



高教·《工科数学基础》学习指导

高等数学 同步辅导

大连理工大学应用数学系/组编



大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

高等数学同步辅导

——高教·《工科数学基础》学习指导

大连理工大学应用数学系 组编

主编 曹铁川

编者 (以编写章节前后排序)

李 林 孙耀华 张海文 曹铁川
蒋志刚 金光日 庞丽萍 施光燕

大连理工大学出版社

© 曹铁川 2003

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步辅导 / 曹铁川主编. — 大连: 大连理工大学出版社, 2003.11

ISBN 7-5611-2428-7

I. 高… II. 曹… III. 高等数学—高等学校—教学参考资料 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 086241 号

大连理工大学出版社出版

地址: 大连市凌水河 邮政编码: 116024

电话: 0411-4708842 传真: 0411-4701466 邮购: 0411-4707961

E-mail: dutp@mail.dlptt.ln.cn URL: <http://www.dutp.cn>

大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸: 140mm×203mm 印张: 16.75 字数: 566 千字

印数: 1~6 000

2003 年 11 月第 1 版

2003 年 11 月第 1 次印刷

责任编辑: 王 纪

责任校对: 杨 莉

封面设计: 宋 蕾

定 价: 19.80 元

前 言

高等数学是理工科院校最重要的基础课之一。学习高等数学既可以为后续专业课奠定必备的数学基础,同时也是提高自身数学素养的必经途径。由于教学内容和要求的不同,同类课程在不同的院校又分为“工科数学分析基础”、“高等数学”、“微积分”等。

由董加礼、孙丽华主编,高等教育出版社出版的《工科数学基础》,是按照国家教育部面向 21 世纪教学改革立项项目《工科数学教学内容和课程体系改革的研究与实践》的要求编写的一本改革教材。教材特点为模块式分流培养教材,重点院校和一般院校均可使用。该教材分为三个层次:第一层次(不带“*”者),适用于一般院校的多数专业及重点院校中对数学要求较少的少数专业;第二层次(第一层次+带“*”者),适用于重点院校中的多数专业及一般院校中对数学要求较高的专业;第三层次(第二层次+带“**”者),适用于重点院校中对数学要求更高的少数专业及其他各专业中的数学爱好者。

与初等数学相比,高等数学在研究内容及研究方法上存在着许多本质的差异,加之大学课堂教学密度大、速度快,因而对学生的自学能力要求较高。《工科数学基础》中较高层次的内容与传统高等数学教材相比,理论性更强,知识面更广,内涵更为深刻,要想学好需付出更多的努力。

为了帮助同学们更有效地学习,我们编写了《工科数学基础》的学习指导书——《高等数学同步辅导》。本书按《工科数学基础》的章节编排,与教学保持同步,可作为不同类型院校师生讲授和学习工科数学分析基础、高等数学、微积分的教学参考书。另外,也可作为参加硕士研究生入学数学考试的考生全面复习高等数学的复习资料。

本书在每章中,按教材顺序逐节编写。每节包含如下内容:

内容提要 简要归纳本节的主要内容,包括概念、定理、公式和一些重要结论,针对以上内容提出教学要求,对一些重要结论给予适当解释,对容易发生错误之处,提醒同学们注意。

释疑解惑 选择一些学生可能出现的理解易混乱的概念、使用易出现偏差的定理、计算不尽合理的问题进行解答,以增强对有关问题的正确理解。

例题解析 选择若干概念性、启发性、综合性较强的典型题目,剖析解题思路、归纳解题经验和技巧,并作出必要的注释和点拨,帮助读者提升解题能力。

习题精解 对教材本节中的部分题目给出解题途径和主要步骤。选择的题目既考虑到题型齐全,又保证有一定难度。

本书由大连理工大学应用数学系组织编写。曹铁川任主编,具体执笔者为李林(第一章、第二章、第十四章),孙丽华(第三章、第四章),张海文(第五章、第十三章),曹铁川(第六章、第十一章、第十二章),蒋志刚(第七章、第八章),金光日(第九章),庞丽萍(第十章),施光燕(第十五章、第十六章)。

