高教·《工科数学基础》学习指导

高等数学同步辅导

大连理工大学应用数学系/组编

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

高等数学同步辅导

——高教·《工科数学基础》学习指导

大连理工大学应用数学系　**组编**

主编　曹铁川

编者　(以编写章节前后排序)

李　林　孙丽华　张海文　曹铁川

蒋志刚　金光日　庞丽萍　施光燕

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步辅导 / 曹铁川主编．— 大连：大连理工大学出版社，2003.11
ISBN 7-5611-2428-7

Ⅰ．高…　Ⅱ．曹…　Ⅲ．高等数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 086241 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市凌水河　邮政编码:116024
电话:0411-4708842　传真:0411-4701466　邮购:0411-4707961
E-mail:dutp@mail.dlptt.ln.cn　URL:http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷　　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:140mm×203mm　　印张:16.75　　字数:566 千字
印数:1 ~6 000
2003 年 11 月第 1 版　　2003 年 11 月第 1 次印刷

责任编辑:王　纪　　责任校对:杨　莉
封面设计:宋　蕾

定　价:19.80 元

前　言

高等数学是理工科院校最重要的基础课之一。学习高等数学既可以为后续专业课奠定必备的数学基础，同时也是提高自身数学素养的必经途径。由于教学内容和要求的不同，同类课程在不同的院校又分为“工科数学分析基础”、“高等数学”、“微积分”等。

由董加礼、孙丽华主编，高等教育出版社出版的《工科数学基础》，是按照国家教育部面向21世纪教学改革立项项目《工科数学教学内容和课程体系改革的研究与实践》的要求编写的一本改革教材。教材特点为模块式分流培养教材，重点院校和一般院校均可使用。该教材分为三个层次：第一层次（不带“*”者），适用于一般院校的多数专业及重点院校中对数学要求较少的少数专业；第二层次（第一层次＋带“*”者），适用于重点院校中的多数专业及一般院校中对数学要求较高的专业；第三层次（第二层次＋带“**”者），适用于重点院校中对数学要求更高的少数专业及其他各专业中的数学爱好者。

与初等数学相比，高等数学在研究内容及研究方法上存在着许多本质的差异，加之大学课堂教学密度大、速度快，因而对学生的自学能力要求较高。《工科数学基础》中较高层次的内容与传统高等数学教材相比，理论性更强，知识面更广，内涵更为深刻，要想学好需付出更多的努力。

为了帮助同学们更有效地学习，我们编写了《工科数学基础》的学习指导书——《高等数学同步辅导》。本书按《工科数学基础》的章节编排，与教学保持同步，可作为不同类型院校师生讲授和学习工科数学分析基础、高等数学、微积分的教学参考书。另外，也可作为参加硕士研究生入学数学考试的考生全面复习高等数学的复习资料。

本书在每章中，按教材顺序逐节编写。每节包含如下内容：

内容提要 简要归纳本节的主要内容，包括概念、定理、公式和一些重要结论，针对以上内容提出教学要求，对一些重要结论给予适当解释，对容易发生错误之处，提醒同学们注意。

释疑解惑 选择一些学生可能出现的理解易混乱的概念、使用易出现偏差的定理、计算不尽合理的问题进行解答，以增强对有关问题的正确理解。

例题解析 选择若干概念性、启发性、综合性较强的典型题目，剖析解题思路、归纳解题经验和技巧，并作出必要的注释和点拨，帮助读者提升解题能力。

习题精解 对教材本节中的部分题目给出解题途径和主要步骤。选择的题目既考虑到题型齐全，又保证有一定难度。

本书由大连理工大学应用数学系组织编写。曹铁川任主编，具体执笔者为李林(第一章、第二章、第十四章)，孙丽华(第三章、第四章)，张海文(第五章、第十三章)，曹铁川(第六章、第十一章、第十二章)，蒋志刚(第七章、第八章)，金光日(第九章)，庞丽萍(第十章)，施光燕(第十五章、第十六章)。

