振动理论

复旦大学数学系 編著

上海科学技术出版社

振动理論

（試用本）

复旦大学数学系　編著

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书系复旦大学數学系力学专业革新教材之一，內容包括單自由度的綫性振动、有限自由度的綫性振动、单自由度非綫性振动的定性方法和分析方法等。本书可作綜合性大学力学专业振动理論課程的教材，讲授33学时，亦可作高等院校有关专业

振 动 理 論

(試 用 本)

复旦大学數学系　編著

*

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

上海市书刊出版业营业許可证出093号

新华书店上海发行所发行　各地新华书店經售

上海大众文化印刷厂印刷

*

开本850×1168 1/32　印张4 20/32　字数108,000

1960年9月第1版　1960年9月第1次印刷

印数1—6 000

統一书号·13119·390

定　价（十）0.54元

編輯說明

我們受到全国持續跃进的大好形勢的鼓舞和推动，积极响应了党的号召，在两年来教育大革命已經取得偉大成績的基础上，掀起了一个声勢浩大的教学改革的群众运动。通过这个运动，我們揭露了現在教学体系、教学內容和教学方法上陈旧落后的状况，抓住訂方案、編大綱、写教材、搞試驗等重要环节，試图建立一套以馬克思列宁主义、毛泽东思想为指导的，反映現代科学发展水平的，理論联系实际的新的教学体系和內容，以及与之相适应的教学方法，使培养人才的工作更好地貫彻党的社会主义建設总路綫的精神。

作为这种探索和尝試，我們对 1958 年新建的力学专业，采取师生結合的方法，編出了一套可供綜合大学力学专业試用的力学基础課程教材，包括：流体力学、固体力学、一般力学、振动理論。其中一般力学是和数学专业合用的，故列入数学专业革新教材。

我們力图使这套教材能具有以下几个特点：

一、在选材上力图体现为社会主义建設服务和反映現代科学发展水平的要求，因此增加了与当前生产实际有密切关系的內容，并介紹了現代科学的一些新发展，而对原有的內容在不影响基本理論的前提下作了精簡和压縮。

二、在处理上，为了加强統一性，我們把原来計划中的六門課程合并为三門，这样就可以使原来关系密切的課程，如材料力学与彈、塑性力学，流体力学与气体动力学，理論力学与振动理論相輔相成地組成一个整体，同时也便于安排一些新內容。在編写过程

中我們还注意到力学課程与数学課程的統一安排。

三、在闡述上我們努力貫徹实踐——理論——实踐的原則。

徹底实現教学改革，建立起一套符合多快好省方針的教材是一个艰巨的任务，需要一个較长的时間来摸索。这一次編写的教材只是一个开始。由于編写教材的同志原来都是学数学的，既受到思想水平和科学水平的限制，又缺乏較充分的实踐經驗，因此不論在处理方法上或者是內容的科学性上，特别是在理論联系实际方面，都会有不少缺点与錯誤，恳切地希望同志們批評和指正。

同济大学、交通大学、上海力学研究所和本校物理系，在这次編写教材中給予我們很大帮助，上海科学技术出版社与中华书局上海印刷厂对这套教材的迅速出版，給了极大的支持，我們在这里表示衷心的感謝。

复旦大学数学系

1960年5月

序

本书是“一般力学”教材的补充，专供力学专业应用。为了更合理地安排材料，故将相平面等概念放在常微分方程課中讲授，彈性体振动的部分也不在此論述。

振动理論有着极其广泛的应用。在工程和产品設計时，設計者对振动引起的載荷无不給予极大的重視。例如，在制造大功率汽輪发电机时，就要研究解决扭轉长翼片的振动和架构式汽輪机組基座的振动問題；在制造高质量磨床时，必須解决磨床消振問題；此外，在国防建設中也有許多振动問題，振动理論并已应用到粒子加速器、火箭等尖端科学技术方面。

振动理論和自动調节理論是相互依賴、相互促进的，它們都来自生产实际；随着生产自动化的发展，振动理論将有更新的內容。

鉴于上述原因，我們在力学专业中設置了这門課程。我們认为：在振动理論的选材方面，应該适当增加現代化的內容，因此提高了非綫性振动部分的比重；此外，在內容上，我們力求联系实际，但由于缺乏經驗，做得还是不够滿意的。

