$A^TAX = A^TY \Rightarrow X = (A^TA)A^TY$

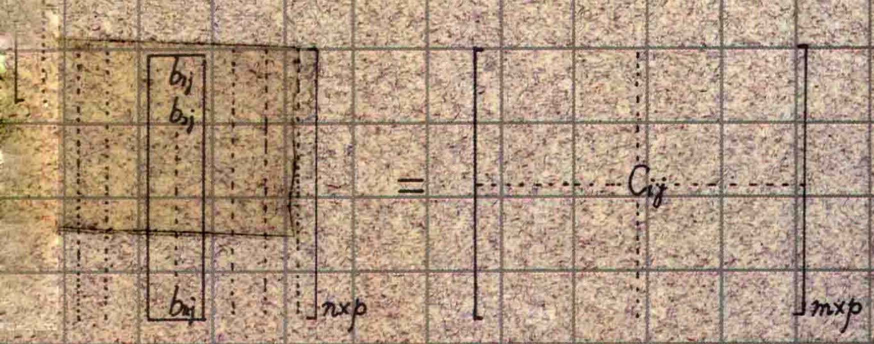
$+ a_{in}b_{nj}$

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

高數題庫

3650

矩陣



牛頓出版公司

矩　　陣

◉ 一次方程組與高斯消去法(題號1～17)

1. 一次方程組

設一次方程組

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n=b_1$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n=b_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots\cdots+a_{mn}x_n=b_m$$

設 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$，$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$，

$$B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow\quad AX=B$

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots & a_{2n} \\ & & \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

吾人稱A爲係數矩陣，a_{ij}稱爲矩陣A之第i列第j行的元素，簡稱爲元。m及n分別表矩陣A的列數及行數，故又稱A爲$m\times n$矩陣。

若$m=n$時，則稱A爲n階方陣

$$[AB]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2n} & b_2 \\ & & \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots\cdots a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

稱$[AB]$爲增廣矩陣 (augmented matrix)。

2. 高斯消去法

設方程組(L)是含x_1, x_2, ……, x_n之n個未知數的一次方程組。

(1) 利用某個方程式中x_1的係數，消去其他方程式中x_1的係數，而得出同解的方程組(L')。

(2) 再利用另一方程式中x_2的係數，消去其他方程式中x_2的係數，而得出同解的方程組(L'')。

(3) 如此繼續進行，最後再利用另一方程式中的x_n的係數，消去其他方程式中x_n的係數，此種求解一次方程組之解的方法，稱之爲高斯消去法。

◉ 矩陣的列運算(題號18～28)

1. 第i列與第j列互換。
2. 以一非零純量k乘第i列的每一元素。
3. 以非零純量k乘第i列諸元素，然後加入第j列之諸對應元素。

4. 簡化矩陣

於每個不爲零的列中，第一個不等於0的元所屬的行中只有這個元不等於0，若矩陣經列運算後達到這個目標，則稱這個經列運算後的矩陣爲一簡化矩陣。

說明例：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} (\times -2)(\times -3)$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{bmatrix} (\times 6)(\times -2) \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -47 \end{bmatrix} \begin{matrix} (\times 47) \\ (\times -47) \\ (\times 6)(\times 16) \end{matrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 47 & 0 & 0 \\ 0 & -47 & 0 \\ 0 & 0 & -47 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 47 & 0 & 0 \\ 0 & -47 & 0 \\ 0 & 0 & -47 \end{bmatrix}$$ 稱爲簡化矩陣。

5. 矩陣的秩

(1) 設 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ 爲一 $m \times n$ 矩陣，將矩陣 A 作列運算後，所得之簡化矩陣中含不爲零之元的列數爲一定值，此定值稱爲矩陣 A 之秩。設此定值爲 r，記爲 $\text{rank} A = r$，稱矩陣 A 之秩爲 r。

(2) 設一次方程組

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots\cdots+a_{mn}x_n=b_n \end{cases}$$

