高等数学

张建文　洪洁怡　编著

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高　等　数　学

张建文　洪洁怡　编著

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/张建文,洪洁怡编著. —北京:北京理工大学出版社,2004.7

ISBN 7-5640-0320-0

Ⅰ.高…　Ⅱ.①张…　②洪…　Ⅲ.高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第058116号

出版发行/北京理工大学出版社
社　　址/北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编/100081
电　　话/(010)68914775(办公室)　68912824(发行部)
网　　址/http://www.bitpress.com.cn
电子邮箱/chiefedit@bitpress.com.cn
经　　销/全国各地新华书店
印　　刷/北京圣瑞伦印刷厂
开　　本/787毫米×1092毫米　1/16
印　　张/14.75
字　　数/355千字
版　　次/2004年7月第1版　2004年7月第1次印刷
印　　数/1~4000册　　责任校对/张　宏
定　　价/23.00元　　责任印制/刘京凤

序 言

在我国，高等职业技术学院是近十几年才开始兴办的一种新型学院，她的办学目标与其他传统高等院校有较大的差异。由于实践性教学学时比重大幅度地增加，在总学时不可能增加的前提下，理论性教学学时就必须有所缩减。作为工科类院校开设的《高等数学》，其学时已大幅度缩减，这使得仅仅依靠简单地删减章节和教师个人对现行教材的灵活处理难以达到高效教学，有必要根据高等职业技术学院的培养目标和特点，对现有《高等数学》课程的内容进行增删、重组和整合。为此，我们必须分清楚哪些是数学的本质内容，哪些是为了严密描述数学的本质内容而设计的数学语言。我们尽最大努力从严密的数学语言描述中，保留反映数学思想的本质内容，摒弃非本质的、仅仅为确保数学理论上的完整性和严密性的数学语言描述。坚持数学思想优先于数学方法，数学方法优先于数学知识的原则。以提升学生运用数学思想和数学方法解决实际问题的能力为核心，以有限的时间最大化教学内容为追求目标，作了以下方面的具体处理：

1. **极限**。极限本身不是我们要直接解决的问题，我们想解决的是如何计算“速度”和“面积”等问题，极限思想在这里起到了关键性的作用。本教材大大加强了对极限思想的理解训练。但是，在极限的运算训练中，主要保留了利用连续函数的性质和罗必达法则计算函数极限，删除了利用两个重要极限等技巧性方法，这样，既可以解决几乎所有常见函数的求极限问题，又可以大大节约教学学时。

2. **导数**。导数及其运算简单易学，基本上没有作太大变动。熟练的微分运算技巧有助于计算不定积分。但是，本教材以查表求原函数(不定积分)为主，所以只简单介绍了微分计算，大幅度降低了微分计算的训练。

3. **不定积分**。不定积分的计算是现行《高等数学》的主要内容和难点内容，其功能是求原函数。不定积分的计算之所以是现行《高等数学》的主要内容，是因为计算它要有很强的技巧。不定积分的计算之所以难，一方面，即使最常见的初等函数的不定积分也未必是初等函数，根本就“积不出”；另一方面，积分运算没有通用的乘法、除法及复合运算法则。这导致不定积分的计算不像导数那么得心应手，不同的函数要用不同的方法，要有很强的技巧。这不仅是不定积分的魅力所在，而且也是其致命缺陷。作为以运用《高等数学》解决实际问题为主要目的的学生，应受到更多训练的是，如何将实际问题转化为数学问题，然后利用现成的数学工具或数学结论得出结果。而不是花太多的时间在解决数学本身的问题。因此，本教材只保留了介绍不定积分的简单计算，更多更复杂的不定积分计算是通过查表解决。

通过定义积分运算来引入不定积分，将不定积分作为积分运算的结果。不定积分的本质是一个(函数)集合，如果孤立地以(函数)集合来定义不定积分，就不能直接反映不定积分记号中的积分运算符号和微分运算符号之间的本质联系，大大增加了学生理解凑微分法的难度。在以往的不定积分定义中，定义时以(函数)集合身份出现，在运算时又以函数身份出现，使学

