

北京教育丛书

Beijing jiaoyu
congshu

○ 刘坤
常相舜

高中 数学教学改革的 实践与认识



北京教育出版社

北京教育丛书

高中数学教学改革的 实践与认识

刘 坤 常相舜 著

北京教育出版社

《北京教育丛书》编辑委员会

顾问:徐惟诚 汪家镠 李 晨 韩作黎

主 编:李志坚

副主编:姚幼钧(第一副主编) 陶春辉 蓝天柱

史文炳 倪益琛 仇 琨 徐安德(常务副主编)

编 委:(以姓氏笔画为序)

马芯兰	于美云	王 有	王广和	王永新
王光裕	王家骏	王碧霖	仇 琨	方道霖
白 耀	史文炳	史根东	叶钟玮	司锡龄
安永兴	安邦勋	祁 红	刘士俊	刘永增
刘秀莹	刘尚永	江丕权	孙学增	毕晓尘
吴同瑞	李 斌	李志坚	李观政	肖 沅
佟志衷	沈友实	杨玉民	杨志彬	余世光
陈孝彬	陈镜孔	金德全	林 慈	范小韵
罗玉圃	张广茂	张国忠	张觉民	张振芳
张鸿顺	线长安	邹甫昌	赵 俭	赵志洁
赵 毅	姚幼钧	胡红星	钮辰生	高玉琛
徐安德	郭汝康	倪传荣	倪益琛	耿 申
章家祥	陶春辉	侯维城	崔万顺	阎立钦
曹福海	梁慧霞	董哲潜	傅 庚	温寒江
赖登铎	蓝天柱	端木慧		

序

徐惟诚

教育事业的重要,已经日益被愈来愈多的人认识了。

中国要振兴,归根到底要靠我们中国人自己努力奋斗,要靠我们的全体劳动者创造出数十倍于今日的劳动生产率。这是一个全体国民素质提高的过程。人们自然要寄希望于教育。

要搞好教育,需要做许多事情,其中最根本的还是要靠人,靠教师。尤其是担负着国民基础教育任务的中小学教师。

教师的重担,关系着祖国未来的命运,也关系着每一个教育对象未来的命运。他们所教的学生在未来的社会条件下,究竟怎样做人,怎样立身处世,能不能用自己的双手为社会做出贡献,从而也创造自己的幸福生活,在相当大的程度上取决于在青少年时代所受到的教育。

我们知道,人,是世上已知物质发展的最高形态。关于人的意识、观念、智力的形成和发展的规律,我们离知道得很清楚还有很大的距离。社会主义的教育科学需要有一个大发展,这是毫无疑问的。

在教书育人第一线工作的广大中小学教师,对社会主义教育科学的发展应当有特殊的贡献。他们当中的许多人把一辈子的心血都用来为祖国培育后代,造就人才,积累了丰富的经验。这些经验理当成为整个教育战线的共同财富。可是由于种种原

因,这件总结和传播经验的工作过去做得还远远不够。为此,中共北京市委和北京市人民政府决定,拨出专款,指定专人组成编委会,编辑出版一套《北京教育丛书》。这个决定受到广大中小幼教师的欢迎和支持。在短短一年多时间内,已经报来几百部书稿。又有一批热心而有经验的同志担任编审工作,看来任务是可以完成的。

我们相信,《北京教育丛书》的编辑出版,对于鼓励广大教师钻研业务,积累经验,对于传播和交流这些经验,对于推动教育科学研究,对于提高普通教育的水平,都是有积极作用的。同时,这套丛书的出版,也将有助于人们认识教师所作的艰苦的、创造性的劳动。

改革和建设的大潮在祖国大地上汹涌澎湃,每天都有许多新问题提到我们面前来,也把许多新问题提到我们的教育工作者面前。这是一个需要有许多新创造的时代。教育战线上的同志们为祖国的振兴所建立的功绩,是不会被人们忘记的。

前 言

八十年代初,我国数学教育界提出了“打好基础,发展智力,培养能力”的教学目标,群众性的教学方法的改革蓬勃兴起。我们的数学教学改革也是从教法改革起步的。随着改革的深化,由方法改革延伸到教材的改革和增加学法教育。后来通过“系统论”的学习,明确了教学是一项系统工程,它至少包括教材(内容及其编排方式)、教法(怎么教?用什么思想去教?)和学法教育(帮助学生树立正确的学习目的、学习态度和掌握科学的学习方法)三个子系统。认识到要想取得系统运行的最优效果,首先应该着眼整体,统筹全局,规划好改革的总体目标;试图探索在不增加师生过重负担的前提下,大面积、高质量、长期稳定地培养优秀中学生的数学教学的途径和方法。在这个基础上,既要充分发挥每个子系统的功能,更要协调好它们之间的联系。这样就初步形成了我们的高中数学教材、教法、学法教育同步改革的思想。

