

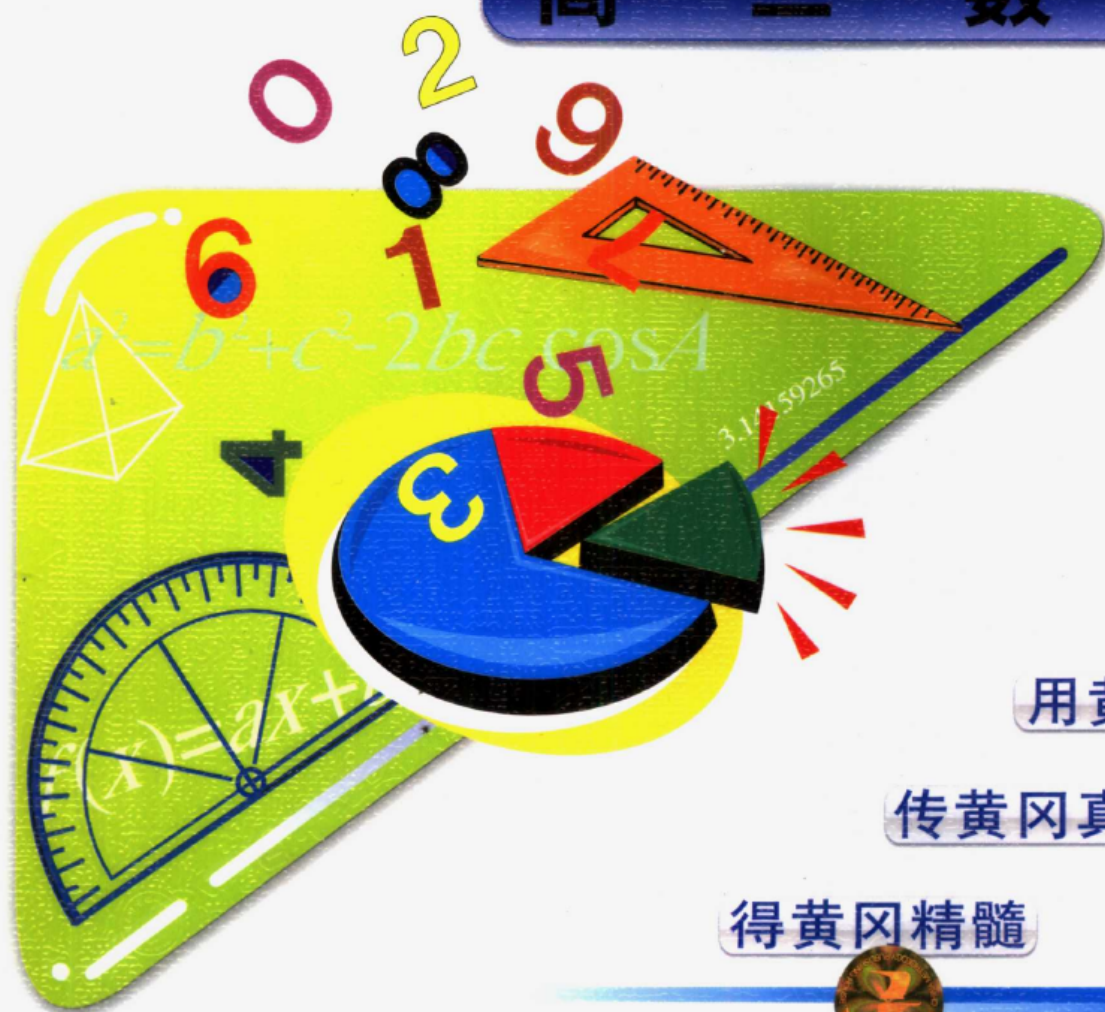
黄冈题库

丛书主编：黄冈中学副校长 董德松

2005 练考新课堂

第三次修订

高二 数学



用黄冈真题

传黄冈真经

得黄冈精髓



中国计量出版社
教育图书出版中心

黄冈题库

练考新课堂

高二数学

本册主编 钱建威

中国计量出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

练考新课堂. 高二数学/钱建威主编. —北京: 中国计量出版社, 2004.8
(黄冈题库)