本书编写过程中,参阅了工科数学课程教学指导委员会编写的《高等数学释疑解难》,同济大学应用数学系与武汉科技学院数理系合编的《微积分》学习指导书,在此一并表示感谢。

限于编者水平,加之成书仓促,书中的缺点与不足在所难免,诚望同行和读者批评指正。

编者

2003年11月

目 录

第一章 集合与映射

第一节 集合及其运算/1

内容提要/1 释疑解惑/2 例题解析/2 习题精解/3

第二节 实数集及其完备性/4

内容提要/4 释疑解惑/5 例题解析/5 习题精解/6

第三节 映射与函数/8

内容提要/8 释疑解惑/9 例题解析/9 习题精解/11

第二章 极限

第一节 无穷小量与无穷大量/16

内容提要/16 释疑解惑/16 例题解析/17 习题精解/18

第二节 变量的极限及其性质/20

内容提要/20 释疑解惑/20 例题解析/22 习题精解/23

第三节 极限的运算法则/26

内容提要/26 释疑解惑/27 例题解析/27 习题精解/28

第四节 单调有界原理与无理数 e /31

内容提要/31 释疑解惑/32 例题解析/32 习题精解/34

第五节 无穷小量的阶/36

内容提要/36 释疑解惑/37 例题解析/38 习题精解/40

第三章 连续函数

第一节 函数的连续性概念、间断点及其分类/43

内容提要/43 释疑解惑/44 例题解析/45 习题精解/47

第二节 连续函数的运算与初等函数的连续性/50

内容提要/50 释疑解惑/50 例题解析/51 习题精解/53

第三节 闭区间上连续函数的性质/55

内容提要/55 释疑解惑/56 例题解析/56 习题精解/58

第四章 常数项级数

第一节 数项级数的概念及性质/61

内容提要/61 释疑解惑/62 例题解析/63 习题精解/65

第二节 正项级数的收敛判别法/67

内容提要/67 释疑解惑/68 例题解析/70 习题精解/74

第三节 任意项级数的收敛判别法/78

内容提要/78 释疑解惑/79 例题解析/80 习题精解/82

第五章 极限概念的精确化与实数基本定理

* 第一节 极限概念的精确化/86

内容提要/86 释疑解惑/87 例题解析/88 习题精解/91

** 第二节 实数基本定理/95

内容提要/95 释疑解惑/96 例题解析/98 习题精解/100

** 第三节 闭区间上连续函数性质的证明/103

内容提要/103 释疑解惑/103 例题解析/104 习题精解/105

** 第四节 函数的一致连续性/106

内容提要/106 释疑解惑/106 例题解析/107 习题精解/108

第六章 导数与微分

第一节 导数概念/112

内容提要/112 释疑解惑/113 例题解析/115 习题精解/117

第二节 求导法则/120

内容提要/120 释疑解惑/121 例题解析/122 习题精解/124

第三节 微分/131

内容提要/131 释疑解惑/132 例题解析/133 习题精解/134

第四节 利用导数求极限—L'Hospital 法则/138

内容提要/138 释疑解惑/139 例题解析/141 习题精解/142

第七章 微分中值定理与 Taylor 公式

第一节 微分中值定理/146

内容提要/146 释疑解惑/147 例题解析/150 习题精解/152

第二节 Taylor 公式/154

内容提要/154 释疑解惑/155 例题解析/157 习题精解/159

第八章 利用导数研究函数的性态

第一节 函数的单调性与极值/163

内容提要/163 释疑解惑/164 例题解析/165 习题精解/168

第二节 凸函数/173

内容提要/173 释疑解惑/173 例题解析/174 习题精解/175

第三节 平面曲线的曲率/177

内容提要/177 释疑解惑/177 例题解析/179 习题精解/180

第九章 积分及其应用

第一节 定积分概念/182

内容提要/182 释疑解惑/183 例题解析/183 习题精解/185

第二节 定积分的存在条件/187

内容提要/187 释疑解惑/187 例题解析/188 习题精解/189

第三节 定积分的性质及积分中值定理/191

内容提要/191 释疑解惑/192 例题解析/194 习题精解/196

第四节 微积分基本定理/199

内容提要/199 释疑解惑/199 例题解析/201 习题精解/204

第五节 不定积分/208

内容提要/208 释疑解惑/208 例题解析/209 习题精解/210

第六节 积分的计算/214

内容提要/214 释疑解惑/214 例题解析/214 习题精解/217

第七节 反常积分/224

内容提要/224 释疑解惑/225 例题解析/226 习题精解/227

第八节 定积分应用举例/229