本书編写过程中，我們曾得到同济大学工程力学教研組教师特别是朱照宣同志大力协助，并提出宝貴意見，謹此致謝。

由于我們的水平限制，本书一定存在着缺点和錯誤，望有关同志和讀者指正。

复旦大学数学系振动理論編写小組

1960年5月

目　录

緒　論

所謂振动，就是在运动过程中表示运动特征的某些物理量时而增大、时而減小地反复变化的一种运动。它广泛地存在于各种形式的物质运动中。例如在机械运动中有机器轉軸的振动、飞机机翼的顫振、天体的周期运动等等；在物理运动中有电磁振蕩、原子核中的运动、光学中的振动、火箭燃燒室中的压力变化等等；甚至在化学运动中（如化学反应中的平衡）、生物运动中（如两族生物的共存、人体神經系統中的目的震顫等）也普遍地存在着振动現象。

毛主席敎导我們："感性的认識是属于事物之片面的、現象的、外部联系的东西，論理的认識則推进了一大步，到达了事物的全体的、本质的、內部联系的东西，……"①振动理論就是用統一的观点来研究各种物质运动形式中的振动現象，从而深入振动現象本质的一門学科。在本課程中主要是研究机械运动中的振动，同时也談到了电学中的一些振动問題。

人类早就认識并利用了振动現象。在东汉时(公元 132 年)，我国便有了世界上最早的地震仪——張衡的候风地动仪。

振动理論的发展和其他自然科学一样，紧紧地依賴于生产力的发展。有限自由度的綫性振动理論，是在 18 世紀发展和完整起来的。由于工业技术的需要，特别是无綫电技术的需要，綫性振动理論已經不足以說明这些技术中存在的某些振动現象，因此就促

---

① 实踐論。毛泽东选集第一卷，人民出版社 1951 年 12 月第三版，第 285 頁。

进了更一般的非綫性振动理論的发展。在这方面，除了 19 世紀末龐卡萊（H. Poincaré）和李雅普諾夫（A. M Ляпунов）等人有研究外，主要是 1930 年以后由苏联著名学者安德洛諾夫（A. A. Андронов）及其学派进行了詳尽的研究并建立了基本理論。

現在，有限自由度系統的非綫性振动理論，由于受生产自动化、自动控制技术的促进，正在蓬勃发展。至于无限自由度系統的非綫性振动的研究，目前只有个别的尝試，因此还沒有形成完整的理論体系。

我国在解放前长期受着反动派的統治，严重地阻碍了生产力和科学技术的发展，因此振动理論，特別是非綫性振动理論，根本沒有得到发展。解放后，特別是从 1958 年大跃进以来，在党的鼓足干勁、力爭上游、多快好省地建設社会主义的总路綫的光輝照耀下，生产建設出現了既是高速度又是按比例发展的持續大跃进的局面，生产力不断地飞速发展。目前，大規模的技术革新和技术革命的群众运动正沿着正确的、科学的、全民的軌道轰轰烈烈地深入发展，机械化、自动化将逐步实現，因而无綫电技术、自动控制将得到越来越广泛的应用，这就必然会提出大量的振动問題，促进我国振动理論的迅速发展。

在振动理論的研究中，广泛采用了数学方法和实驗技术。在数学方法方面，振动理論和微分方程理論特別是常微分方程理論密切相关，非綫性振动理論和非綫性微分方程理論以及常微分方程的定性理論、运动稳定性理論等互相推动。在实驗技术方面，除了采用实物以及模型外，現在正越来越多地采用模拟的方法。由于近代数字电子計算机的发展，更給振动理論的发展提供了新的途徑，因而振动理論和計算技术的发展也是密切联系的。

总之，振动理論的研究必須为生产服务，而生产的发展又必然推动振动理論的进一步发展。

第一章　单自由度系統的綫性振动

§1　綫性振动的概念

自然界中存在的振动問題都是非綫性的，現在所讲的綫性振动都只是在一定程度的近似下得到的。这种近似在某种条件下（如系統在稳定平衡位置附近的微振动）是合理的，这时，問題虽經綫性化，但不会改变其运动本质。

让我們先来观察一个最簡单的問題——空气彈簧的振动。空气彈簧是汽車的一种避震装置，它的构造如图 1-1 所示。其中活动的汽缸 A，可以沿着固定的活塞 B 作上下运动。活塞的截面积为 S，汽缸內部充滿着被压縮的空气。