ISBN 7-5026-1359-5

I. 练… II. 钱… III. 数学课—高中—教学参考资料 IV. G 634

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2001) 第 69834 号

中国计量出版社出版

北京和平里西街甲 2 号

邮政编码 100013

电话 (010) 64275360

E-mail jlbcb@263.net.cn

北京市密东印刷有限公司印刷

新华书店北京发行所发行

版权所有 不得翻印

*

850 mm×1168 mm 16 开本 印张 19 字数 412 千字

2004 年 8 月第 4 版 2004 年 8 月第 9 次印刷

*

印数 94 001—115 000 定价: 20.00 元

(如有印装质量问题, 请与本社联系调换)

编 委 会

主 任	马纯良		
副 主 任	董德松	廖集赋	
委 员	黄 契	彭兆辉	张兰珍
	张书文	王清明	黄金鹏
	蔡 新	陈长东	朱和平
	田建华	张桂琴	
本册主编	钱建威		
本册编写	王 丽	张雄显	吴俊安
	彭昭辉	钱建威	

前 言

《黄冈题库——练考新课堂》是黄冈中学主管教学的副校长、高级教师、著名教育专家董德松先生和我社共同策划，由董德松先生担任丛书主编，由黄冈市一批长期工作在教学一线的著名特高级教师精心编写的新型教辅用书；是我社继《北大附中题库精选》、《中考前20天成功试卷》、《高考重点线》之后，推出的又一套高质量品牌教辅丛书。它的最大特色是立足素质教育，紧贴最新教改，紧跟中考、高考题型变化。

超前的理念。2002年开始，在全国范围内高考已实行“3+X”制。今年高考扩大了高考自主命题的范围，由原来北京、上海两市增加到11个省市。根据这一重大改革，《黄冈题库——练考新课堂》特别注意采用各地的新题型，注意将主观题和客观题有机地结合在一起，努力培养学生跨学科的综合解题能力。

一流的作者。好作者是出好书的前提。黄冈历来被称为中国的“高考状元市”，连续11年高考上线率居全国之首。原因何在？除拥有大批敏而好学的莘莘学子之外，关键是还拥有一批传道无遗、解惑有方的教学精英。他们是黄冈教育辉煌的基石，也是《黄冈题库——练考新课堂》胜超群芳的保障。

科学的设计。根据突出解题思路、优化解题训练、点拨解题关键、剖析解题误区的总思路，丛书设计重在以练带讲，讲练结合。在注重打好基础的同时，更注重能力题、综合题、跨学科题、发散思维题的设置，并在其后设有精到的答疑解惑，从而使丛书既避免了当前图书市场上常见教辅书以讲为主、缺少实际训

练的缺陷，又克服了习题集类教辅书以做题为主、忽视学习思路的指导与易混易错题点拨不足的问题。

实用的体例。丛书每单元（章或节）均设有要点提示，同时按认知规律设有循序渐进的基础卷、提高卷、综合训练卷，并在初三、高三年级特别增加了黄冈中学中考、高考模拟试卷，所有试卷均附有参考答案。特别值得一提的是，参考答案详略得当，有解题思路提示，有疑难问题点拨，旨在通过分析正、反两方面的思维过程，提示正确的解题方法，使学生灵活运用所学知识，慧眼识陷阱，避开思维误区，在复杂多变的题型中游刃有余。

我们相信，这套丛书必将以其独到的特色赢得广大学生、家长和老师的青睐。书中不妥之处，敬请批评指正。

编委会

2004年5月

第三次修订说明

《黄冈题库——练考新课堂》丛书自出版以来，以其超前的理念、一流的作者、科学的设计、实用的体例，赢得了广大师生的一致认可和好评。丛书一路畅销，一版再版。今年是第三次修订，我们继续本着精益求精的原则，对丛书进行了认真地修改。值此再版之际，谨向对我们工作给予热情支持的广大师生、家长及各界朋友致以崇高的敬意！