本书编写过程中，参阅了工科数学课程教学指导委员会编写的《高等数学释疑解难》，同济大学应用数学系与武汉科技学院数理系合编的《微积分》学习指导书，在此一并表示感谢。

限于编者水平，加之成书仓促，书中的缺点与不足在所难免，诚望同行和读者批评指正。

编　者

2003 年 11 月

目 录

第一章　集合与映射

本章重点是理解集合的概念、运算和性质，了解实数集的完备性，理解在映射的观点下的函数概念及其特性．

第一节　集合及其运算

内容提要

1．集合的概念及运算

集合是具有某种确定性质的事物的全体．主要运算为集合的并、交、差．设 A、B 是两个集合，则

$$A \cup B \overset{\text{def}}{=\!=\!=} \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

$$A \cap B \overset{\text{def}}{=\!=\!=} \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

$$A \setminus B \overset{\text{def}}{=\!=\!=} \{x \mid x \in A \text{ 但 } x \notin B\}$$

分别称为 A 与 B 的并集、交集、差集．若 $A \supseteq B$，则称差集 $A \setminus B$ 为 B 在 A 中的补集或余集，记作 $C_A B$．若 X 为基本集，X 中的任何集 A 关于 X 的余集 $X \setminus A$ 简称为 A 的补集或余集，记作 C_A．两个集合的并与交可以推广到任意多个集合的并与交．

2．集合的运算法则，乘积集

法则 1　设 A、B、C 为任意三个集合，则 A、B、C 满足交换律、结合律、分配律、幂等律及吸收律．

法则 2　设 $A_i(i=1,2,\cdots)$ 为一列集合，则有：

(1) 若 $A_i \subseteq C(i=1,2,\cdots)$，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq C$；

(2) 若 $A_i \supseteq C(i=1,2,\cdots)$，则 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \supseteq C$；

法则3 设 X 为基本集，$A_i(i=1,2,\cdots)$为一列集合，则

$$\mathscr{C}(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\bigcap_{i=1}^{\infty}\mathscr{C}A_i,\mathscr{C}(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i)=\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathscr{C}A_i$$

乘积集 $A\times B\xlongequal{\text{def}}\{(x,y)\mid x\in A,y\in B\}$为 A 与 B 的乘积集.

释疑解惑

【问 1-1】 集合等式 $A\cup(B\setminus A)=B$ 是否成立？为什么？

答 一般不成立，例如：$A=\{1,2,3\}$，$B=\{4,5,6\}$，由 $A\cup(B\setminus A)=A\cup B\neq B$，当 $A\subseteq B$ 时成立.

【问 1-2】 判定下列命题是否正确，正确的给出证明，否则举出反例：

(1) 若 $A\cup B=A\cup C$，则 $B=C$

(2) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

答 (1) 不正确.例如，当 $A\subseteq B$，$C=B\setminus A$ 时，就不成立.

(2) 正确.

证 设$\forall(x,y)\in A\times(B\cup C)$，则 $x\in A,y\in(B\cup C)$，从而 $x\in A,y\in B$ 或 $x\in A,y\in C$，于是$(x,y)\in(A\times B)$或$(x,y)\in(A\times C)$，故 $A\times(B\cup C)\subseteq(A\times B)\cup(A\times C)$.

反之，设$(x,y)\in(A\times B)\cup(A\times C)$，则$(x,y)\in(A\times B)$或$(x,y)\in(A\times C)$，从而 $x\in A,y\in B$ 或 $x\in A,y\in C$，于是 $x\in A,y\in B$ 或 $y\in C$，即 $x\in A,y\in(B\cup C)$，故$(A\times B)\cup(A\times C)\subseteq A\times(B\cup C)$.

所以，$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$.

例题解析

【例 1-1】 设 X 为基本集，$A_i(i=1,2,\cdots)$为一列集合，证明 $\mathscr{C}(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i)=\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathscr{C}A_i$.

证 设$\forall x\in\mathscr{C}(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i)$，则 $x\notin\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i$，从而$\exists i\in\mathbf{Z}$，使得 $x\notin A_i$，即 $x\in\mathscr{C}A_i$，故 $x\in\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathscr{C}A_i$，所以，$\mathscr{C}(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i)\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathscr{C}A_i$.

反之，设$\forall x\in\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathscr{C}A_i$，则$\exists i\in\mathbf{Z}$，使得 $x\in\mathscr{C}A_i$，从而 $x\notin A_i$，即 $x\notin\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i$，

故 $x\in\mathscr{C}(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i)$,所以,$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\mathscr{C}A_i\subseteq\mathscr{C}(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i)$.

综上知,$\mathscr{C}(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i)=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\mathscr{C}A_i$.