生感到茫然。我们将不定积分定义为积分运算的结果，以微分方程的解集形式引入就显得更加自然流畅，易于理解。

4. **定积分**。定积分的应用十分广泛，为了激发学生学习数学的积极性，为了更能反映积分的原始思想，为了更恰当地体现定积分的重要性，为了让学生更及时地了解连续函数的作用，本教材将定积分的内容提前，将函数的连续概念和其性质安排在定积分之后。非数学专业的学生学习数学的目的是运用数学解决实际问题，即如何将实际问题转化为数学问题或建立数学模型求解。本教材大大加强了这方面的训练。

5. **多元微积分**。多元微积分是一元微积分的推广，其思想精髓和一元微积分一样，只是在具体处理和计算技巧上有较大差异。考虑到高职的定位，这里只介绍了一些基本内容，并尽可能借用一元微积分的方法来处理，大大降低了学习的难度。

6. **微分方程**。现行教材通常选择针对自由项 $f(x)$ 的形式逐一求特解和通解，然后根据通解求实际问题中满足特定初始条件的特解。这是我们数学最擅长最常用的从一般到特殊的思维模式，这对于以解决数学问题为培养目的是非常合适的。但是，我们培养的是非数学专业的学生，不是以解决数学问题本身为目的，而是以解决实际问题为培养目的的，本教材摈弃了这种方法。

我们选用了拉氏变换求解的方法，并用极短的篇幅引入了拉氏变换，这样更接近实际，效率更提高。在实际问题中，人们要解决的问题常常是求满足某些特定初始条件的特解。这样，不但能更直接地解决实际问题，又能大大降低记忆各种形式的 $f(x)$ 的特解形式，还可以避免求通解而必须学习微分方程的解的结构等较抽象、难度高的内容，降低了学习难度。更重要的是大大提高了解决实际问题的能力，缩短了学习时间，还避免了无效的重复计算，提高了学习和工作效率。

7. **级数**。级数的和函数可以在形式上与级数中的函数项毫无相同之处，更具体地说，有些函数可以等于在形式上毫不相干的幂级数或傅立叶级数。哪些函数可以用幂函数或三角函数来逼近、如何逼近等许多问题不是我们所必须解决的，那是数学专业人士的工作。所以，我们只简单介绍了级数的基本知识，着重于如何将常见函数展开成泰勒级数或傅立叶级数，尤其是利用几个基本函数的幂级数对常见函数进行泰勒展开，而不是判断级数的敛散性。

8. **矩阵与行列式**。在保证内容连贯流畅的前提下，用尽可能短的篇幅介绍了矩阵及其运算。和处理微分方程的思想一样，我们不想为求线性方程组通解而陷入通解的论证海洋中，而是直接引入了矩阵的初等行变换，重点突出了运用这个应用十分广泛的工具解决实际问题。在一线的实际工作和生活中，高于三阶的行列式并不常见，对此我们只作简单介绍。

9. **资料**。本教材试图通过提供一些重要数学思想产生的背景资料来进一步帮助学生理解和掌握这些重要的数学思想等。通过提供资料的形式来和传统高等数学教材过渡。

10. **学习指引**。由于本教材的编著思想与现行教材有较大的差异，我们在不少章节都插入了学习指引，在更具体的问题上来进一步阐述本教材的设计思想，供使用者参考。

11. **附表**。本教材的重点放在运用数学思想和数学方法解决实际问题上，我们建议以考核学生运用数学思想和数学方法解决实际问题的能力为主。所以，除了在书后附有重新设计的较常用积分表和拉普拉斯变换表外，还附有一页最常见的公式表，以方便考试时撕下使用。

12. 带“*”号的内容是较难的内容，可以有选择地学习。

本教材的编著思想是编著者经过1993—2000年为期7年的职业教育实践并经过缜密的思

考和试验后形成的，于 2000 年完成初稿。曾晓燕、吴贤敏参与了教材编写工作。又经过三年的使用，对教学过程中存在的问题进行了修改建议。本次修改中，重新考虑了社会与各学科对数学的要求。并有幸由张厚祎老师对本例教材进行了认真审核，严峰老师重新整理了部分插图，还得到了广东省教育厅的资助。希望本教材的使用者继续给予批评指正。我的 e-mail: ZJwzhang@163.com。