八十年代以来,随着对外开放的扩大,国际上有关数学教学改革的一些新思想、新理论(如:布鲁纳、波利亚、布鲁姆、斯托利亚尔、奥加涅相、克鲁捷茨基、弗赖登塔尔等人的著作)逐步介绍到中国来,国内一些优秀教育研究成果也相继面世。面对这种形势,要实现数学教学改革的总体目标我们做了三件事:

1. 广泛吸取国内外一切优秀的教育研究成果。只有这样,才有可能使我们的教改具有时代特色。同时,要认真地总结、分析我们自己教学上的正、反两方面的经验,还要认真地向我们的

教育对象做调查研究。

2. 坚持学习、教学与教育科研相结合。认真地设计教改实验,把学到的东西应用到教学实践中去,改革我们的数学教学。这是认识的又一次飞跃。

3. 不断地总结经验,使认识逐步升华。十余年来,我们在《教育研究》《课程·教材·教法》《数学通报》等杂志上发表教学经验或教学研究论文近 20 篇,其中获西城区优秀教育论文一等奖 5 篇,北京市优秀教育论文一等奖 4 篇,全国优秀教育论文一等奖 2 篇,还有两篇论文被当代大型教育科研专集《中国最新教育成果总览》和《中国教育管理精览》收入。

应该说明,这项教学的整体改革是在学校和北京市、西城区教育部门有关领导的支持和关怀下进行的。十余年来,还始终得到了著名数学教育家、北京师范大学数学系钟善基教授和曹才翰教授的热情指导和帮助。在此,谨向他们表示衷心地感谢。

本书是在这些教改成果的基础上写成的,是我们从教三十余年来教学经验的结晶。拿出来和同行们广泛交换一下意见,为我国中学数学教学改革的深化尽一点微薄的力量。由于我们教学工作繁重,理论水平不高,一些看法和做法不一定正确,缺点和错误在所难免,恳请专家们、同志们不吝赐教。

刘 坤 常相舜
于北京四中 1996.4.

第一章 数学教学内在规律的探讨	(1)
1.1 数学观·学习观·教学观.....	(1)
1.2 模式论的数学观对数学教学的导向作用	(4)
1.3 模式论的数学观对数学解题教学的启示	(12)
1.4 数学学习的基本结构——数学认知三角形	(58)
1.5 提高智力参与程度在数学学习中的作用	(69)
1.6 数学教学改革的八条指导原则	(77)
第二章 数学教学方法的改革	(91)
2.1 数学课堂教学原则的探讨	(91)
2.2 数学教学要把好“三关”,突出重点	(96)
2.3 数学教学要完善教学过程,切实提高课堂教学质 量	(124)
2.4 数学教学要建立学习规范要求,培养良好的学习 习惯	(132)
2.5 数学教学要开展好课外活动	(136)
第三章 数学课的学法教育	(155)
3.1 关于数学学法教育的基本观点	(155)
3.2 高中数学学法教育的系统设计与实施	(158)
3.3 数学学习的四步通法	(167)
3.4 要教学生学会自我调控	(174)
3.5 学法教育的特点及其理论思考	(177)
第四章 数学教材改革的尝试	(182)
4.1 自编高中数学教材的思考与做法	(182)
4.2 自编高中数学教材的特点和问题	(184)
参考文献	(197)

第一章 数学教学内在规律的探讨

近几年,随着数学教学改革不断深化和学习的深入,我们越来越感觉到要想使数学教学改革有所突破,需要进一步转变观念,并在这个基础上需要深入探讨数学教学的内在规律。只有这样,数学教学改革才能少一些盲目性,多一些自觉性,才能建立在比较可靠的科学的基础之上。

1.1 数学观·学习观·教学观

转变观念内涵甚广。就数学教学改革而言,我们认为主要是认真转变以下三个观念:

(1) 数学观——对数学本质及其功能的认识。

关于数学本质的认识,近十年来出现了新的观点“数学即是对模式的研究”(美国的怀特海等人),我国学者徐利治、郑毓信合作提出了“数学即是模式的建构和研究”,并写出了专著《数学模式论》(广西教育出版社 1993 年)。