此次修订，除保持原书特色外，重点在以下几个方面作出了进一步的改进：

一、密切关注中考、高考动向。我们对中考、高考试题的最新走向进行了认真地研究，并将成果精心融汇到编选的习题当中，使习题始终与中考、高考的要求相一致。

二、点拨更具体。丛书修订中，我们更注重点拨的系统性、完整性和互动性，尤其注意基础与能力的转换，解题思路的拓展，解题技巧的掌握与运用，方法规律的归纳总结。因而，丛书更有利于学生事半功倍地学习。

三、科学性、适用性更强。我们为满足不同层次学生的需求，基础卷紧扣课本，重在知识积累；提高卷侧重知识的迁移、拓展和延伸，强调能力提高；综合训练卷属阶段测试，其试题典型、新颖，瞄准升学考试走向，旨在提高应试能力；此外还设置了“挑战名题”和“探究性题目”等等。学生可根据自己的实际

情况进行选择。

四、题量大、题型更新。根据素质教育和教改的要求，我们增加了不少紧贴社会、紧贴科技发展的开放性、探究性题目，并选用了从广大师生中征集到的一些名题、多解题，充分体现了教学大纲、考试说明、新教材以及中考、高考的最新要求。

“居高声自远，非是藉秋风”——这是我们的追求。

“好风凭借力，送我上青云”——这是我们的希望。

“工欲善其事，必先利其器”——这是你的选择。

你的成功，就是我们的骄傲！

丛书编委会

2004年5月

目 录

上 册

第六章 不等式	(1)
§ 6.1 不等式的性质	(1)
§ 6.2 算术平均数与几何平均数	(4)
§ 6.3 不等式的证明 (一)	(7)
§ 6.4 不等式的证明 (二)	(10)
§ 6.5 不等式的解法举例 (一)	(13)
§ 6.6 不等式的解法举例 (二)	(16)
§ 6.7 含有绝对值的不等式	(19)
§ 6.8 不等式的综合应用	(22)
第六章总测试	(25)
第七章 直线和圆的方程	(29)
§ 7.1 直线的倾斜角和斜率	(29)
§ 7.2 直线的方程 (一)	(32)
§ 7.3 直线的方程 (二)	(36)
§ 7.4 两条直线的位置关系 (一)	(39)
§ 7.5 两条直线的位置关系 (二)	(42)
§ 7.6 直线中的最值问题	(45)
§ 7.7 简单的线性规划及其应用	(48)
§ 7.8 曲线和方程	(53)
§ 7.9 圆的方程 (一)	(56)
§ 7.10 圆的方程 (二)	(59)
第七章总测试	(62)
第八章 圆锥曲线方程	(66)
§ 8.1 椭圆及其标准方程	(66)
§ 8.2 椭圆的简单几何性质	(69)
§ 8.3 直线与椭圆的位置关系	(72)
§ 8.4 双曲线及其标准方程	(75)
§ 8.5 双曲线的简单几何性质	(78)
§ 8.6 直线与双曲线的位置关系	(81)
§ 8.7 抛物线及其标准方程	(85)
§ 8.8 抛物线的简单几何性质	(88)
§ 8.9 直线与抛物线的位置关系	(90)
§ 8.10 圆锥曲线的综合问题	(93)
第八章总测试	(96)
第一学期期中测试	(100)