张建文

2004 年 3 月

目　录

微积分思想概述

微积分产生于非常朴实具体的实际问题，是现代数学的伟大成就。微积分不仅对数学本身的发展具有十分巨大的影响，而且也是现代科技必备的“敲门砖”，自然科学、社会科学和人文科学等几乎所有的科学领域都得使用微积分作为强有力的工具。

微积分思想的萌芽可追溯到2500多年前的古希腊人，我国古代对此也有精妙的思想和解决方法。在当时，计算直线所围成图形的面积，计算圆的周长、圆的面积和计算曲线所围成图形的面积等著名问题一直吸引着人们。在两千多年的不屈不挠的努力过程中，人们对许多具体问题建立了一些富有创见的解法。经过反复实践、认识，再实践、再认识的积累，人们对运动、变化、连续等客观世界模式逐渐有了更清晰的认识。

17世纪下半叶，随着生产的发展和科学技术的进步，如何求解运动物体的速度，运动物体的位移、曲线的切线和长度、曲线所围平面图形的面积和曲面所围空间立体的体积、物体之间的引力等问题，成为当时迫切需要解决的主要科学技术问题。由于自身科技工作的需要，牛顿(Newton，1642—1727)致力于计算瞬时速度和万有引力，莱布尼茨(Leibniz，1646—1716)致力于计算曲线的切线等。在前人的思想方法和计算方法的基础上，他们各自独立地建立了用于解决这一类问题的普遍方法：“微积分”。微积分极大地影响了数学以及整个科学技术的发展。微积分的建立是人类最伟大的创造之一。

微积分包括微分学和积分学两部分，这里的“微”是指细小，是“局部”意义下研究问题，这里的“积”是指累加，是“整体”意义下研究问题。

对于非数学专业的学生，尤其是对高等职业技术学院的学生，最重要的不是学习微积分的计算技巧，而是微积分的思想方法。微积分的计算，尤其是一些较复杂的微积分计算，完全可以借助一些公式表等方式解决。将微积分的思想方法直接应用于解决专业问题，将实际问题转换为数学问题或建立数学模型，这是我们学习微积分的直接目的。微积分的思想方法也有益于大家去认识客观世界。

一、微分的主要思路

在中学，我们学习的数学工具主要是解决静态的、规则的、不变的、恒定的、均匀的等问题，计算矩形面积、求匀速直线运动物体的速度、求恒力所做的功、直流电所做的功等。微积分的思想方法使我们能解决许多动态的问题，例如求有连续边界的几何图形面积、求运动物体的即时速度、求变力所做的功等。鉴于微积分的思想方法的强大功能和对我们的重要性，我们先举例粗略介绍微积分的思想方法。

设一个质点作变速直线运动，质点的运动方程为$s=s(t)$，试求在时刻t_0的瞬时速度。

由于求一个质点作匀速直线运动的瞬时速度公式为$v=\dfrac{s}{t}$。对于作变速直线运动的质点，

公式 $v=\frac{s}{t}$ 只是平均速度。为了求作变速直线运动的质点在时刻 t_0 的瞬时速度 $v(t_0)$，任意选取时刻 $t\ (t \neq t_0)$，质点从 t_0 时刻到 t 时刻的平均速度很容易求得，为 $\bar{v}(t)=\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$。如果我们以时刻 t_0 到时刻 t 的平均速度 $\bar{v}(t)$ 来替代质点在时刻 t_0 的瞬时速度 $v(t_0)$，则存在误差 $\Delta v(t)=\bar{v}(t)-v(t_0)$。通常，时刻 t 越接近时刻 t_0，误差 $\Delta v(t)$ 越小，越接近于 0。当时刻 t 无限接近时刻 t_0，如果误差 $\Delta v(t)$ 无限接近于 0，则平均速度 $\bar{v}(t)$ 无限接近瞬时速度 $v(t_0)$。换言之，

$$v(t_0)=\lim_{t\to t_0}\bar{v}(t)=\lim_{t\to t_0}\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$$

大家或许注意到：首先，我们是运用大家所熟悉的平均速度 $\bar{v}(t)$ 来估计瞬时速度 $v(t_0)$；其次，这种估计产生的误差 $\Delta v(t)$ 随着时刻 t 无限接近时刻 t_0 而无限接近于 0；其三，如何计算 $v(t_0)=\lim\limits_{t\to t_0}\bar{v}(t)=\lim\limits_{t\to t_0}\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$。