谈数学的功能,离不开我们所处的时代。当今世界空前剧烈的国力竞争归结为三大实力(高科技、经济力、人才)的较量。“被人称颂的高技术本质上是一种数学技术”(美国),“在大学所有的课程改革中要现代化——数学化”(前苏联)。对经济运行规律的研究越来越数学化、计算机化,数学对经济竞争起到越来越重要的作用。“数学是授人以

能力的技术”(美国),各层次人才的培养都离不开数学,因此,“数学教育必将成为人才培养国际竞争中的一个重要战场”。

(2) 数学学习观——对数学学习本质的认识。

数学学习是主体在自己的头脑中建构与发展数学认知结构的过程(认知学说的观点)。这个过程是学生以其已有的知识和经验为基础的,主动地而不是被动地建构过程(建构主义的观点)。

(3) 数学教学观——对数学教学的本质及其功能的认识。

数学教学是“数学活动的教学”(苏联,斯托利亚尔)。数学教学是“数学思维过程的教学”(我国数学教育界)。应当以“模式”的概念为核心来组织数学教学(徐利治,郑毓信)。

这三个观念既互相区别,又紧密联系,构成了对数学教育的总的看法。世界观决定方法论。数学教学的具体改革正是这个总的看法的反映。因此,要使数学教学改革卓有成效地进行,要下大功夫于这三个观念的学习与研究。

数学教学内在规律的探讨,总是需要有一个明确的指导方针,这个方针就是对数学教育的总的看法。在它的指导下,认真地、全面地探讨数学教学的内在规律,才有可能使我们具体实施的数学教学改革方向明,决心大,进步快,收效高。

本章内容正是围绕这些基本问题展开的,它是近几年我们学习、研究和实践的结晶。

还是让我们先看看学生的感受吧:

“虽然我学习了九年数学,认识却很肤浅:数学就是学学公式、定理,然后做做题,初中阶段我陷入盲目做题,虽然考试成绩很好,可数学能力并没有很好地发展。”“通过选修课认识到‘整个数学的历史就是提出问题,创造模式,研究模式,应

用模式的历史’因此,学数学就不能只是盲目地做题,首先应对模式有一个清楚的认识。”

“以前虽然上了许多年数学奥校,也参加过无数次数学竞赛,但数学在我看来无非是算算数,证证题,直到上了选修课我才明白‘数学是模式与秩序的科学,是创造模式与应用模式的过程。’从此,模式的概念深入我心,渐渐地我又懂得了很多用模式的观点学习数学的方法。貌似高深莫测的数学这才向我敞开了大门,使我真正喜欢上了它。这以后,每当我做一道题,都把上述方法应用一次,熟悉一遍,反思一遍。它已经成了帮助我学好高中数学的法宝。”

“在我理解了数学的本质以后,就有意识地用模式的观点去分析每一个定义、定理、公式、法则,这样一来就更透彻地理解了它们的内涵,并为灵活运用做了充分的准备。”

“过去大家往往是只重视定义、定理的应用,而忽视了数学模式从构建到应用过程中的某些环节。如果能认识模式构建过程,知道数学家是怎样把这个模式创造出来的,这对我们开阔思路、灵活应用会有很大的启发。”

“老师是让我们站在一个更高的角度,更高的层面上认识数学,学习数学,……渐渐地在我的头脑中形成了一种‘观念’,我觉得这种观念带来的益处是多做几道题所赶不过的,这种观念的种子在我的头脑中已经萌发,使我不自觉地开始应用到课堂学习之中,这大概就是常听人说的‘数学脑子’吧。”

上面摘引的是1995年北京四中高一年级(上)学期,参加《数学学习与数学思维方法》选修课的五位学生学习心得的部分内容,从中可以看出:

(1) 模式论的数学观(这在下一节将做简介)同传统的数学观相比,给我们的教育对象留下的印象是不同的。前者较准

确较全面地反映了数学的概貌,对形成学生正确的数学观有积极的意义;

(2) 数学观的变化给学生学习数学的着眼点和学习方法带来了很重要的影响。

什么是数学?这是对数学本质的探讨,是数学哲学的根本问题,属于世界观范畴。世界观决定方法论,对数学的不同看法必然导致不同的数学教学观和数学学习观。上面学生的心得或多或少地说明了这一点。事实上,如果把数学仅仅看作是训练逻辑思维体操,那么在教学中就会自然而然地偏重逻辑思维的训练,而对于非逻辑的思维(如类比、归纳)的训练就会相对忽视。如果把数学仅仅理解为数学思维的结果(公理、定义、公式、法则),那么在教学中就会只重结论及结论的应用,而相对忽视数学思维的过程。这就是本书的写作为什么要从“数学观”入手的缘由。