第一学期期末测试	(103)
----------------	-------

下 册

第九章 直线、平面、简单几何体	(106)
一、空间直线和平面	(106)
§ 9.1 平面	(106)
§ 9.2.1 空间直线位置关系 平行直线	(110)
§ 9.2.2 异面直线	(113)
§ 9.3 直线与平面平行的判定和性质	(117)
§ 9.4 直线与平面垂直的判定和性质	(120)
§ 9.5 两个平面平行的判定和性质	(124)
§ 9.6 两个平面垂直的判定和性质	(128)
第九章总测试 (一)	(132)
二、简单几何体	(135)
§ 9.7 棱柱	(135)
§ 9.8 棱锥	(139)
§ 9.9 多面体和正多面体	(142)
§ 9.10 球	(146)
第九章总测试 (二)	(149)
第十章 排列、组合和概率	(152)
§ 10.1 加法原理和乘法原理	(152)
§ 10.2 排列	(155)
§ 10.3 组合	(158)
§ 10.4 二项式定理	(161)
§ 10.5 随机事件的概率	(164)
§ 10.6 互斥事件有一个发生的概率	(167)
§ 10.7 相互独立事件同时发生的概率	(170)
第十章总测试 (一)	(173)
第十章总测试 (二)	(175)
第二学期期中测试	(178)
第二学期期末测试	(181)
有关立体几何的研究性学习问题 (阅读)	(184)
参考答案·解题点拨	(187)

上册

第六章 不等式

§ 6.1 不等式的性质

要点提示

1. 知识要点:

(1) 基本性质: $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$

$$a = b \Leftrightarrow a - b = 0$$

$$a < b \Leftrightarrow a - b < 0$$

(2) 性质定理: 定理 1: $a > b \Leftrightarrow b < a$

定理 2: $a > b, b > c \Rightarrow a > c$

$$a < b, b < c \Rightarrow a < c$$

定理 3: $a > b \Rightarrow a + c > b + c$

推论: $a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d$

定理 4: $\left. \begin{array}{l} a > b \\ c > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow ac > bc$

$$\left. \begin{array}{l} a > b \\ c < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow ac < bc$$

推论 1: $\left. \begin{array}{l} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow ac > bd$

推论 2: $a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n (n \in \mathbb{N} \text{ 且 } n > 1)$

定理 5: $a > b > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} (n \in \mathbb{N} \text{ 且 } n > 1)$

2. 重、难点: 实数大小的比较和不等式基本性质的应用以及对含有字母的不等式的分类讨论.

基础卷(15分钟)

一、选择题

1. 若 a, b 是任意的实数, 且 $a > b$, 则 ()

A. $a^2 > b^2$

B. $\frac{b}{a} < 1$

C. $\lg(a - b) > 0$

D. $\left(\frac{1}{2}\right)^a < \left(\frac{1}{2}\right)^b$

2. 若 $a > b, c > d$, 则下列不等式恒成立的是 ()

- A. $a + d > b + c$ B. $ac > bd$ C. $\frac{a}{c} > \frac{b}{a}$ D. $d - a < c - b$
3. $-1 < \alpha < \beta < 1$, 则下列各式中恒成立的是 ()
 A. $-2 < \alpha - \beta < 0$ B. $-2 < \alpha - \beta < -1$ C. $-1 < \alpha - \beta < 0$ D. $-1 < \alpha - \beta < 1$
4. 已知 $a, b, c \in R$, 则下列命题成立的是 ()
 A. $a > b \Rightarrow ac^2 > bc^2$ B. $\frac{a}{c} > \frac{b}{c} \Rightarrow a > b$
 C. $a^3 > b^3, ab > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ D. $a^2 > b^2, ab > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
5. 若 $a < b < 0$, 则下列结论中正确的命题是 ()
 A. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ 和 $\frac{1}{|a|} > \frac{1}{|b|}$ 均不能成立
 B. $\frac{1}{a-b} > \frac{1}{a}$ 和 $\frac{1}{|a|} > \frac{1}{|b|}$ 均不能成立
 C. 不等式 $\frac{1}{a-b} > \frac{1}{a}$ 和 $\left(a + \frac{1}{b}\right)^2 > \left(b + \frac{1}{a}\right)^2$ 均不能成立
 D. 不等式 $\frac{1}{|a|} > \frac{1}{|b|}$ 和 $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 > \left(b + \frac{1}{b}\right)^2$ 均不能成立
6. 若 $a < 0, -1 < b < 0$, 则 a, ab, ab^2 大小顺序为 ()
 A. $a < ab < ab^2$ B. $ab^2 < ab < a$ C. $ab > a > ab^2$ D. $ab > ab^2 > a$

二、填空题

7. 已知 $60 < a < 84, 28 < b < 33$, 则 $a - b$ 的范围是 _____, $\frac{a}{b}$ 的范围是 _____.
8. 已知 $|a| < 1, |b| < 1$, 则 $a + b$ _____ $ab + 1$. (填“>”, “<”或“=”)
9. 当 x 取 _____ 时, $(x^2 + 1)^2 > x^4 + x^2 + 1$.
10. 设 $a < -1, 0 < b < 1$, 则 $-a, b, ab, -\frac{a}{b}$ 从小到大的顺序是 _____.