二、积分的主要思路

我们已经会计算三角形、矩形和梯形的面积，还会计算圆和扇形的面积等。如何计算图 1 所示曲边梯形的面积似乎无从下手。人们为此花费了数百年的时间，才完全解决了这类问题。我们先简要介绍求曲边梯形面积的主要思想。为了方便起见，我们假定曲边梯形的曲边函数 $y=f(x)\geqslant 0$，点 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ 将区间 $[a,b]$ 分为 n 等份，并且 $x_0=a<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$。以小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 为底边，以 $f(x_i)$ 为高作小矩形 $(i=0,1, \cdots, n-1)$。记 $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$ 为底边 $[x_i, x_{i+1}]$ 的长度，则每个小矩形的面积为 $\Delta A_i=f(x_i)\Delta x_i$ $(i=0,1,\cdots, n-1)$。用 $\Delta A_0+\Delta A_1+\cdots+\Delta A_{n-1}$ 代替曲边梯形的面积 A，从图 2 很直观地可以看到，A 与 $\Delta A_0+\Delta A_1+\cdots+\Delta A_{n-1}$ 之间存在误差，记作 $\Delta A(n)$。

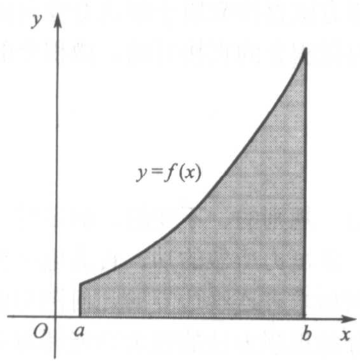

图 1

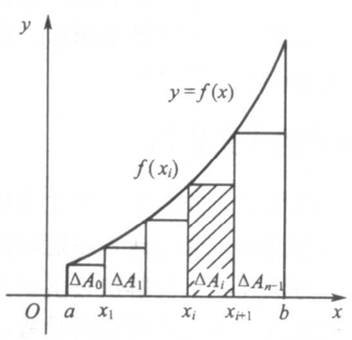

图 2

对图 2 中的每一个小区间进行对分，即将区间 $[a,b]$ 分为 $2n$ 等份，参见图 3。可以得到 $2n$ 个小矩形的面积，仍然用 $\Delta A_0, \Delta A_1, \cdots,\ \Delta A_{2n-1}$ 表示。如果用其面积和 $\Delta A_0+\Delta A_1$

$+\cdots+\Delta A_{2n-1}$ 代替曲边梯形的面积 A，从图3很直观地可以看到，$\Delta A_0+\Delta A_1+\cdots+\Delta A_{2n-1}$ 与 A 之间仍然存在误差，记作 $\Delta A(2n)$。但是，误差 $\Delta A(2n)$ 通常比误差 $\Delta A(n)$ 小。如果不断地对分下去，小矩形的面积和与曲边梯形的面积 A 之间的误差越来越小。如果无限地对分下去，小矩形的面积和与曲边梯形的面积 A 之间的误差将无限接近于零。换言之，求曲边梯形的面积 A 的问题转化为求小矩形的面积和的变化趋势问题，即求

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\Delta A_i$$

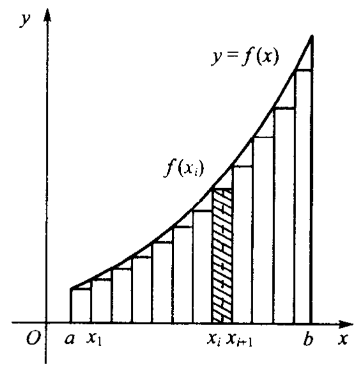

图 3

大家是否注意到：首先是对每一个小区间 $[x_i,x_{i+1}]$，用左端点的值 $f(x_i)$ 替代原本变化的 $f(x)$，从而获得小矩形来估算小曲边梯形的面积；其次，这种估算产生的误差 $\Delta A(n)$ 随着对分的无限进行而无限接近于0；其三，如何计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\Delta A_i$。