令其係數矩陣爲A，增廣矩陣爲B，設矩陣A之秩爲k，矩陣B之秩爲m，而未知數之個數爲n，則：

① $m=k$且$k<n$則有無限多組解，且其中$n-k$個未知數可以取任意數。

② $m=k$且$k=n$，則解恰有一組。

③ $m\neq k$，則無解。

(3) 一次齊次方程組有不爲零的解之充要條件是其係數矩陣A的秩小於它所含的未知數的個數。

◉ 列運算及行列式的降階（題號29～63）

1. 三階行列式

設$A=[a_{ij}]_{3\times3}$爲一3×3矩陣，且

$$A=[a_{ij}]_{3\times3}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

則定義矩陣A之行列式爲

$$|A|=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$+ a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}$$

2. n階行列式

設 $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ 爲一 $n \times n$ 矩陣，且

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

則定義矩陣 A 之行列式爲

$$\det A = \delta(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + \cdots\cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}A_{1n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{1+k}a_{1k}A_{1k}$$

3. 行列式的降階

(1) 公　　式：

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$, A_{ij} 表 A 在 (i, j) 位置上的子方陣

$$\Rightarrow \quad \delta(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\cdot A_{ij},\ i = 1, 2, \cdots, n$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\cdot A_{ij},\ j = 1, 2, \cdots, n$$

(2) 例　　子：

① $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

$$=a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$=a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

② $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$

$$=a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$+a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_4 \end{vmatrix}-a_4\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

4. 行列式的性質

(1) 行列式之行列互換行列式值不變。

(2) 行列式有一列(行)全爲0，則行列式之值爲0。

(3) 行列式中某一列(行)全乘以k，則行列式值爲原來的k倍。

(4) 若在行列式中某一列(行)乘以k，加到另一列(行)，則行列式值不變。

(5) 行列式中任兩列(行)相等或成比例，則行列式值爲0。

(6) 行列式中任兩列(行)互換，則其值變號。

5. 特殊行列式

(1) $$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

(2) $$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

(3) $$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

(4) $$\begin{vmatrix} a+c & b & b \\ c & a+b & c \\ a & a & b+c \end{vmatrix} = 4abc$$

(5) $$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

(6) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix} = ab$$

(7) $\begin{vmatrix} a^2+1 & a^2 & a^2 \\ b^2 & b^2+1 & b^2 \\ c^2 & c^2 & c^2+1 \end{vmatrix} = a^2+b^2+c^2+1$

(8) $\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ba & c^2+a^2 & bc \\ ca & cb & a^2+b^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$

(9) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0$

(10) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} = (af-be+cd)^2$

6. 行列式的應用

(1) 三角形面積：

設$A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$,則$\triangle ABC$的面積爲

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix} \text{ 的絕對值}$$

(2) 三點$P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$共線

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

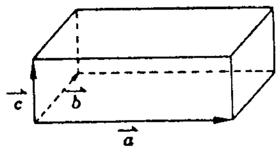
(3) 平行六面體的體積：

空間三向量 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$,

$\vec{c}=(c_1, c_2, c_3)$所張

平行六面體的體積為

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{(絕對值)}$$



(4) 平面上三直線$a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$,

$a_3x+b_3y+c_3=0$共點，則

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0 \text{ (共點之必要條件)}$$

(5) 設坐標上四點(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)共圓，則

$$\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}=0$$

(6) 設空間中$A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $D(x_4,$

$y_4, z_4)$四點共平面，則

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}=0$$

(7) 設坐標上五點(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4), (x_5, y_5, z_5)五點共球，則

$$\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ x_5^2+y_5^2+z_5^2 & x_5 & y_5 & z_5 & 1 \end{vmatrix}=0$$

7. 西維斯特消去法

(1) 設齊次方程組 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$

有不爲零之解 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0$

(2) 由兩個含x之方程式，根據「有公根」之假設，而得出一個不含x之等式，就像由兩個含x之關係式，消去x，此種方法乃是一種消去法，通常稱爲西維斯特消去法。

設 $\begin{cases} f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\cdots+a_{m-1}x+a_m=0 \\ g(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots+b_{n-1}x+b_n=0 \end{cases}$

有公根 $\Rightarrow$
- ① 將$f(x)=0$兩邊乘以x^{n-1}, x^{n-2}, ……, x, 1得n個方程式。
- ② 將$g(x)=0$兩邊乘以x^{m-1}, x^{m-2}, ……, x, 1得m個方程式。