提高卷(20分钟)

一、选择题

1. 已知 $a > b$ 且 $ab \neq 0$, 则 $\frac{1}{a}$ 与 $\frac{1}{b}$ 的大小关系是 ()
 A. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ B. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
 C. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ 或 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ D. 以上都不对
2. 若 a, b 是任意实数, 且 $a > b$, 则 ()
 A. $a^2 > b^2$ B. $\left(\frac{1}{2}\right)^a < \left(\frac{1}{2}\right)^b$
 C. $\lg(a - b) > 0$ D. $\frac{b}{a} < 1$
3. 若 $ac > bd$, 且 $a > b > 0$, 则 ()
 A. $c > d$ B. $c > d > 0$
 C. $c < d$ D. c, d 大小不确定
4. 已知 $0 < m < n < 1$, 下列不等式恒成立的是 ()
 A. $\log_m n > 1$ B. $\log_m n < 0$
 C. $0 < \log_m n < 1$ D. $\log_m n < -1$
5. 设 $a < b, x = 0.9^a \times 0.8^b, y = 0.9^b \times 0.8^a$, 则 x, y 的大小关系为 ()
 A. $x > y$ B. $x < y$ C. $x = y$ D. 大小不确定

二、填空题

6. 若 $a > \frac{1}{a}$ 成立, 则 a 的范围是_____.
7. 已知 $-1 < a + b < 3$, 且 $2 < a - b < 4$, 则 $2a + 3b$ 的取值范围是_____.
8. 若 $d > c$, $a + b = c + d$, $a + d < b + c$, 则 a, b, c, d 的大小关系是_____.
9. 已知 $a > b$, $a - \frac{1}{a} > b - \frac{1}{b}$ 同时成立, 则 ab 应满足的条件是_____.

三、解答题

10. 若 $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 且 a 最大, 试比较 $a + d$ 与 $b + c$ 的大小.

综合训练卷(45分钟, 满分100分)

一、选择题(每小题6分, 共36分)

1. 若 $a, b \in \mathbb{R}$, 则 $\frac{1}{a^3} > \frac{1}{b^3}$ 成立的一个充分不必要的条件是 ()
- A. $ab > 0$ B. $b > a$ C. $a < b < 0$ D. $ab(a - b) < 0$
2. 设 $0 < a < b$ 且 $a + b = 1$, 则四个数 $\frac{1}{2}, a, 2a, a^2 + b^2$ 中最小的数是 ()
- A. $\frac{1}{2}$ B. a C. $2ab$ D. $a^2 + b^2$
3. 若 $\log_a 2 < \log_b 2 < 0$, 则 ()
- A. $0 < a < b < 1$ B. $0 < b < a < 1$ C. $a > b > 1$ D. $b > a > 1$
4. 若 $a, b \in \mathbb{R}^+$ 且 $a \neq b$, $P = a^{k+1} + b^{k+1}$, $Q = ab^k + a^k b$, 其中 $k \in \mathbb{N}^*$, 则 ()
- A. $P > Q$ B. $P < Q$ C. $P = Q$ D. 不能确定
5. 设 $a > 2, b > 2$, 则 ab 与 $a + b$ 的大小关系是 ()
- A. $ab > a + b$ B. $ab < a + b$ C. $ab = a + b$ D. 不确定
6. 已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1, 0 < x < 1$, 下列各式正确的是 ()
- A. $|\log_a(1 - x)| > |\log_a(1 + x)|$ B. $|\log_a(1 - x)| < |\log_a(1 + x)|$
- C. $|\log_a(1 - x)| = |\log_a(1 + x)|$ D. 当 $0 < a < 1$ 时, 前者大; 当 $a > 1$ 时, 后者大