在开始时，压縮空气的压强为 p_0，高度为 H_0；汽缸頂部受有外載荷 F_0，汽缸外部的压强是一个大气压。由静力平衡原理知道

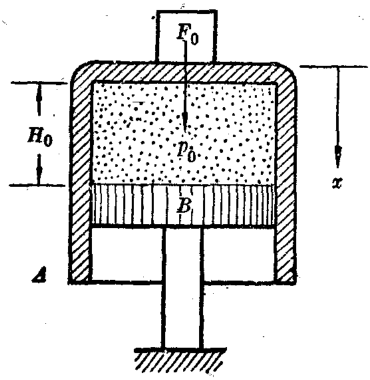

图 1-1

$$F_0=(p_0-1)S.$$

現討論汽缸在平衡位置附近作微振动。以 x 表示在任意时刻 t 汽缸离开平衡位置的位移，F 为由于离开平衡位置而产生的彈性力。

根据热力学中气体的絕热公式

$$V_1^m p_1=V_2^m p_2$$

及时刻 t 的彈性力

$$F=(p-p_0)S,$$

可得

$$F=Sp_0\left[\left(\frac{1}{1-\frac{x}{H_0}}\right)^m-1\right],$$

其中 m 为絕热指数。

根据达朗貝尔(d'Alembert)原理，彈性力和慣性力 $-\frac{F_0}{g}\ddot{x}$ 相平衡，故有汽缸运动方程

$$-\frac{F_0}{g}\ddot{x}-p_0S\left[\left(\frac{1}{1-\frac{x}{H_0}}\right)^m-1\right]=0,$$

这是一个二阶非綫性微分方程，現在将它綫性化。

把彈性力在 $x=0$ 处展开成泰勒(Taylor)級数，則方程变为

$$\ddot{x}+\frac{p_0S}{F_0}g\left[\frac{mx}{H_0}+\frac{m(m-1)}{2!}\left(\frac{x}{H_0}\right)^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\left(\frac{x}{H_0}\right)^3+\cdots\right]=0.$$

若考慮运动是微小的，略去 $\frac{x}{H_0}$ 高于二阶的項，即有

$$\ddot{x}+\frac{p_0S}{F_0}g\frac{m}{H_0}x=0.$$

这就是綫性二阶振动方程，此方程描述了系統在平衡位置的微振动。这个例子和彈簧下悬挂一重物的振动情况类似，压縮空气相当于彈簧，汽缸上的載荷相当于重物。

下面我們来建立单自由度系統在稳定的平衡位置附近作微振动的微分方程。

設 q 为广义坐标，$q=0$ 表示平衡位置，則系統的动能和位能分别为

$$T=\frac{1}{2}A(q)\dot{q}^2, \tag{1-1}$$

及
$$V=V(q). \tag{1-2}$$

設此单自由度系統有 m 个质点，并設它的第 j 个质点受到与速度成正比的阻力

$$\vec{F}_j=-\beta_j\dot{\vec{\gamma}}_j \qquad (j=1,2,\cdots,m),$$

它的广义力为

$$Q=\sum_{j=1}^{m}\vec{F}_j\cdot\frac{d\vec{\gamma}_j}{dq}=-\sum_{j=1}^{m}\beta_j\dot{\vec{\gamma}}_j\cdot\frac{d\vec{\gamma}_j}{dq}=-\dot{q}\sum_{j=1}^{m}\beta_j\left|\frac{d\vec{\gamma}_j}{dq}\right|^2$$

$$=-\beta(q)\dot{q}=-\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}},$$

其中
$$\beta(q)=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\left|\frac{d\vec{\gamma}_j}{dq}\right|^2$$