内容提要/229 释疑解惑/230 例题解析/231 习题精解/233

第九节 微分方程的初等积分法/236

内容提要/236 释疑解惑/236 例题解析/237 习题精解/239

第十章 多元函数的微分法

第一节 n 维空间的点集拓扑简介/247

内容提要/247 释疑解惑/248 例题解析/249 习题精解/249

第二节 多元函数的极限与连续性/251

内容提要/251 释疑解惑/251 例题解析/253 习题精解/254

第三节 偏导数与全微分/256

内容提要/256 释疑解惑/257 例题解析/259 习题精解/262

第四节 复合函数的微分法/265

内容提要/265 释疑解惑/266 例题解析/267 习题精解/270

第五节 隐函数的微分法/273

内容提要/273 释疑解惑/274 例题解析/276 习题精解/278

第六节 方向导数与梯度/283

内容提要/283 释疑解惑/284 例题解析/284 习题精解/286

* 第七节 向量值函数及其微分法/290

内容提要/290 例题解析/291 习题精解/292

第八节 多元函数的 Taylor 公式与极值问题/295

内容提要/295 释疑解惑/296 例题解析/297 习题精解/300

第九节 多元函数微分法在几何上的简单应用/304

内容提要/304 释疑解惑/305 例题解析/306 习题精解/308

第十一章 重积分与第一型曲线、曲面积分

第一节 重积分与第一型线、面积分的概念和性质/312

内容提要/312 释疑解惑/313 例题解析/314 习题精解/315

第二节 二重积分的计算/317

内容提要/317 释疑解惑/318 例题解析/320 习题精解/323

第三节 三重积分的计算/328

内容提要/328 释疑解惑/329 例题解析/331 习题精解/333

第四节 第一型曲线与曲面积分的计算/337

内容提要/337 释疑解惑/337 例题解析/338 习题精解/341

第五节 重积分与第一型线、面积分的应用举例/345

内容提要/345 释疑解惑/345 例题解析/346 习题精解/349

第六节 含参变量的积分与反常重积分/352

内容提要/352 释疑解惑/354 例题解析/355 习题精解/356

第十二章 第二型曲线、曲面积分与场论初步

第一节 第二型曲线积分/360

内容提要/360 释疑解惑/361 例题解析/364 习题精解/367

第二节 第二型曲面积分/371

内容提要/371 释疑解惑/372 例题解析/374 习题精解/376

- * 第三节 各种积分之间的关系/381
 - 内容提要/381 释疑解惑/382 例题解析/384 习题精解/386
- * 第四节 平面曲线积分与路径无关的条件/390
 - 内容提要/390 释疑解惑/391 例题解析/393 习题精解/396
- ** 第五节 场论简介/399
 - 内容提要/399 例题解析/399 习题精解/400

第十三章 函数项级数

- 第一节 函数项级数的处处收敛与一致收敛/403
 - 内容提要/403 释疑解惑/404 例题解析/405 习题精解/407
- 第二节 幂级数/410
 - 内容提要/410 释疑解惑/410 例题解析/413 习题精解/416
- 第三节 Fourier 级数/421
 - 内容提要/421 释疑解惑/423 例题解析/424 习题精解/427

第十四章 常微分方程

- * 第一节 微分方程的几个基本问题/433
 - 内容提要/433 释疑解惑/434 例题解析/434 习题精解/436
- * 第二节 线性微分方程与线性微分方程组通解的结构/439
 - 内容提要/439 释疑解惑/441 例题解析/443 习题精解/444
- * 第三节 高阶常系数线性微分方程的解法/448
 - 内容提要/448 释疑解惑/449 例题解析/450 习题精解/454
- * 第四节 常系数线性微分方程组的解法/464
 - 内容提要/464 释疑解惑/466 例题解析/469 习题精解/471
- 第五节 变系数线性微分方程的解法/480
 - 内容提要/480 释疑解惑/481 例题解析/482 习题精解/483
- * 第六节 微分方程应用举例/487
 - 内容提要/487 释疑解惑/487 例题解析/489 习题精解/491
- ** 第七节 稳定性理论简介/493
 - 内容提要/493 释疑解惑/493 例题解析/495 习题精解/496

** 第十五章 Lebesgue 积分大意

- 第一节 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中点集的测度/502
 - 内容提要/502 习题精解/503