【例 1-2】 设 $A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}\cup\{x\mid 5\leqslant x\leqslant 6\}\cup\{3\}$,$B=\{y\mid 2\leqslant y\leqslant 3\}$,试在平面直角坐标系内画出 $A\times B$.

解 由 $A\times B$ 的定义画出其图形,为如图 1-1 两个正方形和一单位长线段.

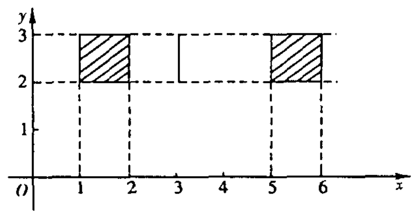

图 1-1

习题精解

(A)

1. 请将下列集合表示出来:

(1) 大于 5 的所有整数的集合;

(2) 圆 $x^2+y^2=4$ 内部(不含圆周)的一切点的集合;

(3) 函数方程 $\sin x=0$ 的一切根的集合.

解 (1) $\{6,7,\cdots,n,\cdots\}$或$\{n\mid n>5,n$ 为正整数$\}$

(2) $\{(x,y)\mid x^2+y^2<4,(x,y)\in\mathbf{R}^2\}$

(3) $\{0,\pm\pi,\pm 2\pi,\cdots,\pm n\pi,\cdots\}$

3. 设 $A=\{1,2,3\}$,$B=\{1,3,5\}$,$C=\{2,4,6\}$,求:

(1) $A\cup B\cup C$;　　(2) $A\cap B\cap C$;　　(3) $A\setminus B$

解 (1) $A\cup B\cup C=\{1,2,3,4,5,6\}$

(2) $A\cap B\cap C=\varnothing$

(3) $A\setminus B=\{2\}$

4. 设 $X=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,4,6\}$，求

(1) $\mathscr{C}A$； (2) $\mathscr{C}B$； (3) $(\mathscr{C}A)\cup(\mathscr{C}B)$； (4) $(\mathscr{C}A)\cap(\mathscr{C}B)$

解 (1) $\mathscr{C}A=\{4,5,6\}$

(2) $\mathscr{C}B=\{1,3,5\}$

(3) $(\mathscr{C}A)\cup(\mathscr{C}B)=\{1,3,4,5,6\}$

(4) $(\mathscr{C}A)\cap(\mathscr{C}B)=\{5\}$

(B)

1. 证明 $A\setminus B=A\cap\mathscr{C}B$

证 设 $\forall x\in A\setminus B$，则 $x\in A$ 但 $x\notin B$，从而 $x\in A$ 且 $x\in\mathscr{C}B$，故 $x\in A\cap\mathscr{C}B$.

反之，$\forall x\in A\cap\mathscr{C}B$，则 $x\in A$ 且 $x\in\mathscr{C}B$，于是 $x\in A$ 且 $x\notin B$，所以 $x\in A\setminus B$.综上知，$A\setminus B=A\cap\mathscr{C}B$.

---

2. 证明法则 2.

(1) 若 $A_i\subseteq C\ (i=1,2,\cdots)$，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\subseteq C$

(2) 若 $A_i\supseteq C\ (i=1,2,\cdots)$，则 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i\supseteq C$

证 (1) 设 $\forall x\in\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$，则 $\exists i\in\mathbf{N}^*$，使得 $x\in A_i$，又 $A_i\subseteq C$，所以，$x\in C$，即 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\subseteq C$.

(2) 设 $\forall x\in C$，则由 $A_i\supseteq C\ (i=1,2,\cdots)$ 知，$x\in A_i\ (i=1,2,\cdots)$，故 $x\in\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

第二节 实数集及其完备性

内容提要

1. 了解实数集对四则运算的封闭性，实数集的有序性和稠密性.掌握三角形不等式，平均值不等式.

2. 理解邻域的概念，理解实数集的完备性，知道确界与确界公理.确界公理：凡非空有上界(或下界)的实数集必有上确界(或下确界).

确界公理只在实数集内成立，而在有理数集内是不成立的，这反映了实数集的完备性.

释疑解惑

【问 2-1】 集合 $A=\{r\mid r>0,r^2<2,r\in\mathbf{Q}\}$ 有上界吗?，在 $\mathbf{Q}$ 内有没有上确界？这里 $\mathbf{Q}$ 为有理数集.