是用广义坐标表示的阻尼函数，而

$$\Phi=\frac{1}{2}\beta(q)\dot{q}^2 \tag{1-3}$$

称为瑞萊(Rayleigh)散逸函数。

将(1-1), (1-2), (1-3)代入拉格朗日 (Lagrange) 方程，可得

$$A(q)\ddot{q}-\frac{1}{2}A'(q)\dot{q}^2+V'(q)+\beta(q)\dot{q}=0.$$

在微振动的假定下，可綫性化为更簡单的形式。将$A(q)$在$q=0$附近展开

$$A(q)=A(0)+A'(0)q+\frac{1}{2}A''(0)q^2+\cdots,$$

$A(q)\approx A(0)=a>0$，所以

$$T=\frac{1}{2}a\dot{q}^2. \tag{1-4}$$

再把位能在 $q=0$ 处展开为

$$V(q)=V(0)+V'(0)q+\frac{1}{2!}V''(0)q^2+\cdots,$$

因 $q=0$ 是平衡位置，所以 $V'(0)=0$；另外选擇 $V(0)=0$，并略去高于 q 二次以上的項，就得

$$V=\frac{1}{2}V''(0)q^2=\frac{1}{2}cq^2. \tag{1-5}$$

因平衡位置 $q=0$ 是稳定的，故可知 $V(0)$ 是 $V(q)$ 的极小値，因此

$$V(q)>V(0)=0,$$

所以

$$V''(0)=c>0.$$

同样地将 $\beta(q)$ 在 $q=0$ 处展开，得

$$\beta(q)=b+\beta'(0)q+\frac{1}{2}\beta''(0)q^2+\cdots,$$

其中 $b=\beta(0)$. 在微振动的情况下，散逸函数可取为

$$\Phi=\frac{1}{2}b\dot{q}^2. \tag{1-6}$$

将(1-4), (1-5), (1-6)代入拉格朗日方程得

$$a\ddot{q}+b\dot{q}+cq=0; \tag{1-7}$$

記 $2n=\dfrac{b}{a}$, $k^2=\dfrac{c}{a}$, 則得

$$\ddot{q}+2n\dot{q}+k^2q=0, \tag{1-8}$$

上述方程便是振动系統的綫性化方程。

現在来討論瑞萊散逸函数的物理意义。由拉格朗日方程，系統的运动方程为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial T}{\partial q}+\frac{\partial V}{\partial q}=-\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}, \tag{1-9}$$

将(1-9)两边乘以 $\dot{q}$，得到

$$\dot{q}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial T}{\partial q}\right)+\dot{q}\frac{\partial V}{\partial q}=-\dot{q}\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}.$$

应用二次齐次函数的欧拉关系式

$$\dot{q}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}=2T,\quad \ddot{q}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}+\dot{q}\frac{\partial T}{\partial q}=\frac{dT}{dt},$$

$$\dot{q}\frac{\partial V}{\partial q}=\frac{dV}{dt},\quad \dot{q}\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}=2\Phi,$$

便得

$$\frac{d}{dt}(T+V)=-2\Phi. \tag{1-10}$$

这式表明瑞萊散逸函数决定了系統总能量的消耗速度，即单位时間内系統总能量的减少等于瑞萊散逸函数的两倍。

对于无阻尼即 $n=0$ 的特殊情况，方程(1-8)变为

$$\ddot{q}+k^2q=0,$$

此方程的一般解为

$$q=A\sin(kt+\varphi),$$

其中 k 为固有频率，它仅决定于系統的内在性质，与系統的起始条件无关；A 是振幅，φ 是初位相，它們的数值决定于起始条件。

振动解的周期是

$$T=\frac{2\pi}{k}=\text{常数}.$$

T 与系統的起始条件无关，这是綫性振动特有的性质，称之为等时性。

现在，我們来建立单摆运动方程。偏角 $\theta=0$ 是稳定的平衡位置(图 1-2)，单摆运动时的动能 T 和位能 V 如下：

$$T=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2;$$

当我們在平衡位置 $\theta=0$ 选擇 $V(0)=0$ 时，

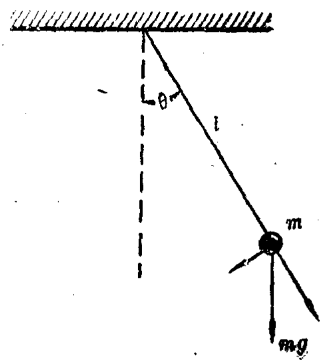

图 1-2

$$V=mgl(1-\cos\theta).$$

将 V 綫性化后得

$$V=\frac{1}{2}mgl\theta^2.$$

代入拉格朗日方程得到单摆运动方程

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=0.$$

我們也可以用牛頓定律来得到上面的方程。考慮到切向力的动平衡条件得

$$ml\ddot{\theta}=-mg\sin\theta,$$

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0.$$

当 θ 很小时，取 $\sin\theta\approx\theta$ 就得到与前相同的方程。

这个例子和前述空气彈簧的例子說明綫性化方法可以有两种：一种是先把 T, V 綫性化，然后再代入拉格朗日方程中去；另一种方法是直接从运动方程本身进行綫性化。

§2 在干扰力作用下的强迫振动

上节我們已經建立了綫性振动的概念，并列出了在无干扰力作用下的振动方程，这种情况已在常微分方程中讲过，同时也是較簡单的情况，故現在不再介紹它的解法。在实际中，一个振动系統往往受有干扰力的作用，所以下面我們来討論在干扰力作用下的綫性振动情况。

一、在正弦力作用下的强迫振动

設系統受到頻率为 ω 的正弦干扰力的作用，则广义干扰力可写为

$$Q=h\sin\omega t,$$

此时，振动微分方程为

$$\ddot{q}+2n\dot{q}+k^2q=h\sin\omega t. \tag{1-11}$$

設初始条件为 $q(0)=q_0,\ \dot{q}(0)=\dot{q}_0$.