第二节 可测函数/505

内容提要/505 习题精解/506

第三节 Lebesgue 积分及其性质/508

内容提要/508 习题精解/509

** 第十六章 无穷维空间简介

第一节 距离空间/516

内容提要/516 习题精解/516

第二节 线性赋范空间及线性有界算子/519

内容提要/519 习题精解/519

第三节 内积空间与 Fourier 分析/521

内容提要/521 习题精解/522

第四节 不动点定理及其应用/523

内容提要/523 习题精解/523

第一章 集合与映射

本章重点是理解集合的概念、运算和性质,了解实数集的完备性,理解在映射的观点下的函数概念及其特性.

第一节 集合及其运算

内容提要

1. 集合的概念及运算

集合是具有某种确定性性质的事物的全体.主要运算为集合的并、交、差.设 A, B 是两个集合,则

$$A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

$$A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

$$A \setminus B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \text{ 但 } x \notin B\}$$

分别称为 A 与 B 的并集、交集、差集.若 $A \supseteq B$,则称差集 $A \setminus B$ 为 B 在 A 中的补集或余集,记作 $C_A B$.若 X 为基本集, X 中的任何集 A 关于 X 的余集 $X \setminus A$ 简称为 A 的补集或余集,记作 C_A .两个集合的并与交可以推广到任意多个集合的并与交.

2. 集合的运算法则,乘积集

法则1 设 A, B, C 为任意三个集合,则 A, B, C 满足交换律、结合律、分配律、幂等律及吸收律.

法则2 设 $A_i (i=1, 2, \cdots)$ 为一列集合,则有:

$$(1) \text{ 若 } A_i \subseteq C (i=1, 2, \cdots), \text{ 则 } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq C;$$

$$(2) \text{ 若 } A_i \supseteq C (i=1, 2, \cdots), \text{ 则 } \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \supseteq C;$$

法则3 设 X 为基本集, $A_i (i=1, 2, \dots)$ 为一列集合, 则

$$\mathcal{R}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{R}A_i, \mathcal{R}(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{R}A_i$$

乘积集 $A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$ 为 A 与 B 的乘积集.

释疑解惑

【问 1-1】 集合等式 $A \cup (B \setminus A) = B$ 是否成立? 为什么?

答 一般不成立, 例如: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$, 由 $A \cup (B \setminus A) = A \cup B \neq B$, 当 $A \subseteq B$ 时成立.

【问 1-2】 判定下列命题是否正确, 正确的给出证明, 否则举出反例:

(1) 若 $A \cup B = A \cup C$, 则 $B = C$

(2) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

答 (1) 不正确. 例如, 当 $A \subseteq B$, $C = B \setminus A$ 时, 就不成立.

(2) 正确.

证 设 $\forall (x, y) \in A \times (B \cup C)$, 则 $x \in A$, $y \in (B \cup C)$, 从而 $x \in A$, $y \in B$ 或 $x \in A$, $y \in C$, 于是 $(x, y) \in (A \times B)$ 或 $(x, y) \in (A \times C)$, 故 $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$.

反之, 设 $(x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$, 则 $(x, y) \in (A \times B)$ 或 $(x, y) \in (A \times C)$, 从而 $x \in A$, $y \in B$ 或 $x \in A$, $y \in C$, 于是 $x \in A$, $y \in B$ 或 $y \in C$, 即 $x \in A$, $y \in (B \cup C)$, 故 $(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C)$.

所以, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

例题解析

【例 1-1】 设 X 为基本集, $A_i (i=1, 2, \dots)$ 为一列集合, 证明 $\mathcal{R}(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) =$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{R}A_i.$$

证 设 $\forall x \in \mathcal{R}(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)$, 则 $x \notin \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, 从而 $\exists i \in \mathbb{Z}$, 使得 $x \notin A_i$, 即 $x \in \mathcal{R}A_i$, 故 $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{R}A_i$, 所以, $\mathcal{R}(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{R}A_i$.

反之, 设 $\forall x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{R}A_i$, 则 $\exists i \in \mathbb{Z}$, 使得 $x \in \mathcal{R}A_i$, 从而 $x \notin A_i$, 即 $x \notin \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$,



故 $x \in \mathcal{R}(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)$, 所以, $\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{R}A_i \subseteq \mathcal{R}(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)$.