二、填空题(每小题7分, 共28分)

7. 已知 $a > b$, 且 $ab > 0$, 则 $\frac{1}{a}$ _____ $\frac{1}{b}$ (填“>”、“<”或“=”).
8. 设 $f(x) = \frac{x}{1+x}, m > n > 0$, 则 $f(m)$ _____ $f(n)$. (填“>”、“<”或“=”)
9. 设 $0 < a < \frac{1}{2}, f(x) = 2x^2 - 3x$, 则 $f(a)$ 与 $f(1 - a)$ 的大小关系是_____.
10. 设 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, 那么 $\alpha - \beta$ 的范围是_____.

三、解答题(每小题18分, 共36分)

11. 已知 $|a| > |b| (b \neq 0)$, 试比较 $\frac{1}{a}$ 与 $\frac{1}{b}$ 的大小.
12. 设 $f(x) = ax^2 + c$, 且 $-3 \leq f(1) \leq 1, -2 \leq f(2) \leq 3$, 求 $f(3)$ 的最大值与最小值.

§ 6.2 算术平均数与几何平均数

要点提示

1. 知识要点:以不等式的性质作基础,推导出几个重要的不等式,特别是掌握两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数定理,并运用该定理解决某些非二次函数的最值问题.

2. 重要不等式:

①若 $a \in \mathbb{R}$, 则 $a^2 \geq 0, |a| \geq 0$.

②若 $a, b \in \mathbb{R}$, 则 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ (当且仅当 $a = b$ 时取“=”号).

③若 $a, b \in \mathbb{R}^+$, 则 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (当且仅当 $a = b$ 时取“=”号).

④若 $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, 则 $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ (当且仅当 $a = b = c$ 时取“=”号).

⑤若 $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, 则 $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ (当且仅当 $a = b = c$ 时取“=”号).

其中,对于③中,称 $\frac{a+b}{2}$ 为 a, b 的算术平均数(也看作正数 a, b 的等差中项),称

$\sqrt{ab}$ 为 a, b 的几何平均数(也看作正数 a, b 的等比中项).该定理可叙述为:两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数.

3. 重、难点:对两个正数的算术平均数与几何平均数定理等号成立的充要条件的理解和应用.特别是应用定理求某些函数的最值时,应注意“一正、二定、三相等”.

基础卷(15分钟)

一、选择题

1. 下列各式中,最小值等于2的是 ()

A. $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

B. $\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}$

C. $\tan \theta + \cot \theta$

D. $2^x + 2^{-x}$

2. 若 $0 < a < 1, 0 < b < 1$ 且 $a \neq b$, 则 $a+b, 2\sqrt{ab}, a^2+b^2, 2ab$ 中最小的是 ()

A. a^2+b^2

B. $a+b$

C. $2ab$

D. $2\sqrt{ab}$

3. 设 $a \in \mathbb{R}$ 且 $a \neq 0$, 以下四个数恒大于1的个数是 ()

① a^3+1

② a^4-2a^2+2

③ $a + \frac{1}{a}$

④ $a^2 + \frac{1}{a^2}$

A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

4. 若 $a > b > 1, P = \sqrt{\lg a \cdot \lg b}, Q = \frac{1}{2}(\lg a + \lg b), R = \lg\left(\frac{a+b}{2}\right)$, 则 ()

A. $R < P < Q$

B. $P < Q < R$

C. $Q < P < R$

D. $P < R < Q$

5. 使乘积 xy 没有最大值的一个条件是 ()

A. $x^2 + y^2$ 为定值

B. $x > 0, y > 0$, 且 $x+y$ 为定值

- C. $x < 0, y < 0$, 且 $x + y$ 为定值
 6. 在下列结论中, 错用重要不等式作依据的是 ()
 A. $x, y, z \in \mathbb{R}^+$, 则 $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3$
 B. $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$
 C. $\lg x + \log_x 10 \geq 2$
 D. $a \in \mathbb{R}^+, (1+a)\left(1+\frac{1}{a}\right) \geq 4$