1.2 模式论的数学观对数学教学的导向作用

什么是数学?“数学是研究现实世界空间形式和数量关系的科学”。这一历史的提法已被现代科学的迅猛发展所突破,仍然机械地坚持这一提法已显得不妥^①。因而,近十年来国内外的科学文献中出现了一些新的观点。

1988~1991年,我国数学家群体两次云集南开大学,召开了世人关注的“二十一世纪中国数学展望学术讨论会”。国家

① 郑毓信:《数学抽象的基本准则:模式构建的形式化原则》,数学通报1990.

自然科学基金会向大会的报告中明确指出：“今天可以说，数学是关于模式和秩序的科学。”^①这一新的观点（下称模式论的数学观）是对现代数学科学发展的高度概括，即使在初等数学的教学中也具有十分重要的指导意义。

一、什么是数学模式

“模式”这个词是从铸造工艺中的“模子”那里借来的。它是对数学中知识点的结构、功能等诸多方面的形象而又深刻的概括。意指“已经建立了有关理论和研究方法的数学模型”^②。例如，二次函数，一元二次方程，一元二次不等式等都是中学生熟悉的数学模式。数学中所有的定义、定理、公式、法则、原理和具体方法（如待定系数法，数学归纳法等）都是数学模式^③。构建数学理论就是“创造模式”，以数学理论解题就是“使用模式”。整个数学的历史就是不断发现问题，创造模式，研究模式，使用模式的历史。

二、什么是数学秩序

“秩序”就是有条理，不混乱。所谓数学秩序，我们理解有两层涵义：其一，数学理论是由数学模式组成的一个逻辑有序的系统结构，“数学是一个有机的整体”。^④每一个模式能够被承认是正确的，当且仅当它在前面的理论基础之上能被推出时。这也就是平时大家所说的数学有很强的系统性，没有前面的基础，后面就难以学好的原因。其二，数学中每个问题的解决，只能是从已知到目标的一系列逻辑推理、演算的有序过程。否则结果是

① 《第二次“21世纪中国数学展望”学术会议纪要》，中学数学（苏州大学主编）1991.9.

② 郑毓信：《数学抽象的基本准则：模式构建的形式化原则》，数学通报1990.11.

③ 同②.

④ [美] R. 柯朗与H. 罗宾《数学是什么？》（科学出版社，1985）的序言。

靠不住的。以上两点对于数学教学具有良好的导向作用:第一,学习数学不仅要深入认识每一个模式,而且要把模式“放在系统中”,也就是要注意对理论进行“整体性分析”^①:

“什么是这一理论所要解决的主要问题?这些问题是怎样产生的?

理论中的主要概念是什么?各个主要概念是怎样联系起来的?这些概念与其它概念之间又是怎样联系的?

各个主要结论是怎样联系起来的?主要结论与主要概念又是怎样的联系?

理论中使用了哪些特殊的符号与术语?这些符号与术语是否适当?

什么是理论中的主要方法?……我们能否应用这些方法去解决更多的问题?

这一理论与其它理论又有怎样的联系?”

第二,在问题解决的过程中,一定要注意培养逻辑思维能力,而且在解答的表述上,要力求步步有据,规范有序。

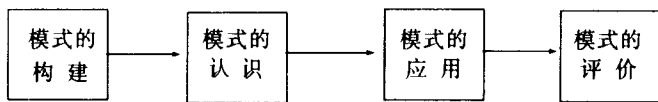
三、要以模式论的数学观组织数学教学

如上所述,既然数学的本质是创造模式,研究模式,应用模式,那么我们就“应该以模式的观念为核心来组织数学教学”^②,而且要把对模式的学习安排在动态之中。具体运行的路线是:

首先,要设计一个出发问题,对它的研究导致模式的创建(模式的构建),接着是对模式的分析与研究(模式的认识),然后进入应用(模式的应用),最后是反思(模式的评价)。用流程图表示为

① 徐利治,郑毓信:《现代数学教育工作者值得重视的几个概念》数学通报 1995. 9.

② 徐利治,郑毓信:《数学模式论》(广西教育出版社 1993)第205页.