综上知, $\mathcal{R}(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{R}A_i$.

【例 1-2】 设 $A = \{x | 1 \leq x \leq 2\} \cup \{x | 5 \leq x \leq 6\} \cup \{3\}$, $B = \{y | 2 \leq y \leq 3\}$, 试在平面直角坐标系内画出 $A \times B$.

解 由 $A \times B$ 的定义画出其图形, 为如图 1-1 两个正方形和一单位长线段.

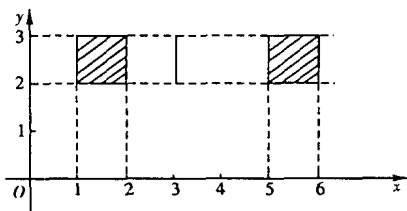


图 1-1

习题精解

(A)

1. 请将下列集合表示出来:

- (1) 大于 5 的所有整数的集合;
- (2) 圆 $x^2 + y^2 = 4$ 内部(不含圆周)的一切点的集合;
- (3) 函数方程 $\sin x = 0$ 的一切根的集合.

解 (1) $\{6, 7, \dots, n, \dots\}$ 或 $\{n | n > 5, n \text{ 为正整数}\}$

(2) $\{(x, y) | x^2 + y^2 < 4, (x, y) \in \mathbf{R}^2\}$

(3) $\{0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots, \pm n\pi, \dots\}$

3. 设 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{2, 4, 6\}$, 求:

- (1) $A \cup B \cup C$; (2) $A \cap B \cap C$; (3) $A \setminus B$

解 (1) $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(2) $A \cap B \cap C = \emptyset$

(3) $A \setminus B = \{2\}$

4. 设 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, 求

(1) $\mathcal{C}A$; (2) $\mathcal{C}B$; (3) $(\mathcal{C}A) \cup (\mathcal{C}B)$; (4) $(\mathcal{C}A) \cap (\mathcal{C}B)$

解 (1) $\mathcal{C}A = \{4, 5, 6\}$

(2) $\mathcal{C}B = \{1, 3, 5\}$

(3) $(\mathcal{C}A) \cup (\mathcal{C}B) = \{1, 3, 4, 5, 6\}$

(4) $(\mathcal{C}A) \cap (\mathcal{C}B) = \{5\}$

(B)

1. 证明 $A \setminus B = A \cap \mathcal{C}B$

证 设 $\forall x \in A \setminus B$, 则 $x \in A$ 但 $x \notin B$, 从而 $x \in A$ 且 $x \in \mathcal{C}B$, 故 $x \in A \cap \mathcal{C}B$.

反之, $\forall x \in A \cap \mathcal{C}B$, 则 $x \in A$ 且 $x \in \mathcal{C}B$, 于是 $x \in A$ 且 $x \notin B$, 所以 $x \in A \setminus B$. 综上知, $A \setminus B = A \cap \mathcal{C}B$.

2. 证明法则 2.

(1) 若 $A_i \subseteq C (i=1, 2, \dots)$, 则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq C$

(2) 若 $A_i \supseteq C (i=1, 2, \dots)$, 则 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \supseteq C$

证 (1) 设 $\forall x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, 则 $\exists i \in \mathbb{N}^*$, 使得 $x \in A_i$, 又 $A_i \subseteq C$, 所以, $x \in C$, 即 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq C$.

(2) 设 $\forall x \in C$, 则由 $A_i \supseteq C (i=1, 2, \dots)$ 知, $x \in A_i (i=1, 2, \dots)$, 故 $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

第二节 实数集及其完备性

内容提要

1. 了解实数集对四则运算的封闭性, 实数集的有序性和稠密性. 掌握三角形不等式, 平均值不等式.

2. 理解邻域的概念, 理解实数集的完备性, 知道确界与确界公理. 确界公理: 凡非空有上界(或下界)的实数集必有上确界(或下确界).



确界公理只在实数集内成立,而在有理数集内是不成立的,这反映了实数集的完备性.

释疑解惑

【问 2-1】 集合 $A = \{r | r > 0, r^2 < 2, r \in \mathbb{Q}\}$ 有上界吗?, 在 $\mathbb{Q}$ 内有没有上确界? 这里 $\mathbb{Q}$ 为有理数集.