答 显然，A 有上界，例如 2 就是它的上界，但在 $\mathbf{Q}$ 内 A 没有上确界. 事实上，如果 $s\in\mathbf{Q}$ 是它的上确界，那么，$s^2\neq 2$，因为，若 $s^2=2$，则 $s=\sqrt{2}$，而 $s=\sqrt{2}$ 为无理数，这与 s 为有理数矛盾，因此，要么 $s^2>2$，要么 $1<s^2<2$.

设 $s^2>2$，令 $\varepsilon=\dfrac{s^2-2}{2s}$，则 $0<s-\varepsilon<s$，但是，由于 $(s-\varepsilon)^2>s^2-2\varepsilon s=2$，所以 $s-\varepsilon$ 也是 A 的一个上界，且它比 s 还小，这与 s 是上确界矛盾.

设 $1<s^2<2$，令 $\varepsilon=\dfrac{2-s^2}{2s+1}$，则 $0<\varepsilon<\dfrac{2-s^2}{2s}<1$，且 $(s+\varepsilon)^2<s^2+2s\varepsilon+\varepsilon=2$. 所以，$s+\varepsilon\in A$，这与 s 是 A 的上确界矛盾.

由上讨论知，A 在 $\mathbf{Q}$ 内没有上确界.

【问 2-2】 设集 $B=\left\{1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\cdots,\dfrac{1}{n},\cdots\right\}$，求 B 的上确界，下确界，试问集 B 的下确界等于其最小值吗?

答 $\sup B=1,\inf B=0$，但 $\inf B=0\notin B$，故 B 没有最小值.

说明 一个数集的上(下)确界与它的最大(小)值是有区别的，数集 A 的最大(小)值是指含于 A 中的所有实数的最大(小)者，若 A 有最大值，那么它就是 A 的上确界，反之不一定成立，因为上确界可能属于 A，也可能不属于 A，关于下确界与最小值有类似的结论.

例题解析

【例 2-1】 证明：数集 E 有界的充要条件是：存在常数 $M>0$，使得对一切 $x\in E$，有 $|x|\leqslant M$.

证 设 E 有界，则 $\exists M_1,M_2$，使对一切 $x\in E$，有 $M_1\leqslant x\leqslant M_2$，取 $M=\max\{|M_1|,|M_2|\}$，则有 $|x|\leqslant M$.

若 $\exists M>0$，使得对一切 $x\in E$，有 $|x|\leqslant M$，显然 E 有界.

【例 2-2】 证明:如果一个数集的上确界(或下确界)存在,那么它必定唯一.

证 用反证法,设 A 是一非空数集,且 $\sup A = a$, $\sup A = b$, $a \neq b$,不妨设 $a > b$,即 $a - b > 0$.

由上确界定义知,$\exists\, \varepsilon_0 = a - b$,及 $x_0 \in A$,使 $x_0 > a - \varepsilon_0 = a - (a - b) = b$,故 $x_0 > b$,这与 $b = \sup A$ 矛盾,所以,$\sup A$ 必唯一,类似可证下确界情形.

习题精解

(A)

1. 用不带绝对值的不等式及区间表示下列集合,并在数轴上画出来;

(1) $\{x \mid |x-2| < 1\}$; (2) $\{x \mid |x| \geqslant 2\}$; (3) $\{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$

解 (1) $1 < x < 3$, $(1,3)$,如图 1-2.

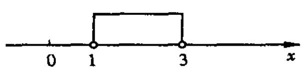

图 1-2

(2) $x \leqslant -2$ 或 $x \geqslant 2$, $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$,如图 1-3.

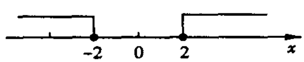

图 1-3

(3) $x_0 - \delta < x < x_0$ 或 $x_0 < x < x_0 + \delta$, $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$,如图1-4.

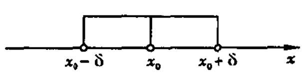

图 1-4

2. 证明下列不等式:

(1) 设 $x \geqslant -1$, n 为正整数,证明:$(1+x)^n \geqslant 1 + nx$;

(2) $||a| - |b|| \leqslant |a - b|$

证 (1) 用数学归纳法证.

当 $n = 1$ 时,显然等号成立.

当 $n = 2$ 时,$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 \geqslant 1 + 2x (x > -1)$