphi_1)''}{\rho''}. \tag{3}$$

根據拉格蘭日(Лагранж)定理，(3)式中的 M_m 是 A 和 B 間某一點上子午線橢圓 PAE 的曲率半徑。由於地球橢圓體近乎球體，在短弧 S_1 上（例如小於 300 公里），這一中間點的緯度 φ_m 可以採取等於

$$\varphi_m=\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2},$$

因此，(3)式可以具有充分精度地寫成:

$$M_m=\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi_m)^{\frac{3}{2}}},$$

$$S_1=\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi_m)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{(\varphi_2-\varphi_1)''}{\rho''}. \tag{4}$$

假設我們取方程式(4)中的 $\varphi_2-\varphi_1$ 等於 3600″ 或1°，那末 S_1 就是在中緯度 φ_m 處的子午線一度的弧長。

在地球上各處沿子午線求出一度的弧長之後，我們根據長度隨 φ_m 的變化，可以確定子午曲線的形狀；總之，有了子午曲線上許多

位置的一度弧長後，顯然，我們可求得該子午曲線上各個位置的半徑 M_m 之值，然後再充分精確地決定這一曲線的形狀與大小。

十八世紀中葉第一次着手科學地解決地球之橢性的問題時，正是以這一測定子午線一度弧長的思想爲基礎的：假如地球不是球形，而是一個兩極扁平的橢圓體，則緯度 70° 附近的子午線一度弧長應該大於巴黎之緯度的子午線一度弧長；而後者又應大於緯度近乎零的一度弧長。由公式(4)看出，在兩極扁平的旋轉橢圓體上，子午線 1° 弧長隨着 φ_m 的增加而不斷增加。

從以上所述，可知沿子午線的弧度測量是由兩部分組成的：一是天文測量部分，就是精密地測定弧的兩端點之天文緯度以及其上的方位角；另一是大地測量部分，就是精確地測量該弧的長度。現代所測量的子午弧，其長度達數百或數千公里。測定這種大弧的長度，顯然不能用直接丈量的方法；唯一可能測量其長度的方法，是由三角測量來推算弧長，就是從沿子午弧佈置的、且在其兩端之間的三角形鎖或其他圖形的鎖來推算弧長，同時不能否認在三角系的某些地方併入沿子午弧的高精密導線之可能性。

法國科學院首先於 1735 至 1752 年進行了弧度測量。

爲了最後證實牛頓關於地球是一個兩極扁平的橢圓體的理論（設地球開始處於熾熱的流體狀態中），法國科學院決定在兩個不同的地方測量子午線一度弧長，其中一處儘可能靠近北極，另一處靠近赤道。假如地球是一個兩極扁平的橢圓體，則北面的弧之一度弧長必大於靠近赤道的南弧之一度弧長。一弧愈靠近北極，而另一弧愈靠近赤道，則它們一度弧長的差異愈大，地球扁率對於弧長的影響亦愈顯明，因而從二弧長之比較而得的結果受測量誤差的影響也愈小。基於上述論據，1735 年巴黎科學院派遣了兩個天文大地測量隊進行弧度測量，一隊赴拉伯蘭，另一隊赴秘魯。拉伯蘭隊於緯度 65°50′50″ 和 66°48′20″ 間測量一子午弧，得緯度 66°19′ 處的一度弧長，其值爲 57 422 托茲（Toaз）。秘魯測量隊在緯度 0°2′30″ 與 3°4′30″ 之間測量

——子午弧，得出在平均緯度 1°36′ 附近處一度弧長，其值爲 56 748 托茲（托茲是法國的一種古老的長度單位，1 托茲＝1.9499 公尺。）。

本書第二卷"弧度測量"一章中，將詳述在祕魯和拉伯蘭的第一次弧度測量工作。

這裏應當指出，當時的測量技術極爲粗略，因此，祕魯和拉伯蘭隊的測量成果的意義，僅僅是毫無疑義地證實了地球兩極是扁平的這一點。另一方面，在十八世紀前半期，法國測量製圖家喀西尼曾作過一些三角測量，他利用這些結果沿巴黎子午線組成了兩個弧度測量：一個在法國的北部，另一個在法國的中部，在巴黎與第一弧的南端相接。由這兩個弧度測量所得的結果，位於北面的弧反較南面的弧短。當然，這裏充分表現出當時測量的誤差對於測定由兩相鄰小弧所推算的兩個一度弧長之微差的影響。當時社會上對決定地球形狀的科學大地測量工作的成果非常感到興趣，這可以從沃里傑爾（Вольтер）歡迎從祕魯及拉伯蘭歸來的學者們所作詩中看出，他一貫譏笑喀西尼的假科學，他說，"莫彼基(Мопертюи——科學院院士，當時拉伯蘭測量工作之領導者）既壓扁了地球，亦壓扁了喀西尼"。

弧度測量不但可以沿子午線進行，也可以沿平行圈進行。沿平行圈的弧度測量中之天文部分，是精確地測定弧的兩端之經差（也在這些點上測定緯度與方位角）；而大地測量部分則用三角測量來測定平行圈弧長。已知平行圈弧長 S_2、緯度 φ 及兩端點的天文經度之差 ω 以後，我們得出在旋轉橢圓體上表爲小圓的平行圈之半徑 r 爲：

$$r=\frac{S_2\cdot\rho''}{\omega''}.$$

但在本書第二卷中：

$$r=\frac{a\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}.$$

因而，沿平行圈弧度測量所給與的方程式可寫成：

$$S_2=\frac{a\cdot\omega''\cos\varphi}{\rho''\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}. \tag{5}$$