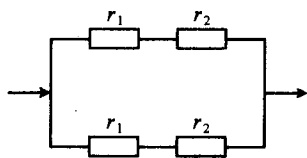
二、填空题

7. 已知 $a, b \in \mathbb{R}^+$, 则 $\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}, \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}, \frac{2ab}{a+b}$ 的大小顺序是_____.
 8. 若 $x, y \in \mathbb{R}^+$ 且 $\log_2 x + \log_2 y = 2$, 则 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值是_____.
 9. 设 $a, b \in \mathbb{R}^+$ 且 $a + b = 3$, 则 ab^2 的最大值为_____.
 10. 设 $x > 0$, 则函数 $y = 3 - 3x - \frac{1}{x}$ 的最大值是_____.

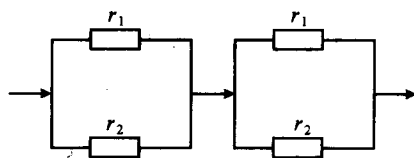
提高卷(20分钟)

一、选择题

1. 已知 $a > b > 0$, 则下列命题正确的是 ()
 A. $\frac{2a+b}{a+2b} < \frac{a}{b}$
 B. $\frac{2a+b}{a+2b} > \frac{a}{b}$
 C. $\frac{2a+b}{a+2b} = \frac{b}{a}$
 D. $\frac{2a+b}{a+2b} < \frac{b}{a}$
 2. $x, y \in \mathbb{R}$, 且满足 $x + 3y = 2$, 则 $3^x + 27^y + 1$ 的最小值是 ()
 A. $3\sqrt[3]{9}$
 B. $1 + 2\sqrt{2}$
 C. 6
 D. 7
 3. 如图 6—2—1 所示, 已知 r_1 和 r_2 是阻值不同的两个电阻, 分别按图(1)和图(2)连接. 设图(1)中的总阻值为 R_A , 图(2)中的总阻值为 R_B , 则 R_A, R_B 的大小关系是 ()



(1)



(2)

图 6—2—1

- A. $R_A > R_B$
 B. $R_A = R_B$
 C. $R_A < R_B$
 D. 由 r_1, r_2 确定
 4. 设 $a > b > c, n \in \mathbb{N}$, 且 $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} \geq \frac{n}{a-c}$ 恒成立, 则 n 的最大值是 ()
 A. 2
 B. 3
 C. 4
 D. 6
 5. 函数 $f(x) = x + \frac{4}{x} + 3$ 在 $(-\infty, -2]$ 上 ()
 A. 无最大值, 有最小值 7
 B. 无最大值, 有最小值 -1
 C. 有最大值 7, 有最小值 -1
 D. 有最大值 -1, 无最小值

二、填空题

6. 比较三个数 $\log_2 3, \log_{20} 30, \log_{0.2} 0.3$ 的大小关系是_____.
 7. 若正数 a, b 满足 $ab = a + b + 3$, 则 ab 的取值范围是_____.
 8. 已知 $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ 且 $a + b + c = 1$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq$ _____.

9. 函数 $y = \sin x + \frac{1}{\sin x}$, $x \in (0, \frac{\pi}{4}]$, 当 $x =$ _____ 时, 函数有最 _____ 值 _____.

三、解答题

10. 求 $y = \frac{x^2 + 5}{\sqrt{x^2 + 4}}$ ($x \in \mathbb{R}$) 的最小值.