三、微积分的主要思路

微分和积分虽然用于解决不同类型的问题，但是他们的主要思路是基本相同的。

1. 以“直”代“曲”。在微分思路中，我们用 $[t_0,t]$ 上的平均速度 $\overline{v}(t)$ 来替代 $[t_0,t]$ 上不断变化的速度；在积分思路中，我们用小区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 的左端点函数值 $f(x_i)$ 来替代原本变化的 $f(x)$。这就是所谓的以“直”代“曲”。

2. 误差趋势为0。以“直”代“曲”思路似乎没有解决任何本质问题。在绝大多数情形下，平均速度不可能是即时速度；小区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上的“梯形”仍然是曲边梯形，只不过是变小了一点而已，并没有解决什么实质问题。惟一的变化是，它们的误差变小了，这正是我们的希望所在。如果我们不断地这样做下去，误差将越来越小，我们所得的结果越来越接近真实的结果。现在的问题是，我们的生命是有限的，而这种接近是无限的，我们必须寻找一种正确的方法来推测或计算得出这个误差的确是0。这个方法就是极限理论，人们为此努力了数百年。

解决上面两个问题是数学专家们的事情，我们更关心的是下面的问题。

3. 如何计算微积分。请数学专家给我们最简单的计算方法。

四、极限理论

前面我们介绍了微分和积分的基本思想。在微分的基本思想中，要求“无限”接近或趋近，以使“以直代曲”的估计值“无限”接近或趋近真实值；在积分的基本思想中，要求“无限”细分，以使“以直代曲”的估计值“无限”接近或趋近真实值。这要求我们先要解决“无限”的概念及其运算问题，即先要解决极限的概念及其运算问题，这也是能否解决“以直代

曲”的关键。

人类对有限、无限以及它们相互之间的关系的探索由来已久。在创立微积分的时候，牛顿和莱布尼茨借助直观的“无穷小”来描述他们的卓越思想，由于它比较直观，很容易被理解和应用，因此人们得到了许多重要的结果，从而导致了微分的迅猛发展，但其逻辑上的脆弱也招致了暴风雨般的批评和攻击。关于“无穷小”的争论和探索持续了近 200 年之久。19 世纪中叶，柯西(Cauchy，1787—1857)和维尔斯特拉斯(Weierstrass，1815—1897)等人建立了极限理论和实数理论，才使微积分有了坚实的理论基础，直到 20 世纪的 60、70 年代，逻辑学家鲁滨逊(Robinson)才完成了牛顿和莱布尼茨的无穷小理论基础。寻求和建立理论的艰难以及理论的严密可靠使人们对理论的追求达到了痴迷的程度。不过这也使得微分的直观性魅力受到了一定的影响。

直观是一种非理性因素，但是，她是人类创造的最原始的动力之一。本书在直观的基础上陈述微积分的基本内容和方法，这些基本内容和方法都是经过严格的数学证明的正确结论。

第一章　函数极限

微积分是最有用的数学工具之一，也是高等数学最重要的内容之一。极限理论是整个高等数学的基石，是微积分的基础。微积分的本质是极限，极限方法是微积分的最基本的方法。微分法和积分法都是借助于极限方法来描述的，掌握极限概念与极限运算非常重要。为此，首先介绍函数极限的概念和函数极限的运算。

第一节　函数的极限

在函数 $y=f(x)$ 中，函数值 $f(x)$ 总是随自变量 x 的变化而变化，当 x 有某种变化趋势时，函数值 $f(x)$ 有什么样的变化趋势？这就是函数极限要讨论的问题。

通常，将 x 的变化趋势分为六种类型，对应地，函数极限也有六种类型。但它们只是叙述上的区别，其本质是相同的，它们具有完全相同的性质和运算法则。

一、函数的单侧极限

1. x 趋向于正无穷大时的函数极限

在函数 $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$ 中，随着 x $(x\neq 0)$ 的无限增大（$x\to+\infty$），对应的函数值 $f(x)=\dfrac{x+1}{x}=1+\dfrac{1}{x}$ 无限接近于 1，这个实数 1 就称为函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的极限。参见图 1.1。一般地，定义

定义 1.1　设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 上有定义，如果当 x 无限增大时，对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某一确定的常数 A，即 $f(x)-A$ 无限接近于 0。那么称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的**极限**，记为