答 显然, A 有上界, 例如 2 就是它的上界, 但在 $\mathbb{Q}$ 内 A 没有上确界. 事实上, 如果 $s \in \mathbb{Q}$ 是它的上确界, 那么, $s^2 \neq 2$, 因为, 若 $s^2 = 2$, 则 $s = \sqrt{2}$, 而 $s = \sqrt{2}$ 为无理数, 这与 s 为有理数矛盾, 因此, 要么 $s^2 > 2$, 要么 $1 < s^2 < 2$.

设 $s^2 > 2$, 令 $\epsilon = \frac{s^2 - 2}{2s}$, 则 $0 < s - \epsilon < s$, 但是, 由于 $(s - \epsilon)^2 > s^2 - 2\epsilon s = 2$, 所以 $s - \epsilon$ 也是 A 的一个上界, 且它比 s 还小, 这与 s 是上确界矛盾.

设 $1 < s^2 < 2$, 令 $\epsilon = \frac{2 - s^2}{2s + 1}$, 则 $0 < \epsilon < \frac{2 - s^2}{2s} < 1$, 且 $(s + \epsilon)^2 < s^2 + 2\epsilon s + \epsilon = 2$. 所以, $s + \epsilon \in A$, 这与 s 是 A 的上确界矛盾.

由上讨论知, A 在 $\mathbb{Q}$ 内没有上确界.

【问 2-2】 设集 $B = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$, 求 B 的上确界, 下确界, 试问集 B 的下确界等于其最小值吗?

答 $\sup B = 1, \inf B = 0$, 但 $\inf B = 0 \notin B$, 故 B 没有最小值.

说明 一个数集的上(下)确界与它的最大(小)值是有区别的, 数集 A 的最大(小)值是指含于 A 中的所有实数的最大(小)者, 若 A 有最大值, 那么它就是 A 的上确界, 反之不一定成立, 因为上确界可能属于 A , 也可能不属于 A , 关于下确界与最小值有类似的结论.

例题解析

【例 2-1】 证明: 数集 E 有界的充要条件是: 存在常数 $M > 0$, 使得对一切 $x \in E$, 有 $|x| \leq M$.

证 设 E 有界, 则 $\exists M_1, M_2$, 使对一切 $x \in E$, 有 $M_1 \leq x \leq M_2$, 取 $M = \max\{|M_1|, |M_2|\}$, 则有 $|x| \leq M$.

若 $\exists M > 0$, 使得对一切 $x \in E$, 有 $|x| \leq M$, 显然 E 有界.



【例 2-2】 证明:如果一个数集的上确界(或下确界)存在,那么它必定唯一.

证 用反证法,设 A 是一非空数集,且 $\sup A = a, \sup A = b, a \neq b$,不妨设 $a > b$,即 $a - b > 0$.

由上确界定义知, $\exists \varepsilon_0 = a - b$,及 $x_0 \in A$,使 $x_0 > a - \varepsilon_0 = a - (a - b) = b$,故 $x_0 > b$,这与 $b = \sup A$ 矛盾,所以, $\sup A$ 必唯一,类似可证下确界情形.

习题精解

(A)

1. 用不带绝对值的不等式及区间表示下列集合,并在数轴上画出来;

- (1) $\{x \mid |x - 2| < 1\}$; (2) $\{x \mid |x| \geq 2\}$; (3) $\{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$

解 (1) $1 < x < 3, (1, 3)$,如图 1-2.

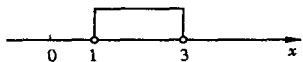


图 1-2

- (2) $x \leq -2$ 或 $x \geq 2, (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$,如图 1-3.

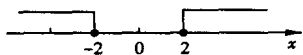


图 1-3

- (3) $x_0 - \delta < x < x_0$ 或 $x_0 < x < x_0 + \delta, (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$,如图 1-4.

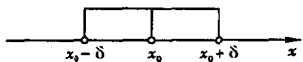


图 1-4

2. 证明下列不等式:

- (1) 设 $x \geq -1, n$ 为正整数,证明: $(1+x)^n \geq 1+nx$;

- (2) $||a| - |b|| \leq |a - b|$

证 (1) 用数学归纳法证.

当 $n=1$ 时,显然等号成立.

当 $n=2$ 时, $(1+x)^2 = 1+2x+x^2 \geq 1+2x (x > -1)$