由常微分方程的知識,易知方程的解可写成三部分的和的形式

$$q=q^{(1)}+q^{(2)}+q^{(3)}.$$

当 $n<k$ 时,

$$q^{(1)}=e^{-nt}\left(q_0\cos k_1t+\frac{\dot{q}_0+nq_0}{k_1}\sin k_1t\right);$$

$$q^{(2)}=Ae^{-nt}\left(\sin\varphi\cos k_1t+\frac{n\sin\varphi-\omega\cos\varphi}{k_1}\sin k_1t\right); \tag{1-12}$$

$$q^{(3)}=A\sin(\omega t-\varphi).$$

其中 $k_1=\sqrt{k^2-n^2}$. $q^{(1)}$为沒有干扰力时的固有振动,$q^{(2)}$为由干扰力而引起的頻率为 k_1 的振动;这两部分在 t 增长时都趋于零。$q^{(3)}$为干扰力引起的定常振动,它的頻率与干扰頻率相同。振幅 A 和相位差 φ 由下式决定

$$A=\frac{h}{\sqrt{(k^2-\omega^2)^2+4n^2\omega^2}},$$

$$\varphi=\operatorname{arc}\ \operatorname{tg}\frac{2n\omega}{k^2-\omega^2}. \tag{1-13}$$

当 $t\to\infty$ 时, $q\to q^{(3)}=A\sin(\omega t-\varphi)$.

当 $n>k$ 和 $n=k$ 时,$q^{(1)}$和 $q^{(2)}$的形式有改变,而 $q^{(3)}$仍由上式表示之。在振动理論中,要求的是定常振动 $q^{(3)}$的振幅 A.

現在来研究定常振动振幅 A 与干扰力頻率 ω 的关系。我們有

$$A=\frac{h}{\sqrt{(k^2-\omega^2)^2+4n^2\omega^2}}=\frac{h}{k^2}\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{k}\right)^2\right]^2+4\left(\frac{n}{k}\right)^2\left(\frac{\omega}{k}\right)^2}}.$$

下列比值

$$\frac{A}{A_0}=\lambda=\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{k}\right)^2\right]^2+4\left(\frac{n}{k}\right)^2\left(\frac{\omega}{k}\right)^2}}$$

称为放大系数，$A_0=\dfrac{h}{k^2}$是系統在不变力 h 作用下，相对于平衡位置之位移。引入記号

$$Z=\frac{\omega}{k},\quad \delta=\frac{n}{k},$$

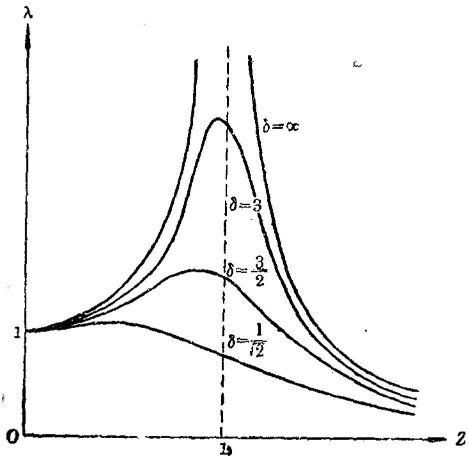

图 1-3

便得
$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{(1-Z^2)^2+4\delta^2Z^2}}.\tag{1-14}$$

当　$Z=\sqrt{1-2\delta^2}$ 时，λ 取得最大值，即

$$\lambda_{\max}=\frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}};$$

当　$Z=0$ 时，

$$\lambda(0)=1;$$

当 $Z\to\infty$ 时，

$$\lambda(\infty)=0.$$

图 1-3 所示曲綫是，λ 和 Z 的关系曲綫，称为反应曲綫。

在式(1-12)中，設 $\delta=0$，則当 $\omega\neq k$ 时，