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \ \ (x\to+\infty)$$

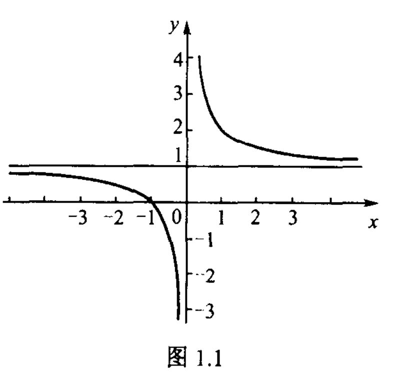

图 1.1

否则，称函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时**无极限或极限不存在**。

例如，对于函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，随着 x 无限增大时，$\dfrac{1}{x}$ 无限接近于 0，因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$。参见图 1.2。对于函数 $f(x)=\sin x$，随着 x 无限增大时，$\sin x$ 在 $[-1, 1]$ 中变化，并不能无限接近于某一确定的常数。因此，函数 $f(x)=\sin x$ 当 $x\to+\infty$ 时极限不存在，参见图 1.3。

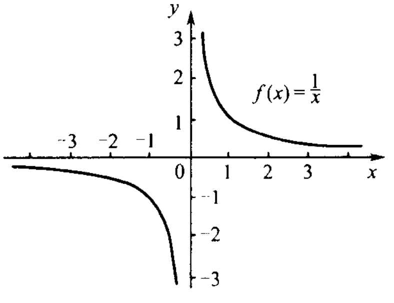

图 1.2

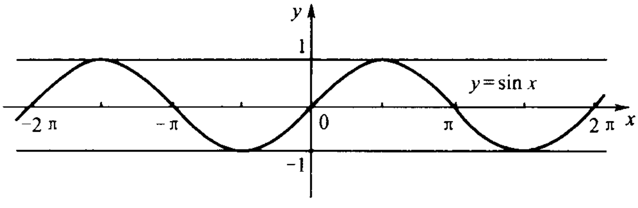

图 1.3

2. x 趋向于负无穷大时的函数极限

定义 1.2 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, b)$ 上有定义，如果当 $x<0$ 且 $|x|$(即 $-x$)无限增大时，对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某一确定的常数 A，即 $f(x)-A$ 无限接近于 0。则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to -\infty$ 时的**极限**，记为

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \to A \quad (x \to -\infty)$$

否则，称函数 $f(x)$ 当 $x \to -\infty$ 时**无极限或极限不存在**。

例如，对于函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，随着 $|x|$(即 $-x$)无限增大，$\dfrac{1}{x}$ 无限接近于 0，因此 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$。参见图 1.2。对于函数 $f(x)=\sin x$，随着 $|x|$(即 $-x$)无限增大，$\sin x$ 只是在 $[-1, 1]$ 中变化，并不能无限接近于某一确定的常数，因此，函数 $f(x)=\sin x$ 当 $x \to -\infty$ 时的极限不存在。参见图 1.3。

3. x 从 x_0 的左（右）侧趋近于 x_0 时的函数极限

考察函数（参见图 1.4）

$$y=\begin{cases} x-1 & x \geqslant 1 \\ x^2 & -1 \leqslant x < 1 \\ 1 & x < -1 \end{cases}$$

当 x 从 1 的左侧趋近于 1 时(记为 $x \to 1^-$)，对应的函数值 $y=x^2$ 无限接近于 1，称实数 1 为函数 $f(x)$ 当 $x \to 1$ 时的左极限；当 x 从 1 的右侧趋近于 1 时(记为 $x \to 1^+$)，对应的函数值 $y=x-1$ 无限接近于 0，称实数 0 为函数 $f(x)$ 当 $x \to 1$ 时的右极限。一般地，定义

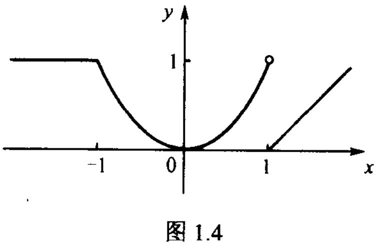

图 1.4

定义 1.3 设函数 $f(x)$ 在区间 (a, x_0) 上有定义，如果当 x 从 x_0 的左侧无限接近于 x_0 时，对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某一确定的常数 A，即 $f(x)-A$ 无限接近于 0。则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的**左极限**，记为

