萬有文庫
第一集一千種
王雲五主編

自然哲學之數學原理

（六）

牛頓著
鄭太朴譯

商務印書館發行

萬有文庫

第一集一千種

總編纂者

王雲五

商務印書館發行

目　次

第三册

第四册

第五册

第六册

第七册

第八册

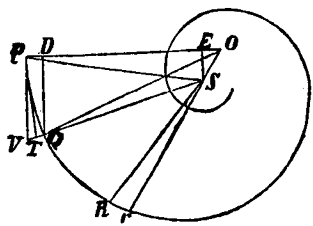
第九册

第十册

第四章 論物體在中介物內之循環運動

§20. 補題. 今設 $PQRr$ 為一螺旋線，其與一切半徑 $SP, SQ, SR,$ 等等之交角均相等。試作 PT 直線，與曲線相切於 P 點，與 SQ 之引長相交於 T. 又作垂線 PO, QO 相交於 O, 並引 SO 線。如是，則 P 與 Q 相接近而至於相合時，PSO 角即成為直角，而且最後，有

$$TQ \cdot 2PS = PQ^2.$$



第一六一圖

因

$$OPQ = OQR = 90°,$$

而

$$SPQ = SQR$$

故

$$\angle OPS = \angle OQS.$$

所以經過 O,S,P 三點的圓亦經過 Q 點.今如 P 與 Q 相合,則此圓即於相遇點與曲線相切,並與 OP 線垂直的相交.因此,OP 即爲此圓之直徑,而

$$OSP=90^\circ.$$

今再作 QD, SE 垂於 OP 上,則諸線之最後比成爲

$$TQ:PD=TS:PE=PS:PE=2PO:2PS,$$

又因

$$PD:PQ=PQ:2PO,$$

故經組合後

$$TQ:PQ=PQ:2PS,$$

或

$$PQ^2=TQ\cdot 2PS.$$

此即所欲證者.

§ 21. 定理. 設中介物各處之密度與該處距一不動的中心之距離成反比,向心力與密度之平方相比,則物體能在一螺旋線上運動,該線與一切由該中心出發的半徑,在一不變的角下相交.

今仍保存以上補題內的一切假定,將 SQ 引長至 V, 使

$$Sv = SP.$$

在相等的時間內，物體作成甚小的弧 PQ 與 QR. 由中介物之抵抗力所發生的弧之減小，或此項弧與同時間內在無抵抗的中介物中所作者之差，其相比如時間之平方相比（卽產生此的時間）. 所 PQ 弧之減小，等於 PR 弧之減小之 $\frac{1}{4}$. 今設

$$PSQ = QSr,$$

則 PQ 之減小

$$= \tfrac{1}{2} Rr,$$

故抵抗力與向心力相比，如

$$\tfrac{1}{2} Rr : TQ \quad (1).$$

因 P 點之向心力與 SP^2 成反比，TQ 則爲其所產生，與該力及時間之平方相比（即，與產生 PQ 弧的時間之平方相比），故 $TQ \cdot SP^2$ 與該項時間之平方相比，按 § 20, 亦卽是 $\frac{1}{2}PQ^2 \cdot SP$ 與時間之平方相比. 所以時間與

$$PQ\sqrt{SP} \quad (2)$$

相比，而物體在時間內用以作成 PQ 弧的速度與

$$\frac{PQ}{PQ\sqrt{SP}}=\frac{1}{\sqrt{SP}} \quad (3)$$

相比，亦即是，與距離 SP 之平方根成反比．仿此，亦可知物體作成 QR 弧的速度，與 SQ 之平方根成反比．但 PQ 與 QR 相比，如產生此的速度相比，故有

$$PQ:QR=\frac{1}{\sqrt{SP}}:\frac{1}{\sqrt{SQ}}$$

$$=QS:\sqrt{SP\cdot SQ} \quad (4).$$

又因 $$\angle SPQ=\angle SQr,$$

而 $$\text{面積 } PSQ=QSr,$$

故亦 $$PQ:QR=QS:SP \quad (5).$$

將(4)與(5)組合後，即得

$$PQ:Qr-QR=QS:PS-\sqrt{PS\cdot QS},$$

或 $$PQ:Rr=QS:\tfrac{1}{2}VQ \quad (6),$$

蓋當 P 與 Q 相合時，

$$SP-\sqrt{SP\cdot SQ}:\tfrac{1}{2}QV$$

成爲一相等的比．因中介物之抵抗力所產生的 PQ 之減小，即，$\frac{1}{2}Rr$ 與抵抗力及時間之平方相

比，故抵抗力與

$$\frac{Rr}{PQ^2\cdot SP}$$

相比．按(6)，可知

$$\frac{Rr}{PQ^2\cdot SP}\text{ 與 }\frac{\frac{1}{2}VQ}{SQ\cdot PQ\cdot SP}=\frac{\frac{1}{2}OS}{OP\cdot SP^2}\text{ 相比}\quad(7).$$

倘 P 與 Q 相合，則

$$SP=SQ,$$

$$\angle PVQ=90^\circ$$

又因　$\triangle PVQ\sim\triangle PSO,$

故　$PQ:\frac{1}{2}VQ=OP:\frac{1}{2}OS\quad(8).$

從可知 $\frac{OS}{OP\cdot PS^2}$ 與抵抗力相比，而抵抗力則亦與 P 處中介物之密度及速度之平方相比．今如由(7)內之式上取去 $\frac{1}{SP}$，則即可知 P 點之中介物密度與

$$\frac{OS}{OP\cdot SP}\quad(9)$$

相比．倘螺旋線爲已知，則即可求

$$OS:OP,$$

而 P 點之密度與

$$\frac{1}{SP} \quad (10)$$

相比.所以中介物之密度如與 SP 成反比,則物體即可在螺旋曲線上運動.此即所欲證者.