$\because$　$m+n$個方程式利用「齊次方程組」有不爲零之解。

$$\text{條件} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots\cdots a_m & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots\cdots\cdots & a_m & 0 \cdots\cdots & 0 \\ & \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \quad a_0 & a_1 & \cdots\cdots\cdots & a_m \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots\cdots\cdots & b_n & 0 \cdots\cdots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & b_n & 0 \cdots & 0 \\ & \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 & b_0 & b_1 \cdots\cdots & b_n \end{vmatrix} = 0$$

所得關係式中之行列式爲$m+n$階。

例：設方程式$x^3+3px+q=0$與$x^2+p=0$有公根，求p與q之關係式。

解：設其公根爲x_0 $\Rightarrow \begin{cases} x_0^3+3px_0+q=0 \\ x_0^2+p=0 \end{cases}$

由$x_0^3+3px_0+q=0 \Rightarrow x_0^4+3px_0^2+qx_0=0$

及$x_0^2+p=0 \Rightarrow \begin{cases} x_0^4+px_0^2=0 \\ x_0^3+px_0=0 \\ x_0^2+p=0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (L):\begin{cases} y_2 + 3py_4 + qy_5 = 0 \\ y_1 + 3py_3 + qy_4 = 0 \\ y_3 + py_5 = 0 \\ y_2 + py_4 = 0 \\ y_1 + py_3 = 0 \end{cases}$$

有一組解 $y_1=x_0^4,\ y_2=x_0^3,\ y_3=x_0^2,\ y_4=x_0,\ y_5=1$。不論 x_0 之值爲何 $\Rightarrow$ 這組解都不是零解 ($\because\ y_5=1$)。

$$\therefore \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 3p & q \\ 1 & 0 & 3p & q & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & p & 0 \\ 1 & 0 & p & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \overset{\text{降階}}{\Rightarrow} 4p^3+q^2=0$$

◉ 矩陣的加減法與係數積 (題號64～86)

1. 矩陣的相等

設 $A=[a_{ij}]_{m\times n},\ B=[b_{ij}]_{m\times n}$

$$A=B \Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij},\ i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m$$
$$j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$$

例：

$$\text{設}A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} a & 1 & 3 \\ 3 & b & 6 \\ 5 & 2 & c \\ 1 & d & 4 \end{bmatrix}$$

若 $A=B$，則 $a=2,\ b=5,\ c=3,\ d=0$

2. 矩陣的加減法

(1) 矩陣加法：

① 定　義：

設 $A=[a_{ij}]_{m\times n},\ B=[b_{ij}]_{m\times n}$，則

$$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$$

②性　　質：

設 A, B, C 均爲 $m\times n$ 矩陣，O 爲 $m\times n$ 零矩陣，則

ⓐ $A+B=B+A$

ⓑ $(A+B)+C=A+(B+C)$

ⓒ $A+O=O+A=A$

(2) 矩陣減法：

① 加法反元素：

設 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，則 $-A$ 稱爲 A 的加法反元素，而

$-A=[-a_{ij}]_{m\times n}$。

② 設 $A=[a_{ij}]_{m\times n},\ B=[b_{ij}]_{m\times n}$，則 $A-B$ 定義爲

$A-B=A+(-B)=[a_{ij}-b_{ij}]_{m\times n}$

3. 矩陣的係數積

(1) 定　　義

設 $A=[a_{ij}]_{m\times n},\ k\in R$，則矩陣 A 與 k 的係數積定義爲

$$kA=[ka_{ij}]_{m\times n}$$

(2) 性　　質

設 k, l 爲實數; A, B 爲 $_{m\times n}$ 矩陣，則

① $k(lA)=(kl)A$

② $(k+l)A=kA+lA$

③ $k(A+B)=kA+kB$

◉ 矩陣的乘法 (題號87～154)

1. 定　　義

設 $A=[a_{ij}]_{m\times p},\ B=[b_{ij}]_{p\times n}$，則矩陣 A 與 B 之乘積定義爲

AB,

$$AB=C=[c_{ij}]_{m\times n}$$

其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots\cdots+a_{ip}b_{pj}$

$$=\sum_{h=1}^{p}a_{ik}b_{kj},\ i=1,2,\cdots,m$$

$$j=1,2,\cdots,n$$

例：設 $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&1\end{bmatrix}$， $B=\begin{bmatrix}2&1&3\\1&1&1\\0&1&2\end{bmatrix}$，則

$$AB=\begin{bmatrix}2\times2+1\times1+0\times0 & 2\times1+1\times1+0\times1 & 2\times3+1\times1+0\times2\\1\times2+2\times1+1\times0 & 1\times1+2\times1+1\times1 & 1\times3+2\times1+1\times2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&3&7\\4&4&7\end{bmatrix}$$