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \ \ (x\to x_0^-)$$

否则，称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时**无左极限或左极限不存在**。参见图 1.5。

类似地，有

定义 1.4 设函数 $f(x)$ 在区间 (x_0, b) 上有定义，如果当 x 从 x_0 的右侧无限接近于 x_0 时，对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某一确定的常数 A，即 $f(x)-A$ 无限接近于 0。则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**右极限**，记为

$$f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \ \ (x\to x_0^+)$$

否则，称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时**无右极限或右极限不存在**。参见图 1.6。

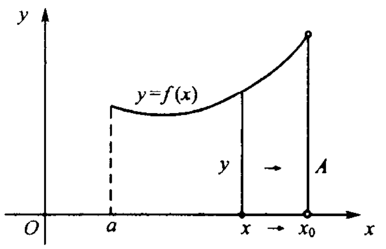

图 1.5

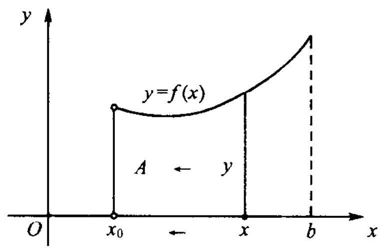

图 1.6

二、函数的极限

前面讨论了 x 以单侧方式趋近于 $\pm\infty$ 和 x_0 时函数 $f(x)$ 的极限，但更重要的是要考虑以任意方式趋近于 ∞ 或 x_0 时函数 $f(x)$ 的极限，即通常意义下的函数极限。

1. x 趋近于无穷大时的函数极限

考察函数 $f(x)=\dfrac{x+1}{x}\ (x\neq 0)$，无论 x 以何种方式趋近于 ∞，即只要 $|x|$ 无限增大时，对应的函数值 $f(x)=\dfrac{x+1}{x}=1+\dfrac{1}{x}$ 就无限接近于 1，那么就称常数 1 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限。参见图 1.1。

定义 1.5 设函数 $f(x)$ 对 $|x|$ 充分大的 x 有定义。如果当 $|x|$ 无限增大时，对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某一确定的常数 A，即 $f(x)-A$ 无限接近于 0，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的**极限**，记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \ \ (x\to\infty)$$

否则，称函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时**无极限或极限不存在**。

例如，对于函数 $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$，当 $|x|$ 无限增大时，对应的函数值无限接近 1，因此 $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=1$。参见图 1.7。

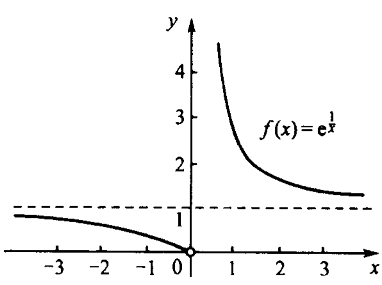

图 1.7

2. x 趋向于 x_0 时的函数极限

考察函数 $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$ $(x\neq 0)$，无论 x 以何种方式趋近于 1，即只要 x 无限接近于 1 时，对应的函数值 $f(x)=\dfrac{x+1}{x}=1+\dfrac{1}{x}$ 就无限接近于 2，那么就称数 2 为函数 $f(x)$ 当 $x\to 1$ 时的极限。参见图 1.1。

为了叙述上的方便，先介绍邻域的概念。点 x_0 的一个 $\boldsymbol{\delta}(\delta>0)$ **邻域**是指以 x_0 为中心的一个开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$。为方便起见，当 $x_0\in(a,b)$，也称 (a,b) 为 x_0 的一个邻域。点 x_0 的一个**去心邻域**是指点 x_0 的一个邻域，但是不含点 x_0 本身。

定义 1.6 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的一个邻域或去心邻域上有定义，如果当 x 无限接近 x_0 时，对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某一确定的常数 A，即 $f(x)-A$ 无限接近于 0。则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**极限**，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \ \ (x\to x_0)$$

否则，称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时**无极限或极限不存在**。参见图 1.8。

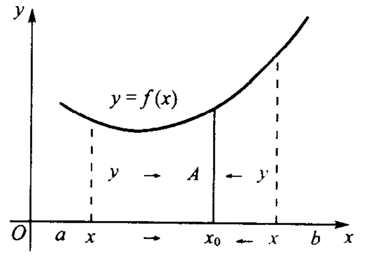

图 1.8

三、函数极限与函数单侧极限间的关系

函数极限与函数单侧极限间存在非常密切的联系。通常，由于函数单侧极限的趋近方式较为简洁，使用起来较为方便。为此，给出下面定理(但并不给出证明)，利用它们能将计算函数极限问题转变为计算函数的单侧极限问题。