综合训练卷(45 分钟, 满分 100 分)

一、选择题(每小题 6 分, 共 36 分)

1. 设 $a, b \in \mathbb{R}^+$ 且 $a \neq b$, 则

A. $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

B. $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

C. $\sqrt{ab} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} < \frac{a+b}{2}$

D. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$

2. 若 $x, y \in \mathbb{R}^+$ 且 $x+y \leq 4$, 下列各式成立的是

A. $\frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 1$

C. $\sqrt{xy} \geq 2$

D. $\frac{1}{xy} \geq \frac{1}{4}$

3. 若 $\lg x + \lg y = 2$, 则 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值是

A. $\frac{1}{20}$

B. $\frac{1}{5}$

C. $\frac{1}{2}$

D. 2

4. 若 $a > 0, b > 0$, 则下列不等式不成立的是

A. $a+b + \frac{1}{\sqrt{ab}} \geq 2\sqrt{2}$

B. $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$

C. $\frac{a^2+b^2}{\sqrt{ab}} \leq a+b$

D. $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$

5. 已知 $\log_x y = -2$, 则 $x+y$ 的最小值是

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

6. 若 $x, y, a \in \mathbb{R}^+$ 且 $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq a\sqrt{x+y}$ 恒成立, 则 a 的最小值为

A. $\sqrt{2}$

B. 2

C. 1

D. $\frac{1}{2}$

二、填空题(每小题 7 分, 共 28 分)

7. 已知 $x > 0, y > 0$ 且 $x+y=6$, 那么 x^2+y^2 的最小值为 _____.

8. 函数 $y = \frac{x^2+a+1}{\sqrt{x^2+a}}$ 的最小值是 _____.

9. 已知 $x, y, z \in \mathbb{R}^+$, 且 $xyz(x+y+z)=1$, 则 $(x+y)(x+z)$ 的最小值为 _____.

10. 函数 $y = \frac{3x}{x^2+x+1}$ ($x < 0$) 的值域是 _____.

三、解答题(每小题 18 分, 共 36 分)

11. 已知 $2b+ab+a=30$ ($a > 0, b > 0$), 求 $y = \frac{1}{ab}$ 的最小值.

12. 已知 A, B 两地相距 200km, 一只船从 A 地逆水到 B 地, 水速为 8km/h, 船在静水中的速度为 v (km/h) ($8 < v \leq v_0$). 若船每小时的燃料费与其在静水中的速度的平方成正比, 当 $v = 12$ km/h, 每小时的燃料费为 720 元, 为了使全程燃料费最省, 船的实际速度应为多少?

§ 6.3 不等式的证明(一)

要点提示

1. 知识要点: 以不等式的性质作基础, 重要不等式为依据, 运用比较法、综合法、分析法进行不等式的证明.
2. 要注意基本不等式的各种变形. 常用的重要不等式有 ($a, b, c \in \mathbb{R}^+$):
 整式形式的有: ① $\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab$; ② $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$; ③ $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$.
 根式形式的有: ④ $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$; ⑤ $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$; ⑥ $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$.
 分式形式的有: ⑦ $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 4$; ⑧ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{1}{a+b}$; ⑨ $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$; ⑩ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$.
3. 重、难点: 比较法、综合法、分析法是证明不等式的最常用的方法, 在不等式的证明过程中不仅要掌握各种方法的证题规律和变形技巧, 而且还要注意运用一次函数、二次函数、指数函数、对数函数以及幂函数的性质.

基础卷(15分钟)

一、选择题

1. 已知 $a > b > 0$, 全集 $U = \mathbb{R}$, $M = \left\{x \mid b < x < \frac{a+b}{2}\right\}$, $N = \{x \mid \sqrt{ab} < x < a\}$, $P = \{x \mid b < x \leq \sqrt{ab}\}$, 则
 A. $P = M \cap C_U N$ B. $P = C_U M \cap N$ C. $P = M \cap N$ D. $P = M \cup N$
2. 已知 $x > 0$, a, b, c 为常数, 且 a 与 b 为正数, 则
 A. $c - ax - \frac{b}{x} < c - 2\sqrt{ab}$ B. $c - ax - \frac{b}{x} \leq c - 2\sqrt{ab}$
 C. $c - ax - \frac{b}{x} > c - 2\sqrt{ab}$ D. $c - ax - \frac{b}{x} \geq c - 2\sqrt{ab}$
3. 下列不等式 ① $x^2 + 3 > 2x (x \in \mathbb{R})$, ② $a^5 + b^5 \geq a^3 b^2 + a^2 b^3$, ③ $a^2 + b^2 \geq 2(a - b - 1)$, 其中正确的是