2. 性　　質

設 $A=[a_{ij}]_{m\times p},\ B=[b_{ij}]_{p\times n},\ C=[c_{ij}]_{n\times q}$，則

(1) $(AB)C=A(BC)$　　(2) $AB\neq BA$

(3) $A(B+C)=AB+AC$　　(4) $(A+B)C=AC+BC$

3. 單位矩陣(identity matrix)

設方陣 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，若 $i\neq j$ 時，$a_{ij}=0$，而 $i=j$ 時，$a_{ij}=1$，則稱 A 爲 n 階單位矩陣，以 I_n 表示之。

$$I_n=\begin{bmatrix}1&0&0\cdots\cdots0\\0&1&0\cdots\cdots0\\0&0&1\cdots\cdots0\\\cdots&\cdots&\cdots\cdots\cdots\\0&0&0\cdots\cdots1\end{bmatrix}$$

4. 逆矩陣(矩陣的乘法反元素)

(1) 定　　義

設 A,B 均爲 $n\times n$ 矩陣，I_n 爲 n 階單位矩陣，若滿足

$$AB=BA=I_n$$

則稱B爲A之逆矩陣(反矩陣)，通常A之反矩陣以A^{-1}表示之，亦即

$$A^{-1}A=AA^{-1}=I_n$$

A^{-1}亦稱爲A的乘法反元素。

(2) 性　質

設A爲n階方陣，B爲n階方陣，且$det(A)\neq 0$.

$\det(B)\neq 0$，則

① $AA^{-1}=A^{-1}A=I_n$

② $(A^{-1})^{-1}=A$

③ $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

④ $\det(A^{-1})=\dfrac{1}{\det(A)}$

⑤ 若$AB=I$，則$A^nB^n=B^nA^n=I$

⑥ 若$AB=I$，則$(A+B)^n=\sum_{k=0}^{n}C_k^nA^{n-k}B^k$

(3) 定　理

n階方陣A的逆矩陣A^{-1}存在的充要條件爲$\det(A)\neq 0$。

(4) 逆矩陣的求法

(A) 列運算法

$$設\ A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$I_m=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\cdots\cdots 0 \\ 0 & 1 & 0\cdots\cdots 0 \\ 0 & 0 & 1\cdots\cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0\cdots\cdots 1 \end{bmatrix}$$

則

$$
[AI_n]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} & 1 & 0 & 0\cdots\cdots 0 \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2n} & 0 & 1 & 0\cdots\cdots 0 \\ a_{31} & a_{32}\cdots\cdots a_{3n} & 0 & 0 & 1\cdots\cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots a_{nn} & 0 & 0 & 0\cdots\cdots 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{經列運算後}} [I_nB]
$$

$$
[I_nB]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\cdots\cdots 0 & b_{11} & b_{12}\cdots\cdots b_{1n} \\ 0 & 1 & 0\cdots\cdots 0 & b_{21} & b_{22}\cdots\cdots b_{2n} \\ 0 & 0 & 1\cdots\cdots 0 & b_{31} & b_{32}\cdots\cdots b_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0\cdots\cdots 1 & b_{n1} & b_{n2}\cdots\cdots b_{nn} \end{bmatrix}
$$

則 $A^{-1}=B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12}\cdots\cdots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}\cdots\cdots b_{2n} \\ b_{31} & b_{32}\cdots\cdots b_{3n} \\ \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2}\cdots\cdots b_{nn} \end{bmatrix}$

(B) 伴隨矩陣法

設 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2n} \\ & \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots a_{nn} \end{bmatrix}$

則A之伴隨矩陣以$adjA$表示之，吾人定義

$$
\mathrm{adj}A=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{21}\cdots\cdots b_{n1} \\ b_{12} & b_{22}\cdots\cdots b_{n2} \\ \cdots & \cdots \\ b_{1n} & b_{2n}\cdots\cdots b_{nn} \end{bmatrix}
$$

$$
b_{ij}=(-1)^{i+j}\det A_{ij}
$$

A_{ij}表劃去第i列及第j行後所得之$n-1$階行列式。