定理 1.1 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$。

定理 1.2 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$。

定理 1.1 和定理 1.2 是说，函数极限存在的充分必要条件是函数的左右极限都存在且相等。

例如，要求函数

$$y=\begin{cases}1 & x<-1\\ x^2 & -1\leqslant x<1\\ x-1 & x\geqslant 1\end{cases}$$

当 $x\to 1$ 时的极限，参见图 1.4。由于函数在 $x\to 1$ 的两边有不同的表达式，直接计算 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 有困难，但可以分别计算函数的左右极限。

因为 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2=1$，$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0$，所以 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$，因此 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 不存在。

*四、用 $\varepsilon-\delta$（或 $\varepsilon-N$）语言描述函数极限

在上述函数极限的定义中，使用了“无限接近”、“无限增大”等直观的、非量化的词语，这些词语并非数学的专业术语，只能作为对函数极限的直观描述，但不能作为严格的数学证明语言，有关函数极限的数学证明必须使用量化的 $\varepsilon-\delta\,(\varepsilon-N)$ 语言。下面就 $x\to x_0$ 和 $x\to\infty$ 两种情形给出 $\varepsilon-\delta\,(\varepsilon-N)$ 语言的函数极限定义。

定义 1.7 （$\varepsilon-\delta$ 语言）设函数 $f(x)$ 在 x_0 邻近(可不包含 x_0)有定义，A 为一常数。如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，总可以找到 $\delta>0$，使对满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 的一切 x，总有不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**极限**，记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to x_0)$$

否则，称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时**无极限或极限不存在**。参见图 1.9。

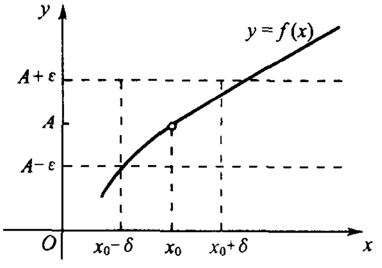

图 1.9

例 1 试用 $\varepsilon-\delta$ 语言证明：$\lim\limits_{x\to 1}x^2=1$。

[**分析**] 对任意给定的 $\varepsilon>0$，要求总可以找到 $\delta>0$，使对满足不等式 $0<|x-1|<\delta$ 的一切 x，总有不等式 $|x^2-1|<\varepsilon$ 成立。要使 $|x^2-1|<\varepsilon$，只要 $|(x-1)(x+1)|<\varepsilon$，即只要 $\delta|x+1|<\varepsilon$。又 $0<|x-1|<\delta$，故 $|x|<1+\delta$，从而 $|x+1|<1+|x|<2+\delta$。这样，要使 $|x^2-1|<\varepsilon$，只要 $\delta|x+1|<\delta(2+\delta)<\varepsilon$，因而取 $\delta=\min\{1,\dfrac{\varepsilon}{3}\}$ 即可。

证明：对任意给定的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\{1,\dfrac{\varepsilon}{3}\}$，则当 $0<|x-1|<\delta$ 时，$|x|<1+\delta$，从而 $|x+1|<1+|x|<2+\delta$。故 $|x^2-1|=|(x-1)(x+1)|<\delta(|x|+1)<\delta(2+\delta)<3\delta=\varepsilon$。即 $|x^2-1|<\varepsilon$ 成立。所以 $\lim\limits_{x\to 1}x^2=1$。

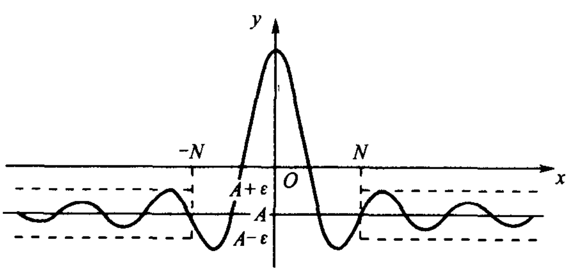

图 1.10