对这四步流程说明如下:

第一步:

1. 模式的构建必须从问题开始。

模式的构建是创造性思维的结果。“思维自疑问始”，没有问题就不可能有思维，当然更谈不上创造性思维。不给问题，直接把模式呈献给学生的做法是不可取的。

出发问题的创设是模式构建的关键。它一般是以一种情境给出，既要具典型性和启发性，又要背景丰富引人入胜，要做到这些是很不容易的。

2. 模式的构建是学生的一种“再创造”过程。

对于这个过程，有两点必须十分明确：

(1) 这个过程是学生模拟数学家发现、创造数学模式的过程。因而，过程中既需要逻辑思维，又需要实验、归纳、猜测、类比等非逻辑思维，也就是说教师要既教猜测又教证明。

(2) 这个过程的主体是学生，学生必须在自己的思维中实际地“构建”出这个模式。这正如 G.波利亚所说的“思想应该在学生的头脑中产生出来，而教师仅仅只应起一个产婆的作用。”

应当指出：这里我们积极地吸取了国外“数学建模”与“问题解决”的宝贵经验。数学建模最值得称颂的特点是“学生再也不当被动角色，他们可以主动地构建和设计自己的数学模型”。^①问题解决则主张“使学生处在与数学家同样的地位上”，能够独立地

① [英] J. D. Hutnley D. J. G. James: 《数学建模》前言(数学通报1995.5)。

进行探索^①。但是,我们又与他们有所区别,他们是完全开放型的学习,我们也开放,但这是在老师的策划下、指导下的开放,这是与基础教育要系统学习数学基础知识的任务相适应的,这是我们的国情。

第二步:

1. 对模式的分析与认识在传统教学论中没有明确作为一个教学阶段。正因为如此,学生对模式的认识往往是在不深入、不全面的情况下便急急忙忙去找题做题,结果事倍功半。从我们的教学改革实践可以看出,把“模式的认识”作为教学的一个程序是十分有益和必要的。

2. 对模式的认识我们认为至少应包括以下四个方面:

(1) 模式构建的过程

在精心创设问题情境,引导学生“参与”模式的发现之后,要及时引导他们反思模式构建的过程。从中着重概括、领悟数学思想在模式构建中的指导作用,使参与中的感受上升到理性。这对形成数学能力和接受辩证唯物主义教育都是很有价值的。

(2) 模式的结构特征

模式的结构特征是这个模式所特有的与其他模式相区别的表现形式(这里,表现形式是多种多样的;可以是式子,可以是图形,甚至可以用文字表述)。帮助学生学会揭示结构特征,既是达到形象化记忆的前提,又是在日后的应用中引发解题思路(广泛联想)的基础。

(3) 模式使用的条件

帮助学生捋一捋模式使用的条件能避免和减少应用时易犯的错误。

① 同前页《数学模式论》第202页。

(4) 模式的本质与功能

模式的本质是这个模式所固有的根本属性。抓住了本质才能不拘泥于形式而更深刻地理解模式——这是灵活运用模式的前提。但是,模式的本质往往是“内隐的”。因此,应帮助学生养成挖掘本质的习惯。从理性上认识模式的功能,能帮助学生掌握使用模式的时机,从而能更有效地使用模式。

很明显,通过这四个方面的“深掘”,必将使学生对模式的理解更深刻,更全面,更富哲理性,从而能增强使用模式的自觉意识和技能水平。

以下,作为例子,以均值不等式进一步说明上述观点。

设 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 是 n 个正数,有

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \quad (*)$$

(或者写成 $a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n \geq n a_1 a_2 \dots a_n$)

(*)式的发现是基于不完全归纳法。证明的巧妙构思出自大数学家柯西(见我们自编的教材)。建立这个模式为的是从理论上回答 n 个正数的算术平均数与几何平均数的大小关系。

(*)式使用的条件是“诸元皆正”,其中,要使等号成立,还需添上“诸元相等”这个条件,若忽视了这个前提,必导致错误。

(*)式的结构特征: n 个正数

和的形式 $\geq$ 积的形式。

这里,自然数 n 分别出现在两个位置上,可看作是刻画结构特征的重要参数。

(*)式的本质:揭示了 n 个正数的算术平均值与几何平均值的大小关系。

(*)式的功能:在式子的变形上,“从左往右”使用(*)式,能把 n 个正数的“和”转化成它们的“积”,反之,能把 n 个正数的“积”转化成它们的“和”。即能使 n 个正数的和与积通过缩小或