系 1. 任何處 P 之速度,恆爲物體於無抵抗的中介物內在圓上運動時所能有的速度; 此圓之半徑爲 SP, 其向心力亦同前.

系 2. 倘距離 SP 爲已知,則中介物之密度與

$$\frac{OS}{OP}$$

相比.設距離爲未知,則密度與

$$\frac{OS}{OP \cdot PS}$$

相比。

由此可知螺旋線於任何密度均可適應。

系 3. 任何處 P 之抵抗力與該處之向心力相比,如 $\frac{1}{2}OS : OP$.

蓋該項力與

$$\tfrac{1}{2}Rr = \frac{\frac{1}{4}VQ \cdot PQ}{QS} \text{ 及 } TQ = \frac{\frac{1}{2}PQ^2}{PS}$$

相比，所以其相比，如(設 $QS=PS$)

$$\tfrac{1}{2}VQ:PQ \text{ 或如 } \tfrac{1}{2}OS:OP.$$

故如螺旋線爲已知，則抵抗力與向心力之力亦卽可知；反之，由已知的抵抗力與向心力之比，亦可求得螺旋線。

系 4. 所以，祇當抵抗力小於向心力之半時，物體乃能在螺旋線上運動．倘抵抗力等於向心力之半，則螺旋線與直線相合，即與 PS 相合，物體於其上向中心運動，其速度與一其他(物體在無抵抗的中介物內於拋物線上運動時所有的)速度相比，如

$$1:\sqrt{2}.$$

所以下降的時間與速度成反比，因而爲不變的．

系 5. 因離心相等的距離內，螺旋線及直線 SP 上之速度相等，又因螺旋之長與直線之長相比，其數恆爲

$$OP:OS,$$

故螺旋線上下降與直線上下降之時間相比，其數亦爲常數．所以前者爲常數．

系 6. 倘以 S 爲中心，以二已知的半徑作圓，螺

旋線與 PS 半徑所作的角可任意改變,則物體在二圓間所可經過的環繞數,其比如

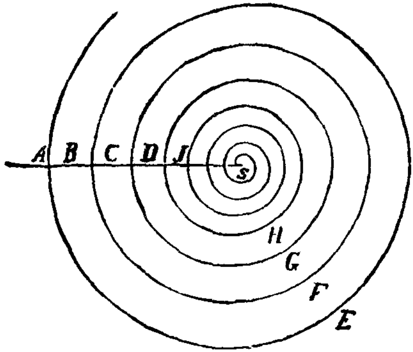
$$PS : OS,$$

或與角之正切相比,此角亦即為螺旋線與 PS 半徑所作者.但環繞的時間,則其比如

$$OP : OS,$$

即是,與該角之正割相比,或與中介物之密度成為反比。

<u>系 7.</u> 一物體在一中介物內於一任意的曲線 AEB 上繞一中心運動,其與 AS 半徑在 B 處之交



第一六二圖

角等於 A 處之交角，中介物之密度則與離心之距離成反比．B 點之速度與 A 點者相比，如

$$\sqrt{AS} : \sqrt{BS}.$$

如是則物體不斷的經過無數環繞 BFC, CGD 等等，其在 AS 半徑上所割之段，

$$AS,\ BS,\ CS,\ DS,\ 等等,$$

成爲一連比．其環繞時間與軌道之周

$$AEB,\ BFC,\ CGD\ 等等,$$

成爲正比，與各開始點

$$A,\ B,\ C,\ 等等$$

之速度成反比，卽，與

$$AS^{\frac{3}{2}},\ BS^{\frac{3}{2}},\ CS^{\frac{3}{2}},\ 等等$$

成反比．又，物體達到中心所須的時間與第一環繞之時間相比，如

$$AS^{\frac{3}{2}}+BS^{\frac{3}{2}}+CS^{\frac{3}{2}}+\cdots\cdots : AS^{\frac{3}{2}},$$

卽是，如

$$AS^{\frac{3}{2}} : AS^{\frac{3}{2}}-BS^{\frac{3}{2}},$$

或，很相近的如

$$\frac{2}{3}AS : AB.$$

由此，即不難推得該全部時間。

系 8. 由此，我們亦可推至物體在任何中介物內之運動，此項中介物之密度或則爲整齊的或則服從某種已知定律。

我們可以 S 爲中心，以(成爲連比的段) AS, BS, CS, 等等作半徑，作若干圓，並假定在以上的中介物內，任何二圓間之環繞時間，與在此處所新有的中介物內該二圓間之環繞時間相比，很接近的如此處二圓間新中介物之平均密度與原來中介物之平均密度相比．上所述的螺旋線在原來之中介物內與 AS 相交的角，其正割與新中介物內同角之正割相比，亦爲以上之率．又，我們並可假定該二圓間之環繞匝數，與該項角之正切很近似的相比．倘任何二圓間有此關係，則一切圓間之運動均可如是推之。

物體在有規則的中介物內如何乃能運動以及其時間若何，我們均不